16.1. Modelo 2015 - Opción A

Problema 16.1.1 *(2 puntos)* Una empresa láctea se plantea la producción de dos nuevas bebidas A y B. Producir un litro de la bebida A cuesta 2 euros, mientras que producir un litro de bebida B cuesta 0,5 euros. Para realizar el lanzamiento comercial se necesitan al menos 6 millones de litros de bebida, aunque del tipo B no podrán producirse (por limitaciones técnicas) más de 5 millones y debido al coste de producción no es posible elaborar más de 8 millones de litros en total de ambas bebidas. Además, se desea producir una cantidad de bebida B mayor o igual que la de bebida A. ¿Cuántos litros habrá que producir de cada tipo de bebida para que el coste de producción sea mínimo? Calcúlese dicho coste. Justifiqúense las respuestas.
Solución:
LLamamos x : millones de bebida A e y millones de bebida B

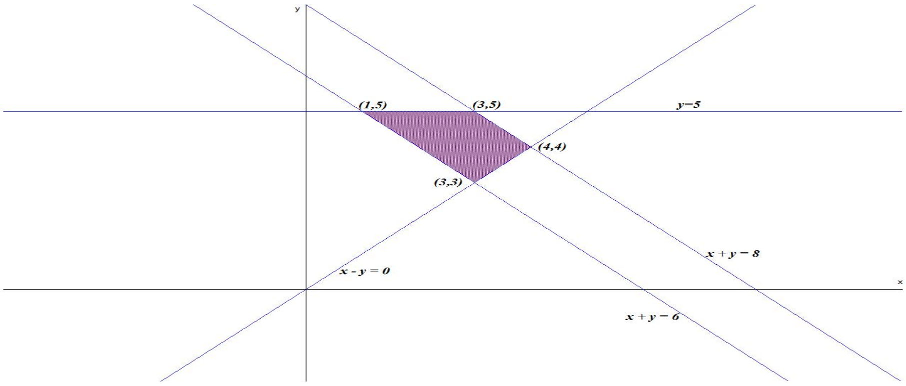
$$z(x, y) = 2x + 0,5y$$

sujeto a

$$\left\{\begin{array}{l} x + y \geq 6 \\ y \leq 5 \\ x + y \leq 8 \\ y \geq x \\ x, y \geq 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x + y \geq 6 \\ y \leq 5 \\ x + y \leq 8 \\ x - y \leq 0 \\ x, y \geq 0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} z(1, 5) = 4,5 \ \text{Mínimo} \\ z(3, 5) = 8,5 \\ z(3, 3) = 7,5 \\ z(4, 4) = 10 \end{array}\right.$$

Hay que producir 1 millón de litros de la bebida A y 5 millones de la B con un coste de 4,5 millones de euros.



Problema 16.1.2 *(2 puntos)* Se considera $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

a) Calcúlese A^{-1}.

b) Calcúlese $A^T \cdot A$.

Nota: A^T denota la traspuesta de la matriz A.

Solución:

a)
$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3/2 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix}$$

b)
$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 11 & 25 \end{pmatrix}$$

Problema 16.1.3 *(2 puntos)*

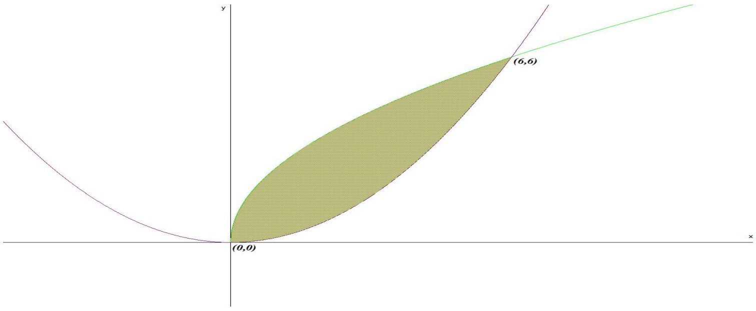
a) Dibújese, de manera esquemática, la región acotada del plano limitada por las gráficas de las curvas
$$y = \sqrt{6x}; \quad y = \frac{x^2}{6}$$

b) Calcúlese el área de la región descrita en el apartado anterior.

Solución:

a) $\sqrt{6x} = \dfrac{x^2}{6} \Longrightarrow x = 0, \ \ x = 6$

b) $\displaystyle\int_0^6 \left(\sqrt{6x} - \frac{x^2}{6}\right) dx = \left.\frac{12x\sqrt{6x} - x^3}{18}\right]_0^6 = 12 \ u^2$



Problema 16.1.4 *(2 puntos)* Se consideran los sucesos incompatibles A y B de un experimento aleatorio tales que $P(A) = 0,4$, $P(B) = 0,3$. Calcúlese:

a) $P(\overline{A} \cap \overline{B})$

b) $P(B \cap \overline{A})$

Nota: $\overline{S}$ denota al suceso complementario del suceso S.

Solución:

a) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 0,3$.
Por ser A y B incompatibles $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0,7$.

b) $P(B \cap \overline{A}) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) = 0,3$

Problema 16.1.5 *(2 puntos)* El consumo familiar diario de electricidad (en kW) en cierta ciudad se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica 1,2 kW. Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 50. Calcúlese:

a) La probabilidad de que la media muestral esté comprendida entre 6 kW y 6,6 kW, si $\mu = 6,3kW$.

b) El nivel de confianza con el que se ha calculado el intervalo de confianza $(6,1; 6,9)$ para la media del consumo familiar diario.

Solución:

a) $\overline{X} \approx N\left(6,3; \dfrac{1,2}{\sqrt{50}}\right) = N(6,3; 0,17)$:
$P(6 < \overline{X} < 6,6) = P\left(\dfrac{6-6,3}{0,17} < Z < \dfrac{6,6-6,3}{0,17}\right) = P(-1,77 < Z < 1,77) = 0,9232$.

b) $2z_{\alpha/2}\frac{1,2}{\sqrt{50}} = 6,9 - 6,1 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 2,36$ Luego el nivel de confianza es del 98 %.

16.2. Modelo 2015 - Opción B

Problema 16.2.1 *(2 puntos)* Se considera el sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ x + ay + az = 1 \\ x + 4ay + z = 2a \end{cases}$$

a) Discútase el sistema según los diferentes valores del a.

b) Resuélvase el sistema en el caso $a = -1$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & a & a & 1 \\ 1 & 4a & 1 & 2a \end{array}\right); \quad |A| = -4a^2 + 6a - 2 = 0 \Longrightarrow a = 1/2, \quad a = 1$$

- Si $a \neq 1/2$ y $a \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a = 1/2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1/2 & 1/2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right); \quad F_1 = F_3 \Longrightarrow$$

  el sistema es compatible indeterminado (tiene infinitas soluciones).
- Si $a = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right); \quad |A| = 0 \text{ y } \left|\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{array}\right| = -1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

  como $\left|\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{array}\right| = -1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3 \Longrightarrow$ el sistema es incompatible (no tiene solución).

b) Si $a = -1$:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ x - y - z = 1 \\ x - 4y + z = -2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 3/4 \\ y = 1/2 \\ z = -3/4 \end{cases}$$

Problema 16.2.2 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = 24x - 15x^2 + 2x^3 + 2$$

a) Determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) Hállense sus extremos relativos y sus puntos de inflexión.

Solución:

a) $f'(x) = 6x^2 - 30x + 24 = 0 \Longrightarrow x = 1,\ x = 4.$

	$(-\infty, 1)$	$(1, 4)$	$(4, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, 1) \cup (4, \infty)$, y es decreciente en el intervalo $(1, 4)$.

b) En $x = 1$ hay un máximo relativo, en $x = 4$ hay un mínimo relativo. $f''(x) = 12x - 30 = 0 \Longrightarrow x = 5/2$ y $f'''(x) = 12 \neq 0 \Longrightarrow f$ tiene un punto de inflexión en $x = 5/2$.

Problema 16.2.3 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \frac{3x^2}{x^2 - 2x - 3}$$

a) Determínense sus asíntotas.

b) Determínese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -1, 5$.

Solución:

a) Asíntotas

- Verticales: $x^2 - 2x - 3 = 0 \Longrightarrow x = -1$ ó $x = 3$
  Si $x = -1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \longrightarrow -1^-} \frac{3x^2}{x^2 - 2x - 3} = \left[\frac{3}{0^+}\right] = +\infty \\ \\ \displaystyle\lim_{x \longrightarrow -1^+} \frac{3x^2}{x^2 - 2x - 3} = \left[\frac{3}{0^-}\right] = -\infty \end{array} \right.$$

  Si $x = 3$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow 3^-} \dfrac{3x^2}{x^2-2x-3} = \left[\dfrac{27}{0^-}\right] = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 3^+} \dfrac{3x^2}{x^2-2x-3} = \left[\dfrac{27}{0^+}\right] = +\infty \end{cases}$$

- Horizontales: $y = 3$

$$\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{3x^2}{x^2-2x-3} = 3$$

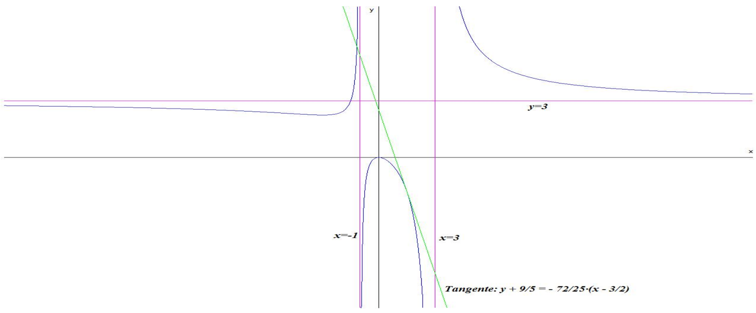
- Oblicuas no hay por haber horizontales.

b) $f(1,5) = -9/5$ y $m = f'(1,5) = -72/25$

$$f'(x) = -\frac{6x(x+3)}{(x^2-2x-3)^2}$$

La ecuación de la recta en su forma punto pendiente es:

$$y + 9/5 = -72/25(x - 3/2)$$

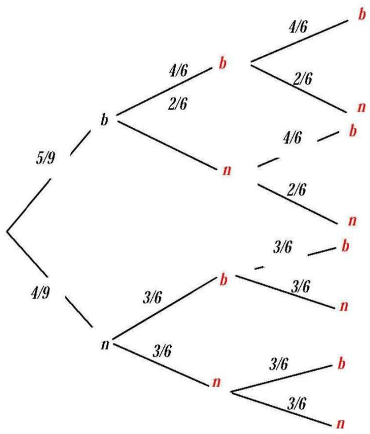


Problema 16.2.4 *(2 puntos)* Una urna contiene 5 bolas blancas y 4 negras, y otra urna contiene 3 bolas blancas y dos negras. Se toma al azar una bola de la primera urna y, sin mirarla, se introduce en la segunda urna. A continuación extraemos consecutivamente, con reemplazamiento, dos bolas de la segunda urna. Hállese la probabilidad de que las dos últimas bolas extraídas sean:

a) Del mismo color.

b) De distinto color.

Solución:



a) $P(\text{mismo color}) = P(2b) + P(2n) = \dfrac{43}{81}$

$P(2b) = \dfrac{5}{9} \cdot \dfrac{4}{6} \cdot \dfrac{4}{6} + \dfrac{4}{9} \cdot \dfrac{3}{6} \cdot \dfrac{3}{6} = \dfrac{29}{81}$

$P(2n) = \dfrac{5}{9} \cdot \dfrac{2}{6} \cdot \dfrac{2}{6} + \dfrac{4}{9} \cdot \dfrac{3}{6} \cdot \dfrac{3}{6} = \dfrac{14}{81}$

b) $P(\text{distinto color}) = 1 - P(\text{mismo color}) = 1 - \dfrac{43}{81} = \dfrac{38}{81}$

Problema 16.2.5 *(2 puntos)* Se ha tomado una muestra aleatoria simple de diez pacientes y se ha anotado el número de días que han recibido tratamiento para los trastornos del sueño que sufren. Los resultados han sido:

290 275 290 325 285 365 375 310 290 300

Se sabe que la duración, en días, del tratamiento se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica 34,5 días.

a) Determínese un intervalo de confianza con un nivel del 95 % para μ.

b) ¿Qué tamaño mínimo debe tener la muestra para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea menor de 10 días, con un nivel de confianza del 95 %?

Solución:

$$N(\mu; 34{,}5)$$

a) $n = 10$, $\overline{x} = 310{,}5$, $\sigma = 34,5$ y $z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96\frac{34{,}5}{\sqrt{10}} = 21{,}383$$

$$IC = (\overline{x} - E, \overline{x} + E) = (289{,}2, 331{,}88)$$

b) Tenemos $z_{\alpha/2} = 1{,}96$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96\frac{34{,}5}{\sqrt{n}} = 10 \Longrightarrow n \geq 45{,}725 \Longrightarrow n = 46$$