## 13.1. Modelo 2012 - Opción A

**Problema 13.1.1** *(3 puntos)* Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones dependiente del parámetro real $k$

$$\left\{\begin{array}{c} x + ky + kz = k \\ x + y + z = k \\ ky + 2z = k \end{array}\right.$$

a) Discútase el sistema según los diferentes valores de $k$.

b) Resuélvase el sistema en el caso en que tenga infinitas soluciones.

c) Resuélvase el sistema para k = 4.

**Solución:**

a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & k & k \\ 1 & 1 & 1 & k \\ 0 & k & 2 & k \end{array}\right); \ |A| = k^2 - 3k + 2 = 0 \Longrightarrow k = 1, \ k = 2$$

- Si $k \neq 1$ y $k \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ n$^o$ de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema compatible determinado (solución única).
- Si $k = 2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right); \ |A| = 0 \ \text{y} \ \left|\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{array}\right| = -1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$\left|\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{array}\right| = -2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Como los rangos son distintos el sistema es incompatible (No tiene solución)

- Si $k = 1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right); \quad F_1 = F_2 \text{ y } \left|\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{array}\right| = 1 \neq 0 \Longrightarrow$$

Rango$(A) = 2 =$Rango$(\overline{A}) <$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ sistema compatible indeterminado (Infinitas soluciones)

b)

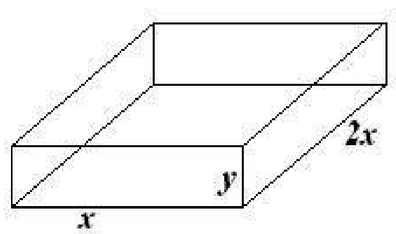
$$\left\{\begin{array}{r} x + y + z = 1 \\ y + 2z = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

c)

$$\left\{\begin{array}{r} x + 4y + 4z = 4 \\ x + y + z = 4 \\ 4y + 2z = 4 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 4 \\ y = 2 \\ z = -2 \end{array}\right.$$

**Problema 13.1.2** *(3 puntos)* Una empresa de productos de limpieza fabrica cajas de cartón con tapa, para comercializar un determinado tipo de detergente. Las cajas son prismas rectos de 9000 $cm^3$ de volumen y base rectangular de largo igual al doble de su anchura. Calcúlense las dimensiones en centímetros (largo, anchura, altura) que ha de tener cada caja para que la superficie de cartón empleada en su fabricación sea mínima.

**Solución:**




$$V = 2x^2y = 9000 \Longrightarrow y = \frac{4500}{x^2}$$

$$S(x, y) = 4x^2 + 6xy \Longrightarrow S(x) = 4x^2 + \frac{27000}{x} = \frac{4x^3 + 27000}{x}$$

$$S'(x) = \frac{8x^3 - 27000}{x^2} = 0 \Longrightarrow x = 15$$

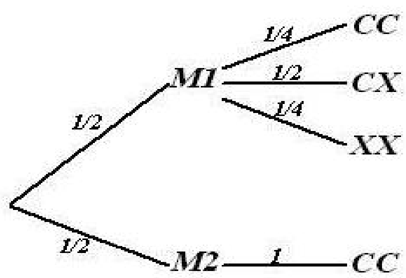
Comprobamos que es un mínimo por la segunda derivada

$$S''(x) = \frac{8(x^3 + 6750)}{x^3} \Longrightarrow S''(15) = 24 > 0$$

Luego se trata de un mínimo en $x = 15$. Las cajas tendrán de dimensiones: $15\,cm$ de ancho, $30\,cm$ de largo y $20\,cm$ de alto.

**Problema 13.1.3** *(2 puntos)* Una bolsa contiene dos monedas equilibradas. Una de las monedas tiene cara y cruz y la otra tiene dos caras. Se elige al azar una moneda de la bolsa y se lanza dos veces consecutivas con independencia, observándose dos caras. ¿Cuál es la probabilidad de que la moneda elegida sea la moneda de dos caras?

**Solución:**




$$P(CC) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{8}, \quad P(CC|M2) = 1$$

$$P(M2|CC) = \frac{P(CC|M2)P(M2)}{P(CC)} = \frac{4}{5}$$

**Problema 13.1.4** *(2 puntos)* Se supone que la concentración de $CO_2$ en el aire de una determinada región, medida en partes por millón (ppm), se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 20 ppm.

a) Calcúlese el número mínimo de observaciones necesarias para que el valor absoluto de la diferencia entre la media de la población y la media muestral sea menor o igual que 2 ppm con un nivel de confianza mayor o igual que el 95 %.

b) Determínese un intervalo de confianza del 95 % para la concentración media de $CO_2$ en el aire de la región si la muestra elegida contiene 121 observaciones y la concentración media muestral es igual a 350 ppm. $CO_2$

**Solución:**

a) Tenemos $E = 2$, $\sigma = 20$ y $z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = 384,16$$

Luego $n = 385$.

b) Tenemos $\overline{x} = 350$, $\sigma = 20$, $n = 121$ y $z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$$IC = \left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (346{,}436, 353{,}564)$$

## 13.2. Modelo 2012 - Opción B

**Problema 13.2.1** *(3 puntos)* Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 3 & a \end{pmatrix}$

a) Calcúlense los valores de $a$ para los cuales no existe la matriz inversa $A^{-1}$.

b) Para $a = 2$, calcúlese la matriz $B = (A^{-1}A^T)^2$.

c) Para $a = 2$, calcúlese la matriz $X$ que satisface la ecuación matricial:

$$AX - A^2 = A^T$$

**Nota.-** $A^T$ representa a la matriz traspuesta de $A$.

**Solución:**

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 3 & a \end{vmatrix} = a^2 - 3 = 0 \Longrightarrow a = \pm\sqrt{3}$$

Si $a = \pm\sqrt{3} \Longrightarrow$ no existe $A^{-1}$.

Si $a \neq \pm\sqrt{3} \Longrightarrow \exists\, A^{-1}$.

b) Si $a = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \left[\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right]^2 = \begin{pmatrix} -7 & -8 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$$

c) Con $a = 2$:

$$AX - A^2 = A^T \Longrightarrow X = A^{-1}(A^T + A^2)$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^2 \right] = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

**Problema 13.2.2** *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si} \quad x < 0 \\ ax^2 + bx + c & \text{si} \quad 0 \le x \le 3 \\ 3 - x & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

a) Calcúlense $a$, $b$ y $c$, para que la función $f$ sea continua en todos los puntos y derivable en $x = 0$.

b) Para $a = 0$, calcúlense $b$, $c$, para que la función $f$ sea continua en todos los puntos y calcúlese el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de $f$ y el eje $OX$.

c) Para $a = b = 1$, $c = 2$, calcúlese la integral definida $\int_{-1}^{3} f(x)\,dx$.

**Solución:**

a) $f$ continua en $x = 0$:

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = 2, \quad \lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = c \Longrightarrow c = 2$$

$f$ continua en $x = 3$:

$$\lim_{x \longrightarrow 3^-} f(x) = 9a + 3b + c, \quad \lim_{x \longrightarrow 3^+} f(x) = 0 \Longrightarrow 9a + 3b + c = 0$$

$f$ derivable en $x = 0$:

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad x < 0 \\ 2ax + b & \text{si} \quad 0 \le x \le 3 \\ -1 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

$$f'(0^-) = 2, \quad f'(0^+) = b \Longrightarrow b = 2$$

$$\begin{cases} c = 2 \\ 9a + 3b + c = 0 \\ b = 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -8/9 \\ b = 2 \\ c = 2 \end{cases}$$

b) Si $a = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+2 & \text{si} \quad x < 0 \\ bx+c & \text{si} \quad 0 \le x \le 3 \\ 3-x & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

$f$ continua en $x = 0$:

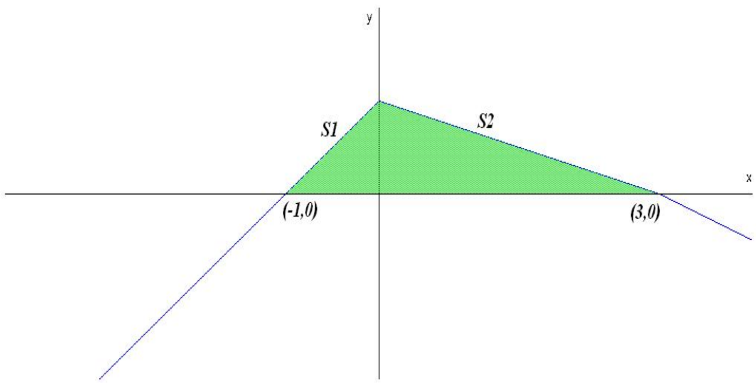
$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = 2, \quad \lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = c \Longrightarrow c = 2$$

$f$ continua en $x = 3$:

$$\lim_{x \longrightarrow 3^-} f(x) = 3b + c, \quad \lim_{x \longrightarrow 3^+} f(x) = 0 \Longrightarrow 3b + c = 0$$

Luego $b = -2/3$ y $c = 2$:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+2 & \text{si} \quad x < 0 \\ -2/3x+2 & \text{si} \quad 0 \le x \le 3 \\ 3-x & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$




$$S_1 = \int_{-1}^{0} (2x+2)\, dx = \left. x^2 + 2x \right]_{-1}^{0} = 1$$

$$S_2 = \int_{0}^{3} (-\frac{2}{3}x + 2)\, dx = \left. -\frac{x^2}{3} + 2x \right]_{0}^{3} = 3$$

$$S = |S_1| + |S_2| = 4\ u^2$$

c) Si $a = b = 1$, $c = 2$:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+2 & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2+x+2 & \text{si} \quad 0 \le x \le 3 \\ 3-x & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{3} f(x)\, dx = \int_{-1}^{0} (2x+2)\, dx + \int_{0}^{3} (x^2+x+2)\, dx =$$

$$x^2+2x\Big]_{-1}^{0}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x\Big]_0^3=1+\frac{39}{2}=\frac{41}{2}$$

**Problema 13.2.3** *(2 puntos)* Una escuela de natación ofrece cursos de iniciación y perfeccionamiento en las categorías pre-benjamín (7-8 años), benjamín (9-10 años) y alevín (11-12 años). La siguiente tabla contiene la información con el número de nadadores matriculados en cada curso:

| | Pre − benjamín | Benjamín | Alevín | Total |
|---|---|---|---|---|
| Iniciación | 120 | 70 | 10 | 200 |
| Perfeccionamiento | 40 | 90 | 150 | 280 |
| Total | 160 | 160 | 160 | 480 |

Se elige al azar un nadador de la escuela.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que esté en el curso de iniciación?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que esté en el curso de perfeccionamiento o bien sea alevín?

c) Si el nadador elegido es un benjamín, ¿cuál es la probabilidad de que esté en el curso de perfeccionamiento?

d) Si el nadador elegido está en el curso de iniciación, ¿cuál es la probabilidad de que sea benjamín?

**Solución:**

a)
$$P(\text{iniciación})=\frac{200}{480}=\frac{5}{12}$$

b)
$$P(\text{perfeccionamiento}\cup\text{alevín})=\frac{280}{480}+\frac{160}{480}-\frac{150}{480}=\frac{29}{48}$$

c)
$$P(\text{perfeccionamiento}|\text{benjamín})=\frac{9}{16}$$

d)
$$P(\text{benjamín}|\text{iniciación})=\frac{7}{20}$$

**Problema 13.2.4** *(2 puntos)* Se supone que la tensión de un tipo de línea eléctrica se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media $\mu=100V$ y desviación típica $\sigma=10V$. ¿Cuál es la distribución de la tensión media de cuatro líneas eléctricas de ese tipo, tomadas al azar y con independencia?

**Solución:**

$$\overline{X}\approx N\left(\overline{X},\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=N\left(100,\frac{10}{\sqrt{4}}\right)=N(100,5)$$