12.1. Modelo 2011 - Opción A

Problema 12.1.1 *(3 puntos)* Un estudiante ha gastado un total de 48 euros en la compra de una mochila, un bolígrafo y un libro. Si el precio de la mochila se redujera a la sexta parte, el del bolígrafo a la tercera parte y el del libro a la septima parte de sus respectivos precios iniciales, el estudiante pagaría un total de 8 euros por ellos. Calcular el precio de la mochila, del bolígrafo y del libro, sabiendo que la mochila cuesta lo mismo que el total del bolígrafo y el libro.

Solución:

Sea x : precio de la mochila, y : precio del bolígrafo y z : precio del libro.

$$\left\{\begin{array}{c} x+y+z=48 \\ \dfrac{1}{6}x+\dfrac{1}{3}y+\dfrac{1}{7}z=8 \\ x=y+z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x+y+z=48 \\ 7x+14y+6z=336 \\ x-y-z=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x=24 \\ y=3 \\ z=21 \end{array}\right.$$

Problema 12.1.2 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x)=2x^3+ax^2+bx-6$$

a) Calcúlense a y b para que la función f tenga un máximo relativo en $x=1$ y un mínimo relativo en $x=2$

b) Para $a=b=0$, calcúlese el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f y la recta de ecuación $y=8x-6$.

Solución:

a) $f'(x) = 6x^2 + 2ax + b$.

f tenga un máximo relativo en $x = 1 \Longrightarrow f'(1) = 0 \Longrightarrow 2a + b = -6$

f tenga un mínimo relativo en $x = 2 \Longrightarrow f'(2) = 0 \Longrightarrow 4a + b = -24$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2a + b = -6 \\ 4a + b = -24 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = -9 \\ b = 12 \end{array} \right. \Longrightarrow f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 6$$

b) $a = b = 0 \Longrightarrow f(x) = 2x^3 - 6$ y $g(x) = 8x - 6$:

$f(x) = g(x) \Longrightarrow 2x^3 - 6 = 8x - 6 \Longrightarrow 2x^3 - 8x = 0 \Longrightarrow x = 0, \ \ x = \pm 2$

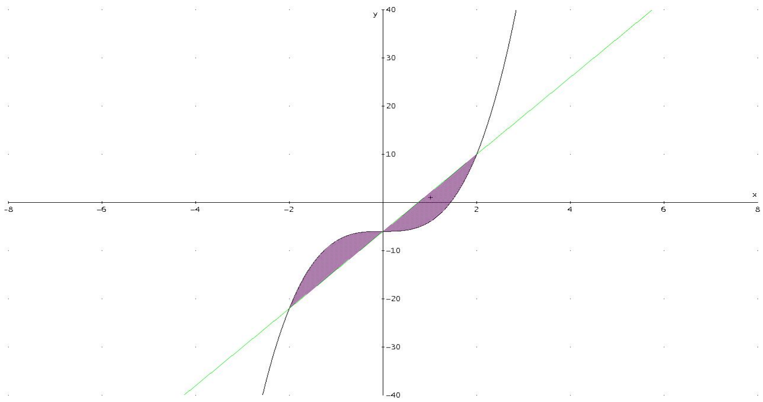
Límites de integración: $[-2, 0]$, $[0, 2]$

$$F(x) = \int (2x^3 - 8x)\, dx = \frac{x^4}{2} - 4x^2$$

$$S_1 = \int_{-2}^{0} (2x^3 - 8x)\, dx = F(0) - F(-2) = 8$$

$$S_2 = \int_{0}^{2} (2x^3 - 8x)\, dx = F(2) - F(0) = -8$$

$$S = |S_1| + |S_2| = 16\ u^2$$



Problema 12.1.3 *(2 puntos)* Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que la probabilidad de que ambos ocurran simultáneamente es igual a $\dfrac{1}{6}$ y la probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos es igual a $\dfrac{7}{12}$. Se sabe además que $P(A|B) = \dfrac{1}{2}$.

a) Calcúlese la probabilidad de que ocurra A ó B.

b) Calcúlese la probabilidad de que ocurra A.

Solución:

$$P(A\cap B)=\frac{1}{6},\quad P(\overline{A\cup B})=\frac{7}{12},\quad P(A|B)=\frac{1}{2}$$

a) $P(A\cup B)=1-P(\overline{A\cup B})=1-\dfrac{7}{12}=\dfrac{5}{12}$.

b)
$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\Longrightarrow P(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A|B)}=\frac{1/6}{1/2}=\frac{1}{3}$$
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Longrightarrow$$
$$P(A)=P(A\cup B)+P(A\cap B)-P(B)=\frac{5}{12}+\frac{1}{6}-\frac{1}{3}=\frac{1}{4}$$

Problema 12.1.4 *(2 puntos)* Se supone que el nivel de glucosa en sangre de los individuos de la población (medido em miligramos por decílitro) se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica 35 mg/dl. ¿Cuál es el tamaño muestral mínimo que permite garantizar que el valor absoluto de la diferencia entre la media muestral y μ es menor que 20 mg/dl con una probabilidad mayor o igual a 0,98?

Solución:

La distribución de la media es: $N(\mu,35)$ y $z_{\alpha/2}=2{,}325$

$$E=z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Longrightarrow n=\left(z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{E}\right)^2=16{,}55$$

Como n tiene que ser un número natural $n=17$

12.2. Modelo 2011 - Opción B

Problema 12.2.1 *(3 puntos)* Se consideran las matrices

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1\\ -1 & a & 0\\ 0 & -6 & -1\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} -2\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$$

a) Calcúlense los valores de a para los cuales la matriz A no tiene inversa.

b) Para $a=2$, calcúlese la matriz inversa A^{-1}.

c) Para $a=2$, calcúlese, si existe, la matriz X que satisface $AX=B$.

Solución:

a) $|A| = 5 - a^2 = 0 \Longrightarrow a = \pm\sqrt{5}$:

Si $a = \pm\sqrt{5} \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow A$ no tiene inversa.

Si $a \neq \pm\sqrt{5} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow A$ si tiene inversa.

b) Para $a = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -5 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 5 \end{pmatrix}$$

c) $AX = B \Longrightarrow X = A^{-1}B$:

$$X = \begin{pmatrix} -2 & -5 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Problema 12.2.2 *(3 puntos)* Una empresa produce cable de fibra óptica, que vende a un precio de x euros por metro. Se estima que la venta diaria de cable (en miles de metros) se expresa en términos del precio mediante la función:

$$D(x) = \frac{6}{x^2 + 1}$$

a) Obténgase la función $I(x)$ que determina los ingresos diarios de la empresa en función del precio x.

b) Calcúlese el precio x que ha de fijarse para que el ingreso diario sea máximo y calcúlese dicho ingreso máximo.

c) Detérminense las asíntotas de $I(x)$ y esbócese la gráfica de la función $I(x)$.

Solución:

a)

$$I(x) = \frac{6000x}{x^2 + 1}$$

b)

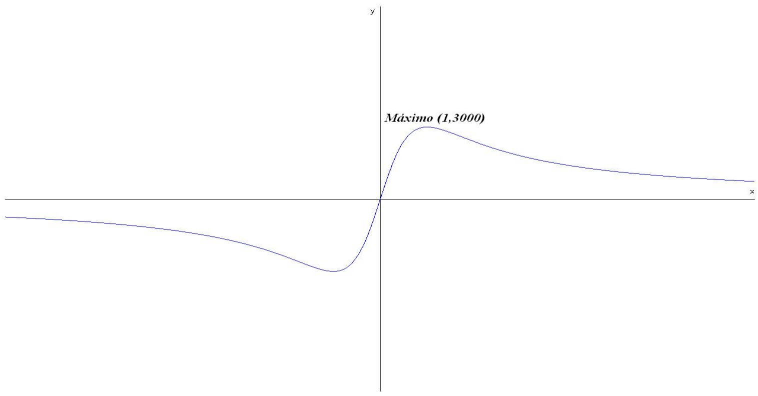
$$I'(x) = \frac{6000(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
$I'(x)$	$-$	$+$	$-$
$I(x)$	decreciente	creciente	decreciente

La función presenta un máximo en el punto de abcisa $x = 1$ lo que supone un ingreso máximo: $I(1) = 3000$ euros.

c) Asíntotas:

- Verticales: No hay, el denominador no se anula nunca.
- Horizontales:
$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{6000x}{x^2+1} = 0 \Longrightarrow y = 0$$
- Oblicuas: No hay al haber horizontales.



Problema 12.2.3 *(2 puntos)* En una cierta población, la probabilidad de que un habitante elegido al azar siga una dieta de adelgazamiento es igual a 0,2. Entre los habitantes que siguen una dieta de adelgazamiento, la probabilidad de que uno de ellos elegido al azar practique deporte regularmente es igual a 0,6. Entre los habitantes que no siguen dieta de adelgazamiento, la probabilidad de que uno de ellos elegido al azar practique deporte regularmente es igual a 0,3. Se elige al azar un habitante de la población.

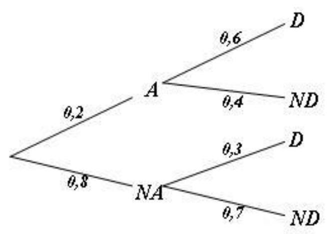
a) Calcúlese la probabilidad de que practique deporte regularmente.

b) Si se sabe que dicho habitante practica deporte regularmente, ¿cuál es la probabilidad de que esté siguiendo una dieta de adelgazamiento?

Solución:

a) $P(D) = 0,2 \cdot 0,6 + 0,8 \cdot 0{,}3 = 0,36$

b)
$$P(A|D) = \frac{P(D|A)P(A)}{P(D)} = \frac{0,6 \cdot 0,2}{0,36} = 0{,}333$$



Problema 12.2.4 *(2 puntos)* Se considera una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica $\sigma = 2$. Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 25 y se obtiene una media muestral igual a 12.

a) Determínese un intervalo de confianza al 90 % para estimar la media de la variable aleatoria.

b) Determínese el tamaño mínimo que ha de tener la muestra para que el valor absoluto de la diferencia entre la media de la población y la media muestral sea menor o igual que 0,1 con un nivel de confianza de al menos el 95 %.

Solución:

a) $N(\mu, 2)$, $n = 25$, $\overline{X} = 12$ y $z_{\alpha/2} = 1,645$:

$$IC = \left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (11,342; 12,658)$$

b) $z_{\alpha/2} = 1,645$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = \left(z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{E}\right)^2 = 1536,64$$

Como n tiene que ser un número natural $n = 1537$