11.1. Modelo 2010 - Opción A

Problema 11.1.1 *(3 puntos)* Se considera el sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real k:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & ky+ & z= & 1\\ & 2y+ & kz= & 2\\ x+ & y+ & z= & 1\end{array}\right.$$

a) Discútase el sistema para los distintos valores de k.

b) Resúelvase el sistema para el caso en que tenga infinitas soluciones.

c) Resúelvase el sistema para $k = 3$.

Solución:

a)

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1 & 1\\ 0 & 2 & k & 2\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{array}\right)\Longrightarrow |A| = k^2 - k = 0 \Longrightarrow k = 0,\ \ k = 1$$

Si $k \neq 0$ y $k \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A)$ =Rango$(\overline{A}) = 3 =$n^{o} de incógnitas, luego en este caso el sistema será compatible determinado.

Si $k = 0$

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{array}\right)\Longrightarrow \left|\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{array}\right| = 2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Como $\left|\begin{array}{cc} 0 & 1\\ 2 & 0\end{array}\right| = -2 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2$. Luego el sistema es Incompatible.

Si $k = 1$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

La primera fila y la tercera son iguales y como $\left| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{array} \right| = 2 \neq 0 \Longrightarrow$ el Rango(A) =Rango$(\overline{A}) = 2 <$ nº de incógnitas y el sistema es compatible indeterminado.

b) Si $k = 1$ el sistema es compatible indeterminado:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & y+ & z = & 1 \\ & 2y+ & z = & 2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -\dfrac{1}{2}\lambda \\ \\ y = 1 - \dfrac{1}{2}\lambda \\ \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

c) Si $k = 3$ el sistema es compatible determinado:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & 3y+ & z = & 1 \\ & 2y+ & 3z = & 2 \\ x+ & y+ & z = & 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1/3 \\ y = 0 \\ z = 2/3 \end{array} \right.$$

Problema 11.1.2 *(3 puntos)* Se considera la curva de ecuación cartesiana:

$$y = x^2$$

a) Calcúlense las coordenadas del punto en el que la recta tangente a la curva propuesta es paralela a la bisectriz del primer cuadrante.

b) Calcúlese el área del recinto plano acotado limitado por las gráficas de la curva propuesta, la recta tangente a dicha curva en el punto $P(1, 1)$ y el eje OX.

Solución:

a) $y = x \Longrightarrow m = 1$:

$$y = x^2 \Longrightarrow y' = 2x = 1 \Longrightarrow 2a = 1 \Longrightarrow a = \frac{1}{2}$$

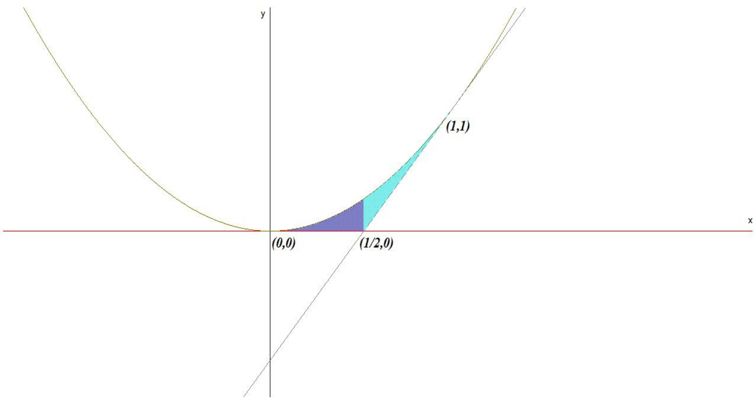
El punto es el $(a, f(a)) = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4} \right)$.

b) Calculamos la recta tangente a la curva en el punto $(a,b) = (1,1)$:

$$m = f'(1) = 2 \Longrightarrow y - 1 = 2(x-1) \Longrightarrow 2x - y - 1 = 0$$

Como se puede apreciar en la figura el área buscada consta de dos partes, por un lado será el área entre la función y el eje de abcisas en el intervalo $(0, 1/2)$ y por otra parte el área encerrada por las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = 2x - 1$ en el intervalo $(1/2, 1)$

- $$S_1 = \int_0^{1/2} x^2\, dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{1/2} = \frac{1}{24}\ u^2$$
- $$S_1 = \int_{1/2}^{1} (x^2 - 2x + 1)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x\right]_{1/2}^{1} = \frac{1}{24}\ u^2$$
- $$S = |S_1| + |S_2| = \frac{1}{12}\ u^2$$



Problema 11.1.3 *(2 puntos)* Según un cierto estudio, el 40 % de los hogares europeos tienen contratado acceso a internet, el 33 % tiene contratada televisión por cable, y el 20 % disponen de ambos servicios. Se seleciona un hogar europeo al azar.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sólo tenga contratada la televisión por cable?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga contratado ninguno de los dos servicios?

Solución:

Lamamos $A = \{\text{Tiene contratado internet}\}$ y $B = \{\text{Tiene contratado TV por cable}\}$

$$P(A) = 0,4, \quad P(B) = 0,33, \quad P(A \cap B) = 0,2$$

a)

$$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0,33 - 0,2 = 0,13$$

b)

$$P(\text{Ninguno}) = 1 - P(\text{Alguno}) = 1 - P(A \cup B) =$$

$$1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] = 1 - 0,53 = 0,47$$

Problema 11.1.4 *(2 puntos)* Se supone que la duración de una bombilla fabricada por una cierta empresa se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media 900 horas y desviación típica 80 horas. La empresa vende 1000 lotes de 100 bombillas cada uno. ¿En cuántos lotes puede esperarse que la duración media de las bombillas que componen el lote sobrepase 910 horas?

Solución:

La distribución de la media en un lote:

$$N(900, 80), \quad n = 100 \Longrightarrow N(900, 80/\sqrt{100}) = N(200, 8)$$

$$P(\overline{X} > 910) = P\left(Z > \frac{910 - 900}{8}\right) =$$

$$1 - P(Z < 1{,}25) = 1 - 0,8943502263 = 0,1056497736$$

La probabilidad calculada es la de que la media de un lote sobrepase las 910 horas y, como tenemos 1000 lotes, el número de lotes en los que esperamos que se sobrepasen las 910 horas será de $1000 \cdot 0,1056497736 \simeq 105$ lotes

11.2. Modelo 2010 - Opción B

Problema 11.2.1 *(3 puntos)* Una empresa de instalaciones dispone de 195 kg de cobre, 20 kg de titanio y 14 de aluminio. Para fabricar 100 metros de cable de tipo A se necesitan 10 kg de cobre, 2 kg de titanio y 1 kg de aluminio. Para fabricar 100 metros de cable de tipo B se necesitan 15 kg de cobre, 1 kg de titanio y 1 kg de aluminio. El beneficio que obtiene la empresa por cada 100 metros de cable de tipo A fabricados es igual a 1500 euros, y por cada 100 metros de cable de tipo B es igual a 1000 euros. Calcúlese los metros de cable de cada tipo que han de fabricarse para maximizar el beneficio y determínese dicho beneficio máximo.

Solución:

Sea x cantidad de cable tipo A.

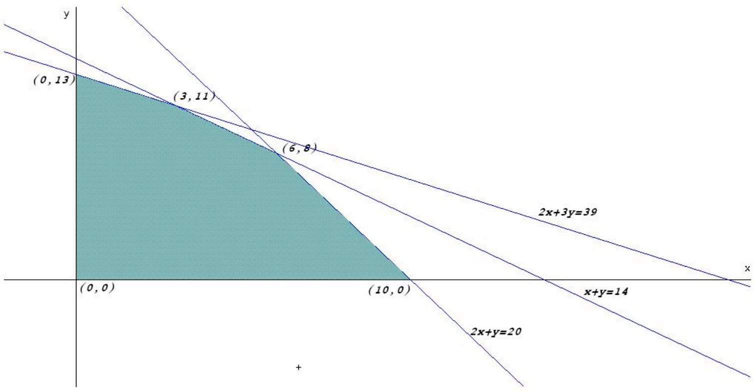
Sea y cantidad de cable tipo B.

	Cobre	Titánio	Aluminio	Beneficio
A	10	2	1	1500
B	15	1	1	1000
Total	195	20	14	

La función objetivo: $z(x,y) = 1500x + 1000y$

Las restricciones serán:

$$\left\{\begin{array}{c} 10x + 15y \le 195 \\ 2x + y \le 20 \\ x + y \le 14 \\ x, y \ge 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} 2x + 3y \le 39 \\ 2x + y \le 20 \\ x + y \le 14 \\ x, y \ge 0 \end{array}\right.$$



$$\begin{array}{rcl} z(0,13) & = & 13000 \\ z(3,11) & = & 15500 \\ z(6,8) & = & 17000 \\ z(10,0) & = & 15000 \end{array}$$

Luego para obtener el máximo beneficio se deberan fabricar 600 metros del tipo A y 800 metros del tipo B, con un beneficio de 17000 euros.

Problema 11.2.2 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

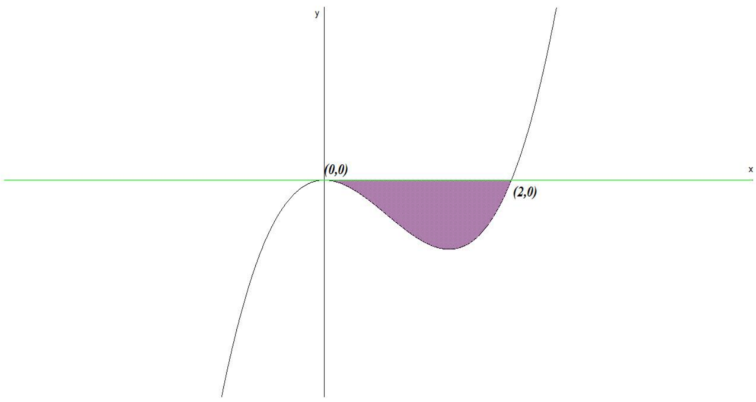
$$f(x) = ax^3 + bx^2 + c, \quad a, b, c \in R$$

a) ¿Qué valores deben tomar a, b y c para que la gráfica de f pase por el punto $(0,0)$ y además tenga un máximo relativo en el punto $(1,2)$?

b) Para $a = 1$, $b = -2$ y $c = 0$, determínense los puntos de corte de f con los ejes de coordenadas.

c) Para $a = 1$, $b = -2$ y $c = 0$, calcúlese el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de la función f y el eje OX.

Solución:



a) Tenemos:

- Pasa por el punto $(0,0) \Longrightarrow f(0) = c = 0$
- Tiene un máximo relativo en el punto $(1,2) \Longrightarrow f'(1) = 0$ y $f(1) = 2$:

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx \Longrightarrow 3a + 2b = 0, \text{ y } a + b + c = 2$$

$$\begin{cases} a + b + c = 2 \\ 3a + 2b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 6 \\ c = 0 \end{cases} \Longrightarrow f(x) = -4x^3 + 6x^2$$

b) Tenemos que $f(x) = x^3 - 2x^2$

Con el eje OX : $f(x) = 0 \Longrightarrow x^3 - 2x^2 = 0 \Longrightarrow x = 0,\ x = 2 \Longrightarrow (0,0),\ (2,0)$.

Con el eje OY : $x = 0 \Longrightarrow f(0) = 0,\ (0,0)$

c) Luego los límites de integración serían los intervalos $[0,2]$:

$$F(x) = \int (x^3 - 2x^2)\, dx = \frac{x^4}{4} - 2\frac{x^3}{3}$$

$$S = |F(2) - F(0)| = \left|-\frac{4}{3}\right| = \frac{4}{3}\ u^2$$

Problema 11.2.3 *(2 puntos)* Sean A y B dos sucesos aleatorios tales que:

$$P(A) = \frac{3}{4},\quad P(B) = \frac{1}{2},\quad P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{1}{20}$$

Calcular:

$$P(A \cup B),\quad P(A \cap B),\quad P(\overline{A}|B),\quad P(\overline{B}|A)$$

Solución:

- $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(\overline{A \cup B}) = 1 - \dfrac{1}{20} \Longrightarrow P(\overline{A \cup B}) = \dfrac{19}{20}$
- $P(\overline{A \cup B}) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Longrightarrow P(A \cap B) = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{19}{20} = \dfrac{3}{10}$
- $P(\overline{A}|B) = \dfrac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{1/2 - 3/10}{1/2} = \dfrac{2}{5}$
- $P(\overline{B}|A) = \dfrac{P(\overline{B} \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(A) - P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{3/4 - 3/10}{3/4} = \dfrac{3}{5}$

Problema 11.2.4 *(2 puntos)* La temperatura corporal de cierta especie de aves se puede aproximar mediante una variable aleatoria con distribución normal de media 40,5ºC y desviación típica 4,9ºC. Se elige una muestra aleatoria simple de 100 aves de esa especie. Sea $\overline{X}$ la media muestral de las temperaturas observadas.

a) ¿Cuáles son la media y la varianza de $\overline{X}$

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la temperatura media de dicha muestra esté comprendida entre 39,9ºC y 41,1ºC?

Solución:

a) $N(40{,}5; 4{,}9)$, $n = 100$ entonces $\overline{X}$ se distribuye según una normal $N(40{,}5, 4{,}9/\sqrt{100}) = N(40{,}5; 0{,}49)$ de media 40,5ºC y desviación típica 0,49ºC, luego la varianza será de $0,49^2 = 0,2401$ ºC.

b)

$$P\left(39,9 < \overline{X} < 41,1\right) = P\left(\frac{39,9 - 40,5}{0,49} < \overline{X} < \frac{41,1 - 40,5}{0,49}\right) =$$

$$P\left(-1,22 < Z < 1,22\right) = P(Z < 1,22) - P(Z < -1,22) =$$

$$2P(Z < 1,22) - 1 = 0,7775351250$$