10.1. Modelo 2009 - Opción A

Problema 10.1.1 *(3 puntos)* Se considera la matriz dependiente del parámetro real k:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & k \\ k & 1 & k \end{pmatrix}$$

a) Determínese los valores de k para los cuales A tiene inversa.

b) Para $k = 2$, calcúlese (si existe) A^{-1}.

c) Para $k = 1$, calcúlese $(A - 2A^T)^2$.

Nota: La notificación A^T representa a la matriz transpuesta de A.

Solución:

a)

$$|A| = k^2 - k \Longrightarrow k = 1, \;\; k = 0$$

Si $k \neq 0$ y $k \neq 1 \Longrightarrow \exists A^{-1}$

Si $k = 0$ o $k = 1 \Longrightarrow$ No existe A^{-1}

b) Si $k = 2$ la inversa existe:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1/2 & 3/2 & -1 \end{pmatrix}$$

c) Si $k = 1$:

$$(A-2A^T)^2 = \left(\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 10.1.2 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx; \quad a, b \in R$$

a) ¿Qué valores deben tomar a y b para que f tenga un máximo relativo en el punto $P(1, 4)$?

b) Para $a = -2$, $b = -8$, determínense los puntos de corte de la gráfica de f con los ejes de coordenadas y determínense los puntos de inflexión de dicha gráfica.

c) Para $a = -2$, $b = -8$, calcúlese el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f y el eje OX.

Solución:

a) $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ para que f tenga un máximo relativo en $P(1, 4)$ tiene que ocurrir:

$$\left\{\begin{array}{l} f'(1) = 0 \Longrightarrow 2a + b + 3 = 0 \\ f(1) = 4 \Longrightarrow a + b - 3 = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -6 \\ b = 9 \end{array}\right.$$

La función es: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

b) Si $a = -2$ y $b = -8 \Longrightarrow f(x) = x^3 - 2x^2 - 8x$

- Puntos de corte:

$$\left\{\begin{array}{l} f(0) = 0 \Longrightarrow (0, 0) \\ f(x) = 0 \Longrightarrow x^3 - 2x^2 - 8x = 0 \Longrightarrow (0, 0), \ (4, 0), \ (-2, 0) \end{array}\right.$$

- Puntos de Inflexión:

$$f'(x) = 3x^2 - 4x - 8, \quad f''(x) = 6x - 4 = 0 \Longrightarrow x = \frac{2}{3}$$

Como $f''(x) = 6 \Longrightarrow f''(2/3) = 6 \neq 0 \Longrightarrow$ el punto$(2/3, -160/27)$ es un punto de inflexión. Otra manera de comprobarlo es:

	$(-\infty, 2/3)$	$(2/3, +\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa	cóncava

En el punto de abcisa $x = 2/3$ la función pasa de ser convexa a ser cóncava y además hay continuidad en ese punto, lo que quiere decir que, se trata de un punto de Inflexión.

c) Si $a = -2$ y $b = -8 \Longrightarrow f(x) = x^3 - 2x^2 - 8x$

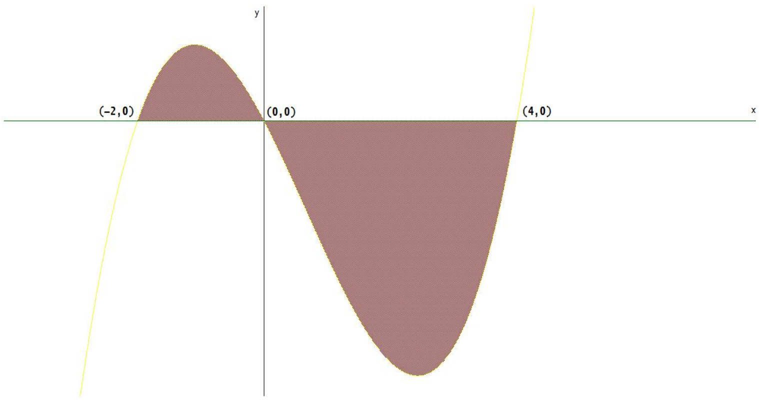
$$x^3 - 2x^2 - 8x = 0 \Longrightarrow x = -2, \quad x = 0, \quad x = 4$$

Los límites de integración serán de $x = -2$ a $x = 0$ y de $x = 0$ a $x = 4$.

$$S_1 = \int_{-2}^{0} (x^3 - 2x^2 - 8x)\,dx = \left.\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{8x^2}{2}\right]_{-2}^{0} = \frac{20}{3}$$

$$S_2 = \int_{0}^{4} (x^3 - 2x^2 - 8x)\,dx = \left.\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{8x^2}{2}\right]_{0}^{4} = -\frac{128}{3}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{148}{3}\,u^2$$



Problema 10.1.3 *(2 puntos)* Calcúlese la probabilidad de cada uno de los sucesos siguientes:

a) Obtener dos caras y una cruz en el lanzamiento de tres monedas equilibradas e indistinguibles.

b) Obtener una suma de puntos igual a seis o siete en el lanzamiento de dos dados de seis caras equilibrados e indistinguibles.

Solución:

a) $P(\text{ dos caras y una cruz}) = P(CCX) + P(CXC) + P(XCC) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$

b)

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Tenemos:

$$P(\text{Suma}\,6) = \frac{5}{36}$$

$$P(\text{Suma}\,7) = \frac{1}{6}$$

$$P(6 \text{ o } 7) = \frac{11}{36}$$

Problema 10.1.4 *(2 puntos)* Se supone que el peso de los niños recién nacidos en una cierta región es una variable aleatoria con distribución normal de media 3,25 kg y desviación típica 0,8 kg. Se elige aleatoriamente una muestra de 64 niños recién nacidos en esa región. Sea $\overline{X}$ la media muestral de los pesos observados.

a) ¿Cuáles son la media y la desviación típica de $\overline{X}$?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el peso medio de la muestra esté comprendido entre 3,3 kg y 3,5 kg?

Solución:

Tenemos $N(3{,}25, 0{,}8)$, $n = 64$

a) $\overline{X} = 3{,}25$, $\sigma = \dfrac{0{,}8}{\sqrt{64}} = 0{,}1 \Longrightarrow N(3{,}25; 0{,}1)$

b)

$$P(3{,}3 \le \overline{X} \le 3{,}5) = P\left(\frac{3{,}3 - 3{,}25}{0{,}1} \le Z \le \frac{3{,}5 - 3{,}25}{0{,}1}\right) =$$

$$P(0{,}5 \le Z \le 2{,}5) = P(Z \le 2{,}5) - P(Z \le 0{,}5) = 0{,}9938 - 0{,}6915 = 0{,}3023$$

10.2. Modelo 2009 - Opción B

Problema 10.2.1 *(3 puntos)* Un hotel adquirió un total de 200 unidades entre almohadas, mantas y edredones, gastando para ello un total de 7500 euros. El precio de una almohada es de 16 euros, el de una manta 50 euros y el de un edredón 80 euros. Además, el número de almohadas compradas es igual al número de mantas más el número de edredones. ¿Cuántas almohadas, mantas y edredones ha comprado el hotel?

Solución:

LLamamos x al nº de almohadas, y al nº de mantas y z al nº de edredones.

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & z= & 200 \\ 16x+ & 50y+ & 80z= & 7500 \\ x- & y- & z= & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=100 \\ y=70 \\ z=30 \end{array}\right.$$

Problema 10.2.2 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x)=\left\{\begin{array}{ccc} x^2 & \text{si} & x<2 \\ x+a & \text{si} & 2\le x\le 5 \\ -x^2+5x+b & \text{si} & x>5 \end{array}\right. \qquad (a,b\in R)$$

a) Calcúlense los valores de a y b para que la f se continua en $x=2$ y en $x=5$.

b) Para $a=1$ y $b=6$, calcúlense las derivadas $f'(1)$ y $f'(7)$.

c) Para $a=1$ y $b=6$, calcúlese la integral definida $\displaystyle\int_3^6 f(x)dx$

Solución:

a)
- En $x=2$

$$\lim_{x\longrightarrow 2^-} f(x)=\lim_{x\longrightarrow 2} x^2=4$$

$$\lim_{x\longrightarrow 2^+} f(x)=\lim_{x\longrightarrow 2} (x+a)=2+a$$

Luego $4=2+a\Longrightarrow a=2$.

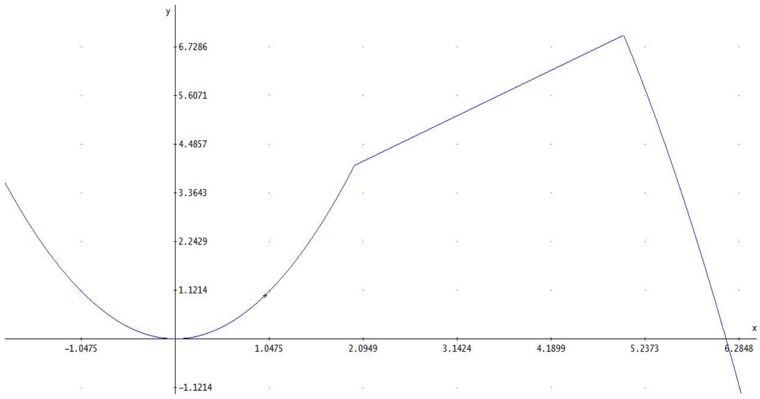
- En $x=5$

$$\lim_{x\longrightarrow 5^-} f(x)=\lim_{x\longrightarrow 5} (x+a)=5+a$$

$$\lim_{x\longrightarrow 5^+} f(x)=\lim_{x\longrightarrow 5} (-x^2+5x+b)=b$$

Luego $5+a=b\Longrightarrow a-b=-5$.

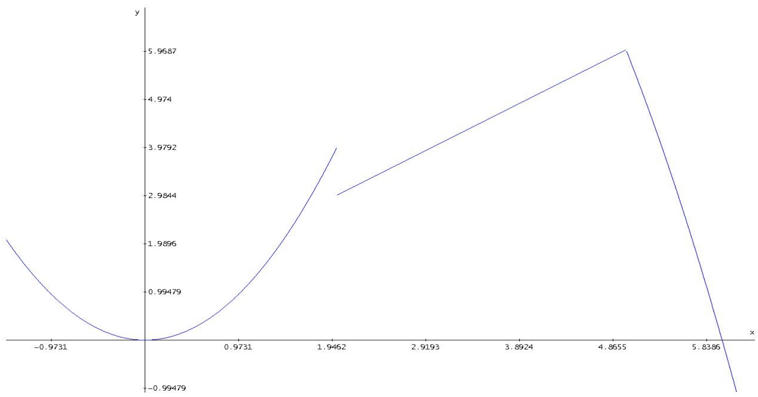
- $$\left\{\begin{array}{l} a=2 \\ a-b=-5 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=2 \\ b=7 \end{array}\right.$$



b) Si $a = 1$ y $b = 6$ tenemos:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x < 2 \\ x+1 & \text{si} \quad 2 \le x \le 5 \\ -x^2+5x+6 & \text{si} \quad x > 5 \end{cases} \Longrightarrow$$

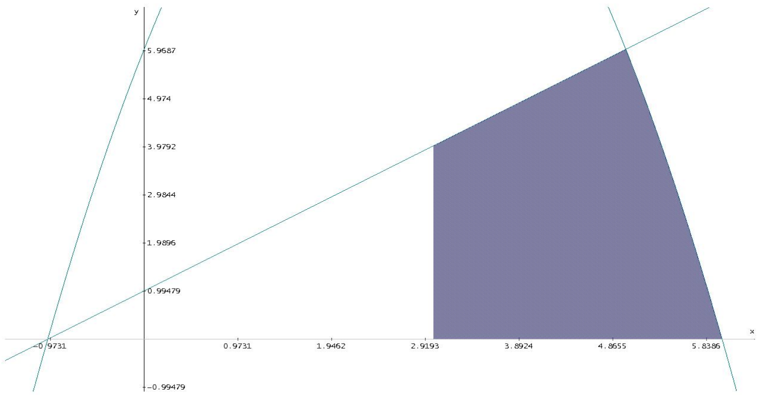
$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x < 2 \\ 1 & \text{si} \quad 2 \le x \le 5 \\ -2x+5 & \text{si} \quad x > 5 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f'(1) = 2 \\ f'(7) = -9 \end{cases}$$



c) Si $a = 1$ y $b = 6$

$$\int_3^6 f(x) = \int_3^5 f(x) + \int_5^6 f(x) = \int_3^5 (x-1)\,dx + \int_5^6 (-x^2+5x+6)\,dx =$$

$$\left.\frac{x^2}{2} - x\right]_3^5 + \left.\frac{-x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} + 6x\right]_5^6 = \frac{55}{6}$$



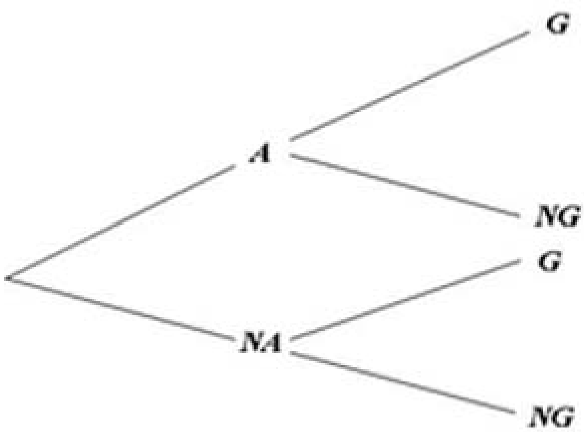
Problema 10.2.3 *(2 puntos)* La probabilidad de que un vehículo de una cierta compañía de coches tenga un accidente es igual a 0,2. Si uno de los vehículos sufre un accidente, la probabilidad de que necesite la asistencia de una grúa es igual a 0,85. Por otra parte, la probabilidad de que uno de los vehículos necesite la asistencia de una grúa sin haber tenido un accidente es igual a 0,1.

a) Se elige al azar un vehículo de dicha compañía, ¿cuál es la probabilidad de que necesite la asistencia de una grúa?

b) Si el vehículo elegido ha necesitado la asistencia de una grúa, ¿cuál es la probabilidad de que no haya sido por causa de un accidente?

Solución:

LLamamos A al suceso accidente, NA al suceso no hay accidente, G al suceso necesita grúa y NG al suceso no necesita grúa.



a)

$$P(G) = P(G|A)\cdot P(A)+P(G|NA)\cdot P(NA) = 0,2\cdot 0,85+0,8\cdot 0,1 = 0,25$$

b)

$$P(NA|G) = \frac{P(G|NA)\cdot P(NA)}{P(G)} = \frac{0,1\cdot 0,8}{0,25} = 0,32$$

Problema 10.2.4 *(2 puntos)* Se han elegido al azar 10 televisores de un taller de electrónica y se ha anotado el número de horas que se han necesitado para su reparación. Los resultados han sido:

$$7,\ 5,\ 8,\ 2,\ 4,\ 7,\ 4,\ 1,\ 6,\ 6$$

Se supone que el número de horas de reparación de este tipo de televisores es una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica 1,5 horas.

a) Determínese un intervalo de confianza del 90 % para el tiempo medio de reparación.

b) ¿Que tamaño debe tener la muestra para que el error máximo de la estimación sea 0,5 horas con el mismo nivel de confianza?

Solución:

a)

$$N(\mu; 1{,}5)\ \ n = 10,\ \ \overline{X} = 5,\ \ z_{\alpha/2} = 1,645$$

$$IC = \left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (4{,}21707987; 5{,}780292012)$$

b)

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = 24{,}354225$$

El tamaño mínimo de la muestra tiene que ser $n = 25$.