UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
PRUEBA DE ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO

Curso **2014-2015**

MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

INSTRUCCIONES Y CRITERIOS GENERALES DE CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder a las cuestiones de la opción elegida. Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora científica, siempre que no disponga de capacidad de representación gráfica o de cálculo simbólico.

CALIFICACIÓN: Cada pregunta se valorará sobre 2 puntos.

TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Calcúlese A^{15} e indíquese si la matriz A tiene inversa.

b) Calcúlese el determinante de la matriz $(B \cdot A^t \cdot B^{-1} - 2 \cdot Id)^3$.

Nota: A^t denota la matriz traspuesta de A. Id es la matriz identidad de orden 2.

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)
Un distribuidor de aceite acude a una almazara para comprar dos tipos de aceite, A y B. La cantidad máxima que puede comprar es de 12.000 litros en total. El aceite de tipo A cuesta 3 euros/litro y el de tipo B cuesta 2 euros/litro. Necesita adquirir al menos 2.000 litros de cada tipo de aceite. Por otra parte, el coste total por compra de aceite no debe ser superior a 30.000 euros. El beneficio que se conseguirá con la venta del aceite será de un 25 % sobre el precio que ha pagado por el aceite de tipo A y de un 30 % sobre el precio que ha pagado por el aceite de tipo B. ¿Cuántos litros de cada tipo de aceite se deberían adquirir para maximizar el beneficio? Obténgase el valor del beneficio máximo.

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = 4x^3 - ax^2 - ax + 2, \quad a \in \mathbb{R}$.

a) Determínese el valor del parámetro real a para que la función alcance un extremo relativo en $x = 1/2$. Compruébese que se trata de un mínimo.

b) Para $a = 2$, calcúlese el valor de $\int_{-1}^{1} f(x)dx$.

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se consideran los sucesos A, B y C de un experimento aleatorio tales que : $P(A) = 0,09$; $P(B) = 0,07$ y $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0,97$. Además los sucesos A y C son incompatibles.

a) Estúdiese si los sucesos A y B son independientes.

b) Calcúlese $P(A \cap B \mid C)$.

Nota: $\overline{S}$ denota el suceso complementario del suceso S.

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)
La cantidad de fruta, medida en gramos, que contienen los botes de mermelada de una cooperativa con producción artesanal se puede aproximar mediante una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica de 10 gramos.

a) Se seleccionó una muestra aleatoria simple de 100 botes de mermelada, y la cantidad total de fruta que contenían fue de 16.000 gramos. Determínese un intervalo de confianza al 95 % para la media μ.

b) A partir de una muestra aleatoria simple de 64 botes de mermelada se ha obtenido un intervalo de confianza para la media μ con un error de estimación de 2,35 gramos. Determínese el nivel de confianza utilizado para construir el intervalo.

OPCIÓN B

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)
Considérese el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x & +y & +az & = a+1 \\ ax & +y & +z & = 1 \\ x & +ay & +az & = a \end{array}\right.$$

a) Discútase el sistema en función de los valores de a.

b) Resuélvase el sistema para $a = 2$.

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la función real de variable real

$$f(x) = -8x^2 + 24x - 10$$

a) Calcúlense los máximos y mínimos locales de f y represéntese gráficamente la función.

b) Determínese el área del recinto cerrado comprendido entre la gráfica de la función f y las rectas $x = 1$, $x = 2$ e $y = 4$.

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)
Considérese la función real de variable real

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{x^3}{(x-2)^2} + 1 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

a) Estúdiese la continuidad de esta función.

b) Determínense las asíntotas de esta función.

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)
La probabilidad de que un trabajador llegue puntual a su puesto de trabajo es 3/4. Entre los trabajadores que llegan tarde, la mitad va en transporte público. Calcúlese la probabilidad de que:

a) Un trabajador elegido al azar llegue tarde al trabajo y vaya en transporte público.

b) Si se eligen tres trabajadores al azar, al menos uno de ellos llegue puntual. Supóngase que la puntualidad de cada uno de ellos es independiente de la del resto.

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)
En cierta región, el gasto familiar realizado en gas natural, medido en euros, durante un mes determinado se puede aproximar mediante una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica 75 euros.

a) Determínese el mínimo tamaño muestral necesario para que al estimar la media del gasto familiar en gas natural, μ, mediante un intervalo de confianza al 95 %, el error máximo cometido sea inferior a 15 euros.

b) Si la media del gasto familiar en gas natural, μ, es de 250 euros y se toma una muestra aleatoria simple de 81 familias, ¿cuál es la probabilidad de que la media muestral, $\overline{X}$, sea superior a 230 euros?

OPCIÓN A

1.- a) Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$A^2=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}=A \Rightarrow A^3=A^2A=A\cdot A=A^2=A\Rightarrow .....\Rightarrow A^n=A$$

En particular, $\boxed{A^{15}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}}$

$|A|=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{vmatrix}=-6+6=0\Rightarrow$ <u>A no tiene inversa</u>

b) Calculamos primero $B^{-1}=\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Así: $B\cdot A^t\cdot B^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Luego: $B\cdot A^t\cdot B^{-1}-2\cdot I=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\Rightarrow |B\cdot A^t\cdot B^{-1}-2\cdot I|=2\Rightarrow \boxed{|B\cdot A^t\cdot B^{-1}-2\cdot I|^3=2^3=8}$

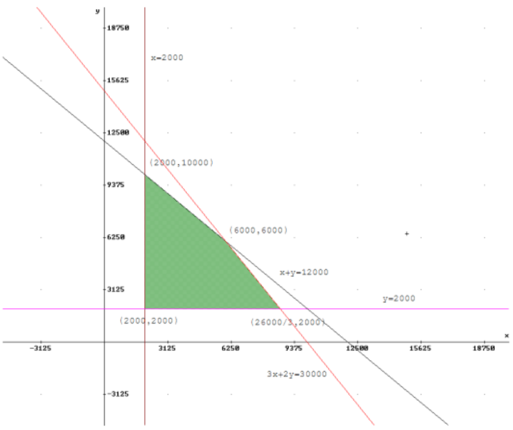
2.- Función Objetivo: $f(x,y)=0.75x+0.6y$

Restricciones:

$$\left\{\begin{array}{c} x+y\le 12000 \\ x\ge 2000 \\ y\ge 2000 \\ 3x+2y\le 30000 \end{array}\right\}$$

Vértices:

$A(2000,2000)$
$B(2000,10000)$
$C(6000,6000)$
$D(26000/3,2000)$



Evaluamos función objetivo:

$f_A=2700€$ $f_B=7500€$
$f_C=8100€$ $f_D=7700€$

Solución: **Máximo 8100€ en (6000,6000)**

3.- Sea la función $f(x)=4x^3-ax^2-ax+2$,

a) Derivando: $f'(x)=12x^2-2ax-a\Rightarrow f'\left(\frac{1}{2}\right)=0\Rightarrow 12\left(\frac{1}{2}\right)^2-2a\cdot\frac{1}{2}-a=0\Rightarrow 3-2a=0\Rightarrow \boxed{a=\frac{3}{2}}$

Calculando 2ª derivada: $f''(x)=24x-2a=24\cdot\frac{1}{2}-2\cdot\frac{3}{2}=12-3=9>0$, luego es un mínimo

b) Si $a=2$, $f(x)=4x^3-2x^2-2x+2$. Calculamos primitiva $\int f(x)\,dx=\int\left(4x^3-2x^2-2x+2\right)dx=$

$$=4\cdot\frac{x^4}{4}-2\cdot\frac{x^3}{3}-x^2+2x+C=x^4-\frac{2x^3}{3}-x^2+2x+C$$

Así, $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=\left[x^4-\frac{2x^3}{3}-x^2+2x\right]_{-1}^{1}=\left(1-\frac{2}{3}-1+2\right)-\left(1+\frac{2}{3}-1-2\right)=\frac{4}{3}+\frac{4}{3}=\boxed{\frac{8}{3}}$

4.- Sabemos que $p(A)=0.09$, $p(B)=0.07$ y $p(\overline{A}\cup\overline{B})=0.97$. Además A y C son incompatibles

a) $0.97=p(\overline{A}\cup\overline{B})=p(\overline{A\cap B})=1-p(A\cap B)\Rightarrow p(A\cap B)=1-0.97=0.03$

Como $p(A)\cdot p(B)=0.09\cdot 0.07=0.0063\neq 0.03=p(A\cap B)$, <u>no son independientes</u>.

b) $p(A\cap B/C)=\frac{p(A\cap B\cap C)}{p(C)}=0$ puesto que A y C son incompatibles, $A\cap C=\varnothing$

5.- $X\to N(\mu,10)$

a) El nivel de confianza es del 95%, luego $z_{\alpha/2}=1.96$, $n=100$, $\overline{X}=\frac{16000}{100}=160$

El intervalo de confianza es: $\left(\overline{X}-z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{X}+z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=\left(160-1.96\cdot\frac{10}{\sqrt{100}},160+1.96\cdot\frac{10}{\sqrt{100}}\right)=$

$=\left(160-1.96,160+1.96\right)=\boxed{(158.04,161.96)}$

b) $n=64$, $E=2.35$, $E=z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Rightarrow 2.35=z_{\alpha/2}\cdot\frac{10}{\sqrt{64}}=z_{\alpha/2}\cdot\frac{10}{8}\Rightarrow z_{\alpha/2}=1.88$

$p(Z\leq 1.88)=1-\frac{\alpha}{2}\Rightarrow 0.9699=1-\frac{\alpha}{2}\Rightarrow\frac{\alpha}{2}=0.0301\Rightarrow\alpha=0.0602\Rightarrow 1-\alpha=0.9398$, luego $\boxed{93.98\%}$

<u>OPCIÓN B</u>

1.- Sea el sistema $\begin{cases} x+y+az=a+1\\ ax+y+z=1\\ x+ay+az=a\end{cases}$ Matrices : $M=\begin{pmatrix}1&1&a\\a&1&1\\1&a&a\end{pmatrix}$ y $M^*=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&a&a+1\\a&1&1&1\\1&a&a&a\end{array}\right)$

a) $|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ a & 1 & 1 \\ 1 & a & a \end{vmatrix} = a^3 - a^2 + a + 1 = 0 \Rightarrow a = 1,\, a = -1$

- <u>Caso 1</u>.- Si $a \neq -1, a \neq 1$, $|M| \neq 0 \Rightarrow rang(M) = 3 = rang(M^*) \Rightarrow SCD$
- <u>Caso 2</u>.- Si $a = -1$, sustituyendo: $rang\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ -1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & -1 & -1 & | & -1 \end{pmatrix} = \begin{matrix} F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{matrix} = rang\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 2 & 0 & | & 1 \\ 0 & -2 & 0 & | & -1 \end{pmatrix} =$

$= F_3 + F_2 = rang\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 2 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rang(M) = 2 = rang(M^*) \Rightarrow SCI$

- <u>Caso 3</u>.- Si $a = 1$, sustituyendo: $rang\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} = \begin{matrix} F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{matrix} = rang\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & -1 \end{pmatrix} =$

$= F_3 - F_2 = rang\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rang(M) = 1 \neq 2 = rang(M^*) \Rightarrow SI$

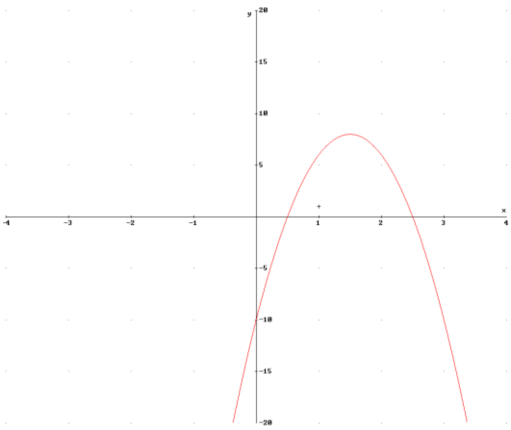
b) Si $a = 2$, el sistema es compatible determinado (ver apartado a). Resolviendo:

<u>Por Gauss</u> $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 3 \\ 2 & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 2 & 2 & | & 2 \end{pmatrix} \approx \begin{matrix} F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{matrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 3 \\ 0 & -1 & -3 & | & -5 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 \end{pmatrix}$ En ecuaciones: $\left\{ \begin{matrix} x + y + 2z = 3 \\ -y - 3z = -5 \\ y = -1 \end{matrix} \right\}$

De la 3ª ecuación: $\boxed{y = -1}$. Sustituyendo en la 2ª ecuación: $1 - 3z = -5 \Rightarrow \boxed{z = 2}$.

De la 1ª ecuación: $x - 1 + 4 = 3 \Rightarrow \boxed{x = 0}$

2.- Sea la función $f(x) = -8x^2 + 24x - 10$. Se trata de una parábola



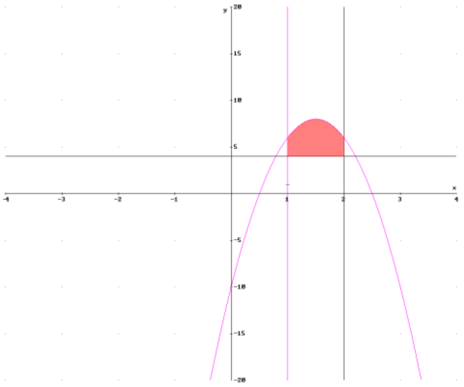
a) Derivando, $f'(x) = -16x + 24 = 0 \Rightarrow\Rightarrow x = \frac{24}{16} = \frac{3}{2}$

Como $f''(x) = -16 < 0 \Rightarrow \boxed{\left(\frac{3}{2}, 8\right)}$ □es un máximo (vértice)

La parábola corta a los ejes en $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$, $(0, -10)$

b) El área pedida será:

$$\int_1^2 (f(x) - 4)\, dx = \int_1^2 \left(-8x^2 + 24x - 10 - 4\right) dx = \int_1^2 \left(-8x^2 + 24x - 14\right) dx =$$



$$=\left[-\frac{8x^3}{3}+\frac{24x^2}{2}-14x\right]_1^2=\left[-\frac{8x^3}{3}+12x^2-14x\right]_1^2=$$

$$=\left(-\frac{64}{3}+48-28\right)-\left(-\frac{8}{3}+12-14\right)=-\frac{4}{3}+\frac{14}{3}=\boxed{\frac{10}{3}}$$

3.- Sea la función $f(x)=\begin{cases} e^x & si \quad x<0 \\ \dfrac{x^3}{(x-2)^2}+1 & si \quad x\geq 0 \end{cases}$

a) En principio la función es continua en $R-\{0,2\}$.

Veamos en $x=0$. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} e^x=1$; $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^3}{(x-2)^2}+1\right)=1$.

En $x=2$; $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x^3}{(x-2)^2}+1\right)=+\infty$. Luego la función es continua en $R-\{2\}$

b) Asíntotas: Verticales.- Por lo visto anteriormente $\boxed{x=2}$.

Horizontales.- $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty} e^x=0$, luego $\boxed{y=0}$

Oblicuas.

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3}{(x-2)^2}+1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3+x^2-4x+4}{(x-2)^2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2-4x+4}{x(x-2)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2-4x+4}{x^3-4x^2+4x}=1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{(x-2)^2}+1-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x^2-8x+4}{(x-2)^2}\right)=5\ ;$$

Como la asíntota es $y=mx+n$, $\boxed{y=x+5}$

4.- Sean los sucesos **T**="llegar tarde", $\overline{T}$ ="llegar puntual", **PU**="ir en transporte público"

Sabemos que $p(\overline{T})=\frac{3}{4}\Rightarrow p(T)=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$. Además conocemos que $p(PU/T)=\frac{1}{2}$

a) $p(PU\cap T)=p(PU/T)\cdot p(T)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\boxed{\frac{1}{8}}$

b) p(al menos llegue uno puntual)=1-p(ninguno sea puntual)= $1-p(T\cap T\cap T)=$

como los sucesos son independientes $1-p(T)\cdot p(T)\cdot p(T)=1-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=1-\frac{1}{64}=\boxed{\frac{63}{64}}$

5.- $X\rightarrow N(\mu,75)$.El nivel de confianza es del 95%, luego $z_{\alpha/2}=1.96$.

a) $E=z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\leq 15\Rightarrow 1.96\cdot\frac{75}{\sqrt{n}}\leq 15\Rightarrow\frac{147}{\sqrt{n}}\leq 15\Rightarrow\sqrt{n}\geq\frac{147}{15}=9.8\Rightarrow n\geq 96.04\Rightarrow\boxed{n=97}$

b) $\overline{X}=250$, $n=81$, $\overline{X}\rightarrow N\left(250,\frac{75}{9}\right)=N(250,8.3)$.

Así $p(\overline{X}>230)=p\left(\frac{\overline{X}-250}{8.3}>\frac{230-250}{8.5}\right)=p(Z>-2.40)=p(Z<2.40)=\boxed{0.9918}$
