14.5. Septiembre 2013 - Opción A

Problema 14.5.1 *(2 puntos)* Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$.

a) Calcúlese la matriz inversa de A

b) Resuélvase la ecuación matricial $A \cdot X = B - I$; donde I es la matriz identidad.

Solución:

a)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$AX = B-I \Longrightarrow X = A^{-1}(B-I) = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} -3 & 8 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Problema 14.5.2 *(2 puntos)* Sea C la región del plano delimitada por el sistema de inecuaciones

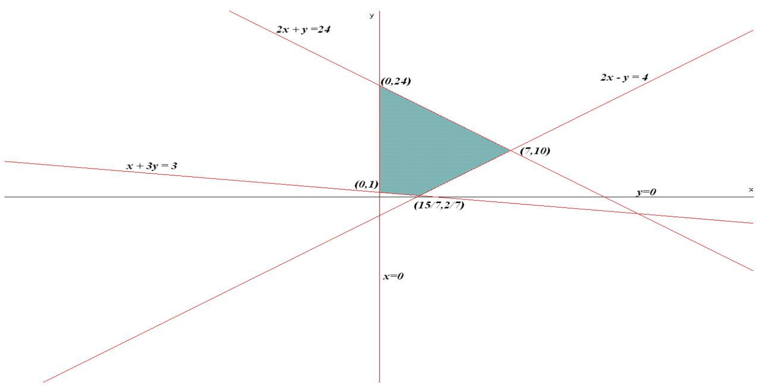
$$\begin{cases} x + 3y \geq 3 \\ 2x - y \leq 4 \\ 2x + y \leq 24 \\ x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{cases}$$

a) Represéntese la región C y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

b) Determínese el punto de C donde la función $f(x,y) = 3x + y$ alcanza su valor máximo. Calcúlese dicho valor.

Solución:

Representación:



$$f(x,y) = 3x + y \text{ sujeto a: } \begin{cases} x + 3y \geq 3 \\ 2x - y \leq 4 \\ 2x + y \leq 24 \\ x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(0,1) = 1 \\ f(0,24) = 24 \\ f(7,10) = 31 \text{ Máximo} \\ f(15/7,2/7) = 47/7 \end{cases}$$

El máximo, dentro de la región en estudio, se encuentra en el punto $(7,10)$ con un valor de 31.

Problema 14.5.3 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-9}$

a) Hállense las asíntotas de f.

b) Determínese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$

Solución:

a) Asíntotas:

- Verticales:

$$x = 3 \Longrightarrow \lim_{x\longrightarrow 3^+} \frac{x^3}{x^2-9} = \left[\frac{27}{0^+}\right] = +\infty; \quad \lim_{x\longrightarrow 3^-} \frac{x^3}{x^2-9} = \left[\frac{27}{0^-}\right] = -\infty$$

$$x = -3 \Longrightarrow \lim_{x\longrightarrow -3^+} \frac{x^3}{x^2-9} = \left[\frac{-27}{0^-}\right] = +\infty; \quad \lim_{x\longrightarrow -3^-} \frac{x^3}{x^2-9} = \left[\frac{-27}{0^+}\right] = -\infty$$

- Horizontales: No hay

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^3}{x^2-9} = \infty$$

- Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{x^3}{x^3-9x} = 1$$

$$n = \lim_{x\longrightarrow\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\frac{x^3}{x^2-9} - x\right) = 0$$

b)

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2-27)}{(x^2-9)^2} \Longrightarrow f'(1) = -\frac{13}{32}; \quad f(1) = -\frac{1}{8}$$

La recta tangente en su ecuación punto pendiente es:

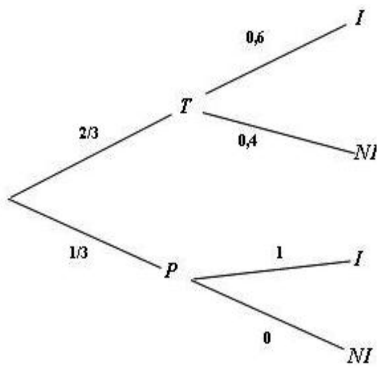
$$y + \frac{1}{8} = -\frac{13}{32}(x-1)$$

Problema 14.5.4 *(2 puntos)* En un avión de línea regular existe clase turista y clase preferente. La clase turista ocupa las dos terceras partes del pasaje y la clase preferente el resto. Se sabe que todos los pasajeros que viajan en la clase preferente saben hablar inglés y que el 40 % de los pasajeros que viajan en clase turista no saben hablar inglés. Se elige un pasajero del avión al azar.

a) Calcúlese la probabilidad de que el pasajero elegido sepa hablar inglés.

b) Si se observa que el pasajero elegido sabe hablar inglés, ¿cuál es la probabilidad de que viaje en la clase turista?

Solución:



a) $P(I) = \dfrac{2}{3} \cdot 0,6 + \dfrac{1}{3} \cdot 1 = 0,733$

b)
$$P(T|I) = \frac{P(I|T)P(T)}{P(I)} = \frac{\frac{2}{3} \cdot 0,6}{0,733} = 0,54$$

Problema 14.5.5 *(2 puntos)* El tiempo de renovación de un teléfono móvil, expresado en años, se puede aproximar mediante una distribución normal con desviación típica 0,4 años.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 400 usuarios y se obtiene una media muestral igual a 1,75 años. Determínese un intervalo de confianza al 95 % para el tiempo medio de renovación de un teléfono móvil.

b) Determínese el tamaño muestral mínimo necesario para que el valor absoluto de la diferencia entre la media muestral y la media poblacional sea menor o igual a 0,02 años con un nivel de confianza del 90 % .

Solución:

$$N(\mu; 0,4)$$

a) $n = 49$, $\overline{X} = 1,75 \longrightarrow N\left(1,75; \frac{0{,}4}{7}\right) = N(1,75; 0{,}057)$

$$NC = 0,95 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0,0392 \Longrightarrow IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (1,7108; 1,7892)$$

b) $N(\mu, 1{,}4)$, $z_{\alpha/2} = 1{,}96$ y $\overline{X} = 3{,}42$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 0,02 = 1{,}645\frac{0,4}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n > 1082,41$$

$$n = 1083$$

14.6. Septiembre 2013 - Opción B

Problema 14.6.1 *(2 puntos)* Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales, dependiente del parámetro k :

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} kx+ & y & & = & 0 \\ x+ & ky- & 2z & = & 1 \\ kx- & 3y+ & kz & = & 0 \end{array}\right.$$

a) Discútase el sistema según los diferentes valores de k.

b) Resuélvase el sistema para $k = 1$.

Solución:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} k & 1 & 0 & 0 \\ 1 & k & -2 & 1 \\ k & -3 & k & 0 \end{array}\right); \ |A| = k(k^2 - 9) = 0 \Longrightarrow k = 0; \ k = \pm 3$$

a) Si $k \neq 0$ y $k \neq \pm 3 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema compatible determinado (solución única).

b) Si $k = 0$:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right); \ |A| = 0 \ \text{y} \ \left|\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}\right| = -1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

Como $F_3 = -3F_1 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2$Rango$(\overline{A}) <$ nº de incognitas y se trata de un sistema compatible indeterminado. Infinitas soluciones.

c) Si $k = 3$:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right); \ |A| = 0 \ \text{y} \ \left|\begin{array}{cc} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{array}\right| = 8 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$\left|\begin{array}{rrr} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \end{array}\right| = 12 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Como los rangos son distintos el sistema es incompatible (No tiene solución)

d) Si $k = -3$:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 1 \\ -3 & -3 & -3 & 0 \end{array}\right); \ |A| = 0 \ \text{y} \ \left|\begin{array}{rr} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{array}\right| = 8 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$\left|\begin{array}{rrr} -3 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ -3 & -3 & 0 \end{array}\right| = -12 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Como los rangos son distintos el sistema es incompatible (No tiene solución)

e) Si $k = 1$:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x+ & y & & = 0 \\ x+ & y- & 2z & = 1 \\ x- & 3y+ & z & = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1/8 \\ y = -1/8 \\ z = -1/2 \end{array}\right.$$

Problema 14.6.2 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \left\{\begin{array}{lll} ax^2 - 3 & \text{si} & x \leq 1 \\ & & \\ \ln(2x - 1) & \text{si} & x > 1 \end{array}\right.$$

a) Calcúlese a para que la función f sea continua en todo R:

b) Represéntese gráficamente la función para el caso $a = 3$.

Nota: lnx denota al logaritmo neperiano del número x.

Solución:

a)

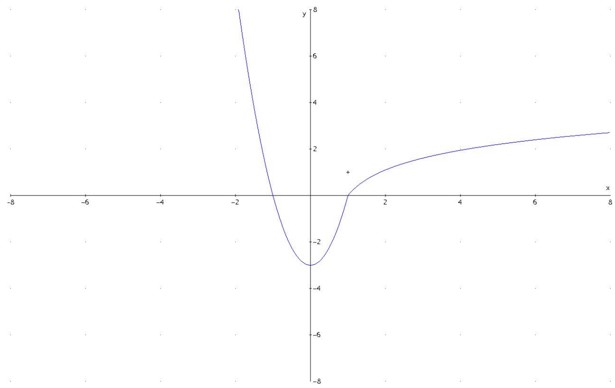
$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^-} (ax^2 - 3) = a - 3$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^+} \ln(2x - 1) = 0$$

Luego la función es continua en $x = 1$ si $a - 3 = 0 \Longrightarrow a = 3$.

b)

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 3 & \text{si} \quad x \le 1 \\ \\ \ln(2x-1) & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$



Problema 14.6.3 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = \dfrac{x}{x^2+4}$

a) Determínense los extremos relativos de f.

b) Calcúlese la integral definida $\int_0^1 f(x)\,dx$.

Solución:

a) $f'(x) = \dfrac{-x^2+4}{(x^2+4)^2} = 0 \Longrightarrow x = \pm 2$

	$(-\infty,-2)$	$(-2,2)$	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decreciente	creciente	decreciente

f es decreciente en el intervalo $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$ y creciente en $(-2,2)$. Presenta un máximo en $(2,1/4)$ y un mínimo en $(-2,-1/4)$.

b)

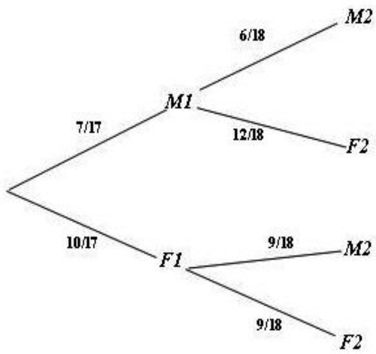
$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{x}{x^2+4}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+4)\Big]_0^1 = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{4}\right) = \ln\sqrt{\frac{5}{4}}$$

Problema 14.6.4 *(2 puntos)* Una caja de caramelos contiene 7 caramelos de menta y 10 de fresa. Se extrae al azar un caramelo y se sustituye por dos del otro sabor. A continuación se extrae un segundo caramelo. Hállese la probabilidad de que:

a) El segundo caramelo sea de fresa.

b) El segundo caramelo sea del mismo sabor que el primero.

Solución:



a) $P(F2) = \dfrac{7}{17} \cdot \dfrac{12}{18} + \dfrac{10}{17} \cdot \dfrac{9}{18} = \dfrac{29}{51} = 0,569$

b) $P(mismo\ \ sabor) = P(M1, M2) + P(F1, F2) = \dfrac{7}{17} \cdot \dfrac{6}{18} + \dfrac{10}{17} \cdot \dfrac{9}{18} = \dfrac{22}{51} = 0,43$

Problema 14.6.5 *(2 puntos)* Se considera una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica igual a 210. Se toma una muestra aleatoria simple de 64 elementos.

a) Calcúlese la probabilidad de que el valor absoluto de la diferencia entre la media muestral y μ sea mayor o igual que 22.

b) Determínese un intervalo de confianza del 99 % para μ, si la media muestral es igual a 1532.

Solución:

$$N(\mu, 210); \quad n = 64$$

a)
$$P(|\overline{X} - \mu| \geq 22) = P\left(\frac{|\overline{X} - \mu|}{210/8} \geq \frac{22}{210/8}\right) =$$
$$2P(Z \geq 0,84) = 2(1 - P(Z \leq 0,84)) = 2(1 - 0,7995) = 0,401$$

b) $z_{\alpha/2} = 2,575$

$E = z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 67,59 \Longrightarrow IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (1464,41; 1599,59)$