12.5. Septiembre 2011 - Opción A

Problema 12.5.1 *(3 puntos).* Se considera la región S acotada plana definida por las cinco condiciones siguientes:

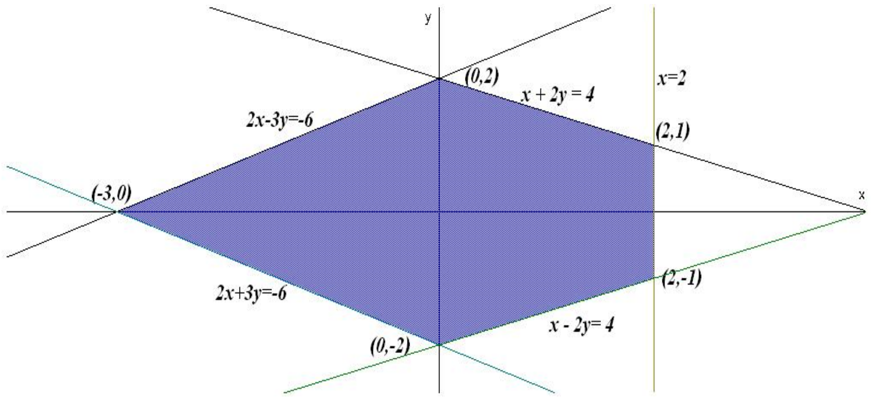
$$x + 2y \leq 4; \;\; x - 2y \leq 4; \;\; 2x - 3y \geq -6; \;\; 2x + 3y \geq -6; \;\; x \leq 2$$

a) Dibújese S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

b) Calcúlense los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y) = 2x + y$ en la región S y especifíquense los puntos de S en los cuales se alcanzan dichos valores máximo y mínimo.

Solución:

a) La región S sería:



b) $f(x,y) = 2x + y$:

$$\begin{cases} f(-3,0) = -6 \\ f(0,2) = 2 \\ f(0,-2) = -2 \\ f(2,1) = 5 \\ f(2,-1) = 3 \end{cases}$$

El valor mínimo se encuentra en el punto $(-3,0)$ vale -6. El valor máximo se encuentra en el punto $(2,1)$ y vale 5.

Problema 12.5.2 *(3 puntos).* Se considera la función real de variable real definida por: $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}$

a) Determínense las asíntotas de f. Calcúlense los extremos relativos de f.

b) Represéntese gráficamente la función f.

c) Calcúlese el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f, la recta horizontal $y = 1$, la recta vertical $x = 1$.

Solución:

a) $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}$:

- Asíntotas verticales no hay ya que el denominador no se anula nunca. Horizontales:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{(x+1)^2}{x^2+1} = 1 \Longrightarrow y = 1$$

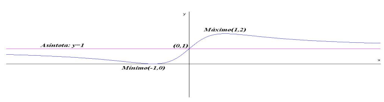
  Oblicuas no hay al haber horizontales.

- $f'(x) = -\dfrac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$:

	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decrece $\searrow$	crece $\nearrow$	decrece $\searrow$

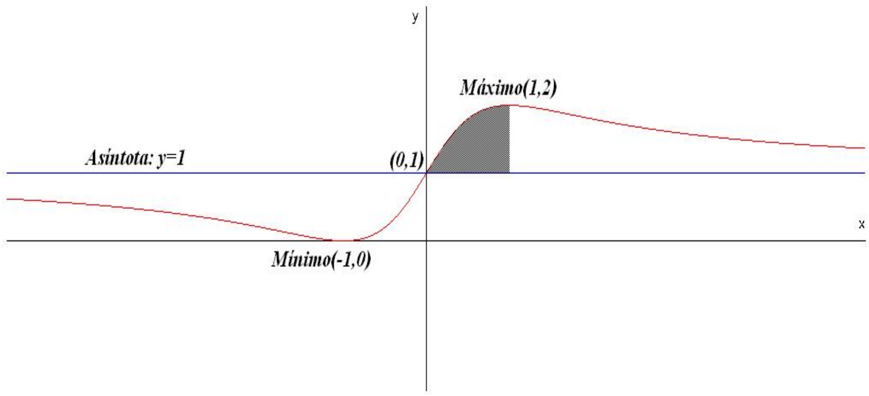
  La función presenta un mínimo en el punto $(-1,0)$ y un máximo en el punto $(1,2)$.

b) La función tiene un punto de corte con los ejes en $(0,1)$:



c)

$$S = \int_0^1 \left(\frac{(x+1)^2}{x^2+1} - 1 \right) dx = \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\, dx = \ln|x^2+1|\Big]_0^1 = \ln 2 \ \ u^2$$



Problema 12.5.3 *(2 puntos).* Se supone que la probabilidad de que nazca una niña es 0,49 y la probabilidad de que nazca un niño es 0,51. Una familia tiene dos hijos.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que ambos sean niños, condicionada porque el segundo sea niño?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que ambos sean niños, condicionada porque al menos uno sea niño?

Solución:

a) V_1: el primer hijo es niño, V_2: el segundo hijo es niño. M_1: el primer hijo es niña, M_2: el segundo hijo es niña.

$$P(V_1 \cap V_2 | V_2) = \frac{P(V_1 \cap V_2 \cap V_2)}{P(V_2)} = \frac{0,51 \cdot 0,51}{0,51} = 0,51$$

b) Si el suceso A es al menos un niño y el B es dos niños tendremos que $A \cap B = B$ y

$$P(A) = 1 - P(M_1 \cap M_2) = 1 - 0,49^2 = 0,7599$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{0,51^2}{0,7599} = 0,342$$

Problema 12.5.4 *(2 puntos).* Se supone que la presión diastólica en una determinada población se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media 98 mm y desviación típica 15 mm. Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 9.

a) Calcúlese la probabilidad de que la media muestral sea mayor que 100 mm.

b) Si se sabe que la media muestral es mayor que 100 mm, ¿cuál es la probabilidad de que sea también menor que 104 mm?

Solución:

$$N(98; 15) \quad n = 9 \Longrightarrow \overline{X} \equiv N(98; 5)$$

a) $P(\overline{X} \geq 100) = P\left(\frac{\overline{X}-98}{5} \geq \frac{100-98}{5}\right) = P\left(Z \geq \frac{2}{5}\right) = 1 - P(Z \leq 0,4) = 1 - 0,6554 = 0,3446$

b) Sea $A = \{\overline{X} \leq 104\}$ y sea $B = \{\overline{X} \geq 100\}$:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(100 \leq \overline{X} \leq 104)}{P(\overline{X} \geq 100)} = \frac{P(0,40 \leq Z \leq 1,2)}{P(Z \geq 0,40)} =$$

$$\frac{P(Z \leq 1,2) - P(Z \leq 0,40)}{1 - P(Z \leq 0,40)} = \frac{0,8849 - 0,6554}{1 - 0,6554} = \frac{0,2295}{0,3446} = 0,6659$$

12.6. Septiembre 2011 - Opción B

Problema 12.6.1 *(3 puntos).* Se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}; \; I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \; O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcúlense a, b para que se verifique la igualdad $AB = BA$.

b) Calcúlense c, d para que se verifique la igualdad $A^2 + cA + dI = O$.

c) Calcúlense todas las soluciones del sistema lineal:

$$(A - I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

a)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 0 \\ b = 2 \end{array} \right.$$

b) $A^2 + cA + dI = O$.

$$\left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{array}\right) + c\left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{array}\right) + d\left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc} d & 0 \\ c+1 & c+d+1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} c = -1 \\ d = 0 \end{array}\right.$$

c)

$$(A-I)\left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} -x \\ x \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = \lambda \end{array}\right.$$

Problema 12.6.2 *(3 puntos).* Se considera un rectángulo R de lados x, y.

a) Si el perímetro de R es igual a 12 m, calcúlense x, y para que el área de R sea máxima y calcúlese el valor de dicha área máxima.

b) Si el área de R es igual a 36 m^2 , calcúlense x, y para que el perímetro de R sea mínimo y calcúlese el valor de dicho perímetro mínimo.

Solución:

a) El perímetro $2x + 2y = 12 \Longrightarrow x + y = 6 \Longrightarrow y = 6 - x$. Hay que optimizar la función $S(x, y) = x \cdot y \Longrightarrow S(x) = x(6 - x) = -x^2 + 6x$:

$$S'(x) = -2x + 6 = 0 \Longrightarrow x = 3$$

	$(-\infty, 3)$	$(3, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

Luego la función presenta un máximo en $x = 3\,m$, luego $y = 3\,m$ lo que corresponde a un área de $9\,m^2$.

b) Ahora sabemos que $R = x \cdot y = 36 \Longrightarrow y = 36/x$ y queremos optimizar el perímetro $P(x, y) = 2x + 2y \Longrightarrow P(x) = 2x + 72/x$:

$$P(x) = \frac{2x^2 + 72}{x} \Longrightarrow P'(x) = \frac{2x^2 - 72}{x^2} = 0 \Longrightarrow x = \pm 6$$

	$(-\infty, -6)$	$(-6, 6)$	$(6, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

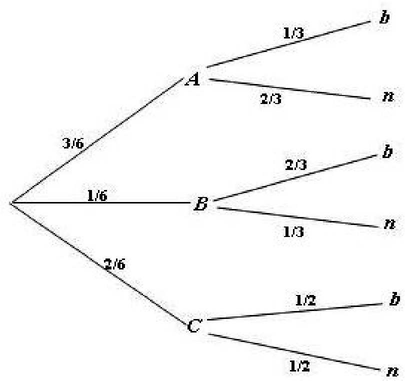
Luego la función presenta un mínimo en $x = 6\,m$ y, por tanto, $y = 6\,m$.

Problema 12.6.3 *(2 puntos).* Se dispone de tres urnas, A, B y C. La urna A contiene 1 bola blanca y 2 bolas negras, la urna B contiene 2 bolas blancas y 1 bola negra y la urna C contiene 3 bolas blancas y 3 bolas negras. Se lanza un dado equilibrado y si sale 1, 2 o 3 se escoge la urna A, si sale el 4 se escoge la urna B y si sale 5 o 6 se elige la urna C. A continuación, se extrae una bola de la urna elegida.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea blanca?

b) Si se sabe que la bola extraída ha sido blanca, ¿cuál es la probabilidad de que la bola haya sido extraída de la urna C?

Solución:



a)

$$P(b) = \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{9} = 0,444$$

b)

$$P(C|b) = \frac{P(b|C)P(C)}{P(b)} = \frac{1/2 \cdot 1/3}{0,444} = 0,375$$

Problema 12.6.4 *(2 puntos).* Para determinar el coeficiente de inteligencia θ de una persona se le hace contestar un conjunto de tests y se obtiene la media de sus puntuaciones. Se supone que la calificación de cada test se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media θ y desviación típica 10.

a) Para una muestra aleatoria simple de 9 tests, se ha obtenido una media muestral igual a 110. Determínese un intervalo de confianza para θ al 95 %.

b) ¿Cuál es el número mínimo de tests que debería realizar la persona para que el valor absoluto del error en la estimación de su coeficiente de inteligencia sea menor o igual que 5, con el mismo nivel de confianza?

Solución:

a) $N(\theta, 10)$, $n = 9$, $\overline{X} = 110$ minutos y $z_{\alpha/2} = 1,96$:

$$IC = \left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (103,467; 116,534)$$

b) $z_{\alpha/2} = 1,96$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = \left(z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{E}\right)^2 = 15,3664$$

Como n tiene que ser un número natural $n = 16$

12.7. Septiembre 2011 (Reserva)- Opción A

Problema 12.7.1 *(3 puntos).* Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real a:

$$\left\{\begin{array}{r} 4x + 3y + 5z = 5 \\ x + y + 3z = 1 \\ 2x + ay + (a^2 - 2)z = 3 \end{array}\right.$$

a) Escríbase el sistema en forma matricial.

b) Discútase el sistema según los diferentes valores de a.

c) Resuélvase el sistema en el caso en que tenga infinitas soluciones.

Solución:

a)

$$\left(\begin{array}{ccc} 4 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & a & a^2 - 2 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 5 \\ 1 \\ 3 \end{array}\right)$$

b)

$$\left|\begin{array}{ccc} 4 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & a & a^2 - 2 \end{array}\right| = a^2 - 7a + 6 = 0 \Longrightarrow a = 1, \ \ a = 6$$

- Si $a \neq 1$ y $a \neq 6 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A})$ = nº de incógnitas $\Longrightarrow$ SCD. Sistema compatible determinado.
- Si $a = 1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \ F_3 = F_1 - 2F_2 \Longrightarrow \text{SCI}$$

El sistema es compatible indeterminado.

- Si $a = 6$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 34 & 3 \end{array}\right) \text{ y } \begin{vmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \Longrightarrow \text{SI}$$

El sistema es incompatible.

c)

$$\left\{ \begin{array}{l} 4x + 3y + 5z = 5 \\ x + y + 3z = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2 + 4\lambda \\ y = -1 - 7\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

Problema 12.7.2 *(3 puntos).* Se considera la función real de variable real definida por: $f(x) = 2(x-1)^2(x+3)$

a) Determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento. Calcúlense sus extremos relativos.

b) Calcúlense los puntos de corte de la gráfica de f con el eje OX. Esbócese la gráfica de f.

c) Calcúlese el valor del área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f y el eje OX.

Solución:

a)

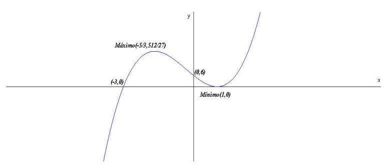
$$f'(x) = 2(x-1)(3x+5) = 0 \Longrightarrow x = 1, \;\; x = -5/3$$

	$(-\infty, -5/3)$	$(-5/3, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -5/3) \cup (1, \infty)$ y es decreciente en $(-5/3, 1)$.

La función presenta un máximo en el punto $(-5/3, 512/27)$ y un mínimo en $(1, 0)$.

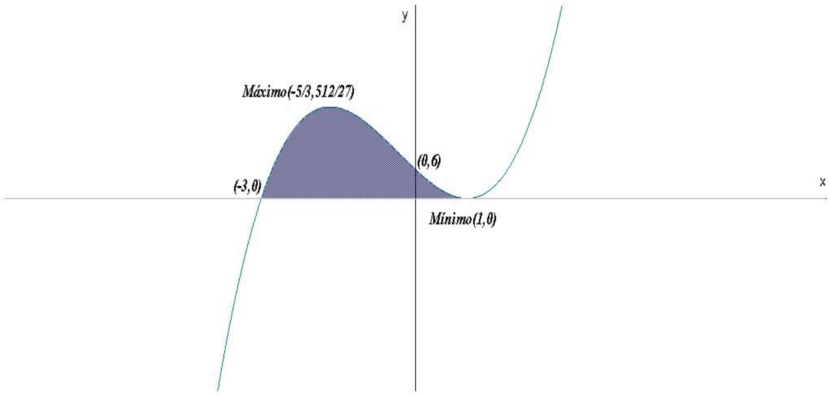
b) Para $x = 0 \Longrightarrow (0, 6)$ y para $f(x) = 0 \Longrightarrow (1, 0), \;\; (-3, 0)$



c)

$$\int_{-3}^{1} 2(x-1)^2(x+3)\,dx = \int_{-3}^{1} (2x^3+2x^2-10x+6)\,dx =$$

$$\left.\frac{x^4}{2}+\frac{2x^3}{3}-5x^2+6x\right]_{-3}^{1} = \frac{128}{3}\,u^2$$



Problema 12.7.3 *(2 puntos).* La probabilidad de que el jugador A de baloncesto consiga una canasta de tres puntos es igual a $7/9$, y la probabilidad de que otro jugador B consiga una canasta de tres puntos es $5/7$. Cada uno de estos jugadores realiza un lanzamiento de tres puntos.

a) Calcúlese la probabilidad de que solamente uno de los dos jugadores consiga un triple.

b) Calcúlese la probabilidad de que al menos uno de los dos jugadores consiga un triple.

Solución:

$$P(A)=\frac{7}{9},\quad P(\overline{A})=\frac{2}{9},\quad P(B)=\frac{5}{7},\quad P(\overline{B})=\frac{2}{7}$$

a)

$$P(\text{sólo uno}) = P(A\cap\overline{B})+P(\overline{A}\cap B) = \frac{7}{9}\cdot\frac{2}{7}+\frac{2}{9}\cdot\frac{5}{7} = \frac{8}{21} = 0,381$$

b)

$$P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B) = \frac{7}{9}+\frac{5}{7}-\frac{7}{9}\cdot\frac{5}{7} = \frac{59}{63} = 0,937$$

Problema 12.7.4 *(2 puntos).* Se supone que la altura (en cm) que alcanza la espuma de un cierto detergente para lavadoras durante un lavado estándar se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica igual a 1,5 *cm*. Una muestra aleatoria simple de 10 lavados de ese tipo ha dado las siguientes alturas de espuma:

$$7; \quad 4; \quad 4; \quad 5; \quad 7; \quad 6; \quad 2; \quad 8; \quad 6; \quad 1$$

a) Determínese un intervalo de confianza del 90 % para μ.

b) ¿Qué tamaño mínimo debe tener la muestra para que el valor absoluto del error máximo en la estimación sea de 0,5 *cm* con el mismo nivel de confianza?

Solución:

$$N(\mu; 1,5), \quad n = 10 \quad \overline{X} = 5$$

a) $z_{\alpha/2} = 1,645$:

$$IC = \left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (4,22; 5,78)$$

b)

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = \left(\frac{1,645 \cdot 1,5}{0,5}\right)^2 = 24,354 \Longrightarrow n = 25$$

12.8. Septiembre 2011 (Reserva)- Opción B

Problema 12.8.1 *(3 puntos).* Se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -6 \\ -2 & 1 & -2 \\ -11 & 3 & -8 \end{pmatrix}$$

a) Calcúlese $A^{-1}A^T$.- **Nota**.- La notación A^T representa a la matriz transpuesta de A.

b) Resuélvase la ecuación matricial: $\frac{1}{4}A^2 - AX = B$.

Solución:

a)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}A^T = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

b)

$$\frac{1}{4}A^2 - AX = B \Longrightarrow X = A^{-1}\left(\frac{1}{4}A^2 - B\right)$$

$$\frac{1}{4}A^2 - B = \frac{1}{4}\left(\begin{array}{ccc} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{array}\right) - \left(\begin{array}{ccc} -3 & 4 & -6 \\ -2 & 1 & -2 \\ -11 & 3 & -8 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc} 4 & -2 & 6 \\ 2 & 0 & 2 \\ 14 & -2 & 12 \end{array}\right)$$

$$X = A^{-1}\left(\frac{1}{4}A^2 - B\right) = \left(\begin{array}{ccc} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1/4 & 1/4 & 1/4 \end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc} 4 & -2 & 6 \\ 2 & 0 & 2 \\ 14 & -2 & 12 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Problema 12.8.2 *(3 puntos).* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \left\{\begin{array}{lll} ax^2 & \text{si} & x \le 1/2 \\ bx + c & \text{si} & x > 1/2 \end{array}\right.$$

Calcúlense los valores de a, b, c para que f satisfaga todas las condiciones siguientes:

- $a > 0$
- La función f es continua y derivable en $x = 1/2$.
- El valor del área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f, el eje de abscisas y las rectas verticales $x = -2$, $x = 0$, es igual a $32/3$.

Solución:

- Por la continuidad en $x = 1/2$:

$$\lim_{x \longrightarrow (1/2)^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow (1/2)^-} ax^2 = \frac{a}{4}$$

$$\lim_{x \longrightarrow (1/2)^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow (1/2)^+} (bx + c) = \frac{b}{2} + c$$

$$\frac{a}{4} = \frac{b}{2} + c \Longrightarrow a - 2b - 4c = 0$$

- Por la derivabilidad en $x = 1/2$:

$$f'(x) = \left\{\begin{array}{lll} 2ax & \text{si} & x \le 1/2 \\ b & \text{si} & x > 1/2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} f'((1/2)^-) = a \\ f'((1/2)^+) = b \end{array}\right. \Longrightarrow a = b$$

- Por el área:

$$\int_{-2}^{0} ax^2\,dx = \left.\frac{ax^3}{3}\right]_{-2}^{0} = \frac{8a}{3} = \frac{32}{3} \Longrightarrow a = 4$$

Luego $a = 4$, $b = 4$ y $c = -1$.

Problema 12.8.3 *(2 puntos).* Los datos de la tabla siguiente se han extraído de las estadísticas oficiales de la prueba de acceso a estudios universitarios (fase general) de la convocatoria del curso 2009/2010, en el Distrito único de Madrid:

	Chico	Chica
Apto	12109	9863
NoApto	1717	1223

Se elige un alumno al azar de entre los que se presentaron a dicha prueba.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el alumno elegido sea chica o haya resultado apto?

b) Si el alumno elegido es chico, ¿Cuál es la probabilidad de que haya resultado no apto?

Solución:

	Chico	Chica	Total
Apto	12109	9863	21972
NoApto	1717	1223	2940
Total	13826	11086	24912

$\Longrightarrow$

	Chico	Chica	Total
Apto	$0,486$	$0,396$	$0,882$
NoApto	$0,069$	$0,049$	$0,118$
Total	$0,555$	$0,445$	1

Sean los sucesos V: Chico, M: Chica, A: Apto y $\overline{A}$: No Apto.

a) $P(M\cup A) = P(M)+P(A)-P(M\cap A) = 0,445+0,882-0,396 = 0,931$

b)

$$P(\overline{A}|V) = \frac{P(\overline{A}\cap V)}{P(V)} = \frac{0,069}{0,555} = 0,124$$

Problema 12.8.4 *(2 puntos).* Se supone que la estatura de los individuos de una cierta población se puede aproximar por una variable aleatoria X con distribución normal de media 170 *cm* y desviación típica 4 *cm*.

a) Se extrae de dicha población una muestra aleatoria simple de 16 individuos. Calcúlese $P(X < 167)$.

b) Se extrae de dicha población una muestra aleatoria simple y resulta que $P(X > 172) = 0,0062$. Determínese el tamaño de la muestra extraída.

Solución:

a) $N(\overline{X}; \sigma/\sqrt{n}) \equiv N(170; 1)$:

$$P(\overline{X} < 170) = P\left(Z < \frac{167 - 170}{1}\right) =$$

$$P(Z < -3) = 1 - P(Z < 3) = 1 - 0,9987 = 0,0013$$

b) $N(\overline{X}; \sigma/\sqrt{n}) \equiv N(170; 4/\sqrt{n})$:

$$P(\overline{X} > 172) = P\left(Z > \frac{172 - 170}{4/\sqrt{n}}\right) = 1 - P\left(Z < \frac{172 - 170}{4/\sqrt{n}}\right) =$$

$$1 - 0,0062 = 0,9938 \Longrightarrow \frac{172 - 170}{4/\sqrt{n}} = 2,5 \Longrightarrow \sqrt{n} = 5 \Longrightarrow n = 25$$