UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID

PRUEBA DE ACCESO A ESTUDIOS UNIVERSITARIOS **(LOGSE)**

Curso **2008-2009**

MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CC. SOCIALES II

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

INSTRUCCIONES: El alumno deberá elegir una de las dos opciones A o B que figuran en el presente examen y contestar razonadamente a los cuatro ejercicios de que consta dicha opción. Para la realización de esta prueba puede utilizarse calculadora científica, siempre que no disponga de capacidad de representación gráfica o de cálculo simbólico.

CALIFICACIÓN: La puntuación máxima de cada ejercicio se indica en el encabezamiento del mismo.

TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)
Una carpintería vende paneles de contrachapado de dos tipos A y B. Cada m^2 de panel del tipo A requiere $0,3$ horas de trabajo para su fabricación y $0,2$ horas para su barnizado, proporcionando su venta un beneficio de 4 euros. Cada m^2 de panel del tipo B requiere $0,2$ horas de trabajo para su fabricación y $0,2$ horas para su barnizado, proporcionando su venta un beneficio de 3 euros. Sabiendo que en una semana se trabaja un máximo de 240 horas en el taller de fabricación y de 200 horas en el taller de barnizado, calcular los m^2 de cada tipo de panel que debe vender semanalmente la carpintería para obtener el máximo beneficio. Calcular dicho beneficio máximo.

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)
Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 24 & \text{si} \quad x \leq -3 \\ x^2 + 9 & \text{si} \quad -3 < x \leq 2 \\ -x + 15 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

a) Represéntese gráficamente la función f.

b) Hállese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.

c) Calcúlese el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f y el eje OX.

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)
En un cierto banco el 30% de los créditos concedidos son para vivienda, el 50% se destinan a empresas y el 20% son para consumo. Se sabe además que de los créditos concedidos a vivienda, el 10% resultan impagados, de los créditos concedidos a empresas son impagados el 20% y de los créditos concedidos para consumo resultan impagados el 10%.

a) Calcúlese la probabilidad de que un crédito elegido al azar sea pagado.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un crédito elegido al azar se haya destinado a consumo, sabiendo que se ha pagado?

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)
Se supone que el tiempo de una conversación en un teléfono móvil se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a $1,32$ minutos. Se desea estimar la media del tiempo de las conversaciones mantenidas con un error inferior o igual en valor absoluto a $0,5$ minutos y con un grado de confianza del 95%.

a) Calcúlese el tamaño mínimo de la muestra que es necesario observar para llevar a cabo dicha estimación mediante la media muestral.

b) Si se supone que la media del tiempo de las conversaciones es de $4,36$ minutos y se elige una muestra aleatoria simple de 16 usuarios, ¿cuál es la probabilidad de que el tiempo medio de las conversaciones de la muestra esté comprendido entre 4 y 5 minutos?

OPCIÓN **B**

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)
Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real k:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 3 \\ x+ky+z & = & 3 \\ kx-3z & = & 6 \end{array}\right.$$

a) Discútase el sistema según los diferentes valores de k.
b) Resuélvase el sistema en el caso en que tenga infinitas soluciones.
c) Resuélvase el sistema para $k=3$.

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)
El beneficio semanal (en miles de euros) que obtiene una central lechera por la producción de leche desnatada está determinado por la función:

$$B(x) = -x^2 + 7x - 10$$

en la que x representa los hectolitros de leche desnatada producidos en una semana.
a) Represéntese gráficamente la función $B(x)$ con $x \geq 0$.
b) Calcúlense los hectolitros de leche desnatada que debe producir cada semana la central lechera para maximizar su beneficio. Calcúlese dicho beneficio máximo.
c) Calcúlense las cantidades mínima y máxima de hectolitros de leche desnatada que debe producir la central lechera cada semana para no incurrir en pérdidas (es decir, beneficio negativo).

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)
La probabilidad de que a un habitante de un cierto pueblo de la Comunidad de Madrid le guste la música moderna es igual a 0,55; la probabilidad de que le guste la música clásica es igual a 0,40 y la probabilidad de que no le guste ninguna de las dos es igual a 0,25. Se elige al azar un habitante de dicho pueblo. Calcúlese la probabilidad de que le guste:
a) al menos uno de los dos tipos de música.
b) la música clásica y también la música moderna.
c) sólo la música clásica.
d) sólo la música moderna.

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)
Se supone que la estancia (en días) de un paciente en un cierto hospital se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 9 días. De una muestra aleatoria simple formada por 20 pacientes, se ha obtenido una media muestral igual a 8 días.
a) Determínese un intervalo de confianza del 95% para la estancia media de un paciente en dicho hospital.
b) ¿Cuál debe ser el tamaño muestral mínimo que ha de observarse para que dicho intervalo de confianza tenga una longitud total inferior o igual a 4 días?

RESOLUCIÓN OPCIÓN A.

Ejercicio 1.

Se trata de un ejercicio de programación lineal.

Las incógnitas de nuestro problema son: el nº de m^2 de panel tipo A, variable a la que llamaremos x, y el nº de m^2 de panel tipo B, a la que llamaremos y, que se deben vender a la semana.

La función a optimizar, o función objetivo, es el beneficio, que pretendemos que sea máximo.

$$\boxed{z(x,y) = 4x + 3y}$$

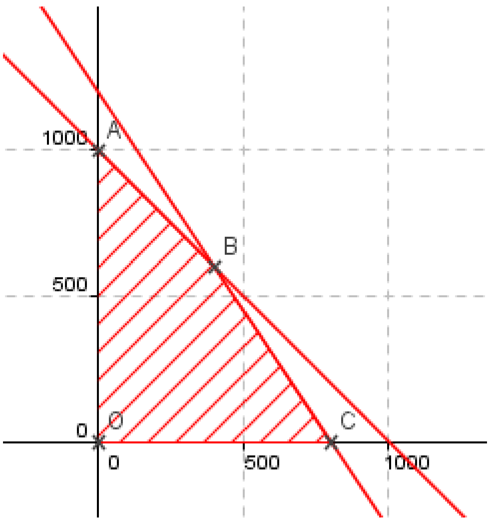
En la siguiente tabla recogemos la información del tiempo necesario para la fabricación y barnizado de los paneles, por m^2.

	Fabricación	Barnizado	Beneficio
A	0,3h	0,2h	4€
B	0,2h	0,2h	3€
	240h	200h	

Las restricciones a las que están sujetas las variables x e y son:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 0.3x + +0{,}2y \leq 240 \\ 0{,}2x + 0{,}2y \leq 200 \end{cases}$$

La región factible, o región en la que se verifican todas las restricciones es:



Sabemos que la solución del problema coincide con las coordenadas de uno de los vértices.

O(0,0), A(0,1000), B(400,600), C(800,0)

Calculamos z en cada vértice:

z(0,0) = 0; z(0,1000) = 3000

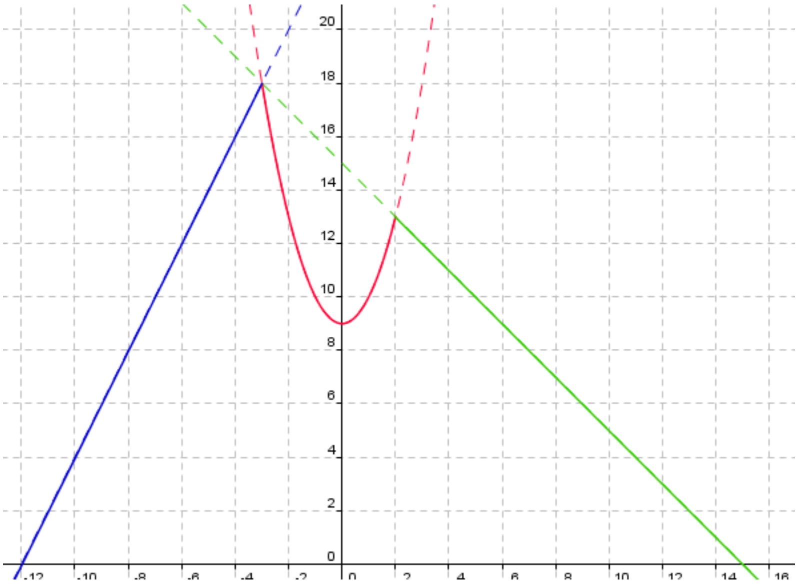
z(400,600) = 3400 z(800,0) = 3200

Solución:

Se deben fabricar 400m^2 de paneles tipo A y 600m^2 de paneles tipo B, a la semana, para obtener un beneficio de 3400€, que es el máximo

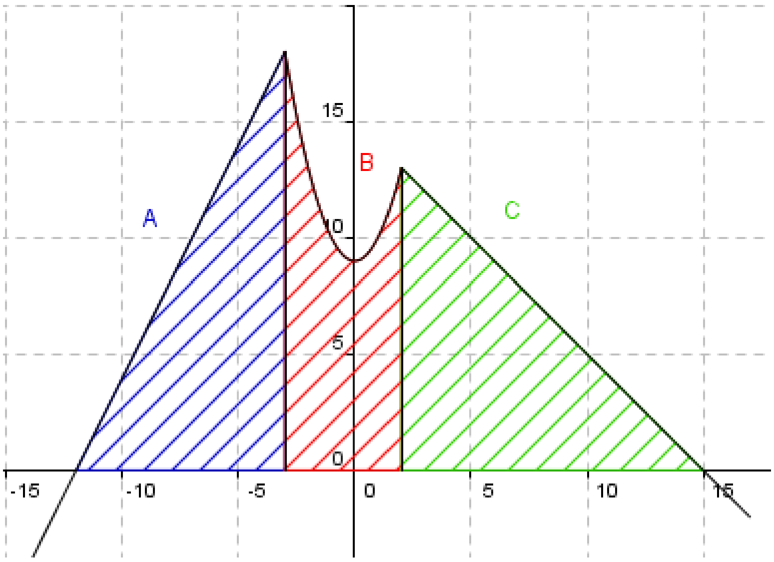
Ejercicio2.

a)



b) m = f'(1) = 2; f(1) = 10; **t: y - 10 = 2(x – 1)**

c)



$$A = \int_{-12}^{-3} (2x + 24)dx = 81$$

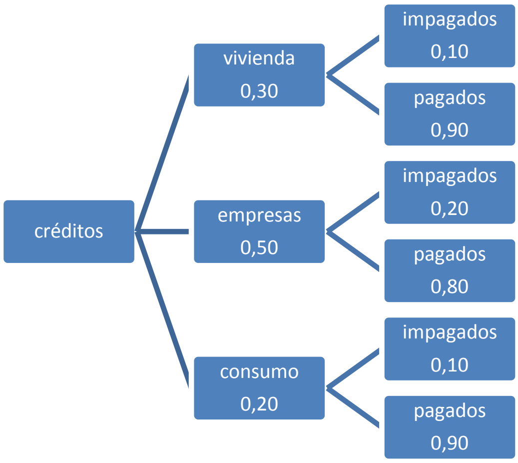
$$B = \int_{-3}^{2} (x^2 + 9)dx = 56{,}67$$

$$C = \int_{2}^{15} (-x + 15)dx = 84{,}5$$

El área pedida es la suma de las áreas de los tres recintos anteriores.

Área = 222,17u^2

Ejercicio 3.



a) Sea p el suceso "el crédito se ha pagado". Entonces:

P(p) = 0,3x0,9 + 0,5x0.8 + 0,2x0,9

P (p) = 0,85

b) $P(c/p) = \dfrac{0{,}2x0{,}9}{0{,}85} = 0{,}21$

Ejercicio 4.

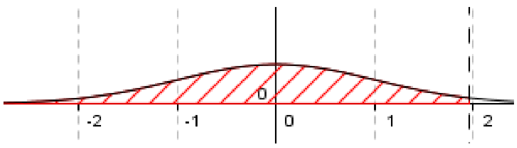
X: tiempo de conversación en un teléfono móvil.

X: $N(\mu,1{,}32)$

$E_{máx}$=0,5min

$1-\alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0{,}05 \Rightarrow \alpha/2 = 0{,}025$

a)



$$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 0{,}025 + 0{,}95 = 0{,}975 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$n = \left(\frac{1{,}96 \cdot 1{,}32}{0{,}5}\right)^2 = 26{,}7$$

Para que el error no supere el máximo permitido hay que tomar una muestra de, al menos 27 individuos.

b) Al ser X una variable normal, la distribución de medias muestrales también es normal, independientemente del tamaño de la muestra.

$\mu = 4{,}36$

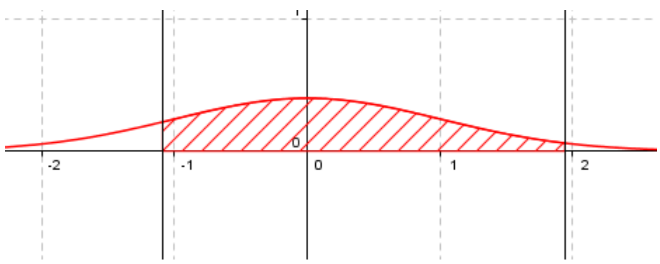
$n = 16$ La distribución de las medias muestrales es $N(4{,}36, 0{,}33)$

$\sigma = 1{,}32$

Tipificando la variable:

$\overline{X} = 4 \Rightarrow Z = \dfrac{4-4{,}36}{0{,}33} = -1{,}09;$ $\overline{X} = 5 \Rightarrow Z = \dfrac{5-4{,}36}{0{,}33} = 1{,}94$

$$P(4 < \overline{X} \le 5) = P(-1{,}09 < Z \le 1{,}94) = 0{,}8359$$



RESOLUCIÓN OPCIÓN B.

Ejercicio 1.

a) Para discutir el sistema aplicaremos el teorema de Rouché:

Un sistema de ecuaciones lineales es compatible si, y sólo si, el rango de la matriz de coeficientes es igual al rango de la matriz ampliada.
Si el rango de ambas es igual al número de incógnitas, el sistema es compatible determinado. Si es menor, el sistema es compatible indeterminado.

Por tanto vamos a trabajar con estas dos matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & k & 1\\ k & 0 & -3\end{pmatrix} \quad A^*=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 3\\ 1 & k & 1 & 3\\ k & 0 & -3 & 6\end{pmatrix}$$

Calculamos el rango en función de los valores del parámetro k.

$$|A|=-k^2-2k+3; \quad |A|=0 \Rightarrow \begin{cases} k=-3 \\ k=1 \end{cases}$$

$$\forall k \notin \Re-\{-3,1\} \Rightarrow rg(A)=rg(A^*)=3=n^o\ incógnitas \Rightarrow S.C.D.\ (1\ sol)$$

<u>Si k = -3</u>: $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -3 & 1\\ -3 & 0 & -3\end{pmatrix} \quad A^*=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 3\\ 1 & -3 & 1 & 3\\ -3 & 0 & -3 & 6\end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix}1 & -3\\ -3 & 0\end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow rg(A)=2;$ $\begin{vmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & -3 & 3\\ -3 & 0 & 6\end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow rg(A^*)=3$; Por tanto el sistema no tiene solución.

$$k=-3: rg(A) \neq rg(A^*) \Rightarrow S.I.\ (no\ tiene\ solución)$$

<u>Si k = 1</u>: $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -3\end{pmatrix} \quad A^*=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 3\\ 1 & 1 & 1 & 3\\ 1 & 0 & -3 & 6\end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow rg(A)=2;$ $\begin{vmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & 1 & 3\\ 1 & 0 & 6\end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow rg(A^*)=2$; Por tanto el sistema tiene infinitas soluciones.

$$k=1: rg(A)=2=rg(A^*)<n^o\ incógnitas \Rightarrow S.C.I.\ (\infty\ sol)$$

b) Se pide resolver en el caso de que tenga infinitas soluciones, por lo que resolvemos para k = 1.
Como el rango de las dos matrices es 2, eliminamos una ecuación, en este caso la primera o la segunda, ya que son iguales:

$\begin{cases} x+y+z=3 \\ x-3z=6 \end{cases}$ Como tenemos dos ecuaciones, dejamos x e y como incógnitas y tomamos z como parámetro, pasándola al segundo miembro: $z=\lambda$

$\begin{cases} x+y=3-\lambda \\ x=6+3\lambda \end{cases}$ Resolviendo: $x=6+3\lambda; \quad y=-3-4\lambda; \quad z=\lambda; \quad \forall\lambda\in\Re$

c) Se pide resolver para k = 3, que según los resultados del apartado a), sabemos que tiene solución única.
Simplificando la 3ª ecuación:

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ x+3y+z=3 \\ x-z=2 \end{cases}$$

Restando a la segunda ecuación la primera: $2y=0 \Rightarrow y=0$ Sustituyendo:

$\begin{cases} x+z=3 \\ x-z=2 \end{cases}$ Sumando: $2x=5 \Rightarrow x=5/2$; Sustituyendo en una de las dos: $z=1/2$

La solución del sistema: $x=5/2; \quad y=0; \quad z=1/2$

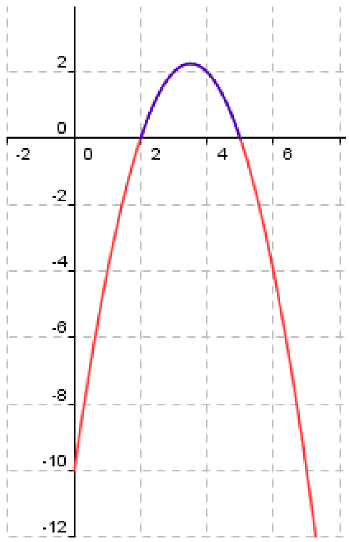
Ejercicio 2.

a) Se trata de una función cuadrática, por lo que su representación gráfica es una parábola. Como el coeficiente de x^2 es negativo, el vértice de la parábola es el máximo de la función. Para hacer la representación gráfica.
Calcularemos sólo los puntos de corte con los ejes y el máximo.

$B(0)=-10$

$B(x)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=5 \end{cases}$

$B'(x)=-2x+7; B'(x)=0 \Rightarrow x=7/2; \; B(7/2)=9/4=2{,}25$

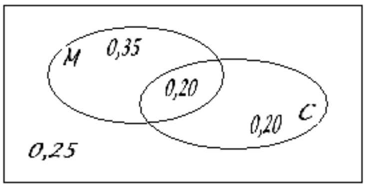


b) Los valores pedidos coinciden con las coordenadas del vértice de la parábola:
x = 3,5, y = 2,25: se deben producir 3,5 hectolitros de leche a la semana, para obtener un beneficio de 2,25 miles de euros.

c) Se incurre en pérdidas en la zona roja de la gráfica, por lo que la central debe producir entre 2 y 5 hectolitros a la semana.

Ejercicio 3.

Sean los sucesos: M=”le gusta la música moderna” y C=”le gusta la música clásica”
Podemos resolver el ejercicio utilizando el álgebra de sucesos o ayudándonos con un diagrama de Veen.



a) Si nos fijamos el diagrama:

$P(M \cup C) = 0{,}35 + 0{,}2 + 0{,}2 = 0{,}75$

O bien, utilizando las leyes de Morgan:

$P(M \cup C) = 1 - P(\overline{M \cup C}) = 1 - P(\overline{M} \cap \overline{C}) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$

b) Si nos fijamos en el diagrama: $P(M \cap C) = 0{,}2$

Si no: $P(M \cap C) = P(M) + P(C) - P(M \cup C) = 0{,}55 + 0{,}40 - 0{,}75 = 0{,}2$

c) Según el diagrama: $P(C \cap \overline{M}) = 0{,}2$

O bien: $P(C \cap \overline{M}) = P(C) - P(C \cap M) = 0{,}40 - 0{,}20 = 0{,}20$

d) En el diagrama vemos: $P(M \cap \overline{C}) = 0{,}35$

Podemos calcularlo también: $P(M \cap \overline{C}) = P(M) - P(M \cap C) = 0{,}55 - 0{,}20 = 0{,}35$

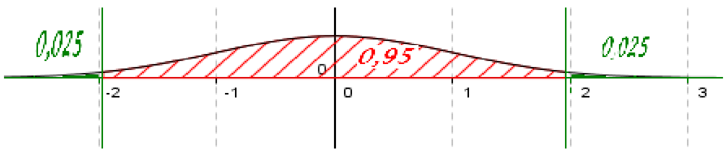
Ejercicio 4.

X: estancia, en días, de un paciente en un hospital.

$N(\mu, 9)$

$n = 20$

$\overline{x} = 8$



a)

$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 0{,}95 + 0{,}025 = 0{,}975 \Rightarrow$

$\Rightarrow Z_{\alpha/2} = 1{,}96$

El intervalo pedido:

$$\overline{x} - \frac{Z_{\alpha/2}\sigma}{\sqrt{n}} = 8 - \frac{1{,}96 \cdot 9}{\sqrt{20}} = 4{,}1$$

$$\overline{x} + \frac{Z_{\alpha/2}\sigma}{\sqrt{n}} = 8 + \frac{1{,}96 \cdot 9}{\sqrt{20}} = 11{,}9$$

$$I(95\%) = (4{,}1,\ 11{,}9)$$

b) Como la longitud del intervalo de confianza es el doble del error máximo, el error máximo es 2 días.

$$n = \left(\frac{z_{\alpha/2}\sigma}{E_{máx}}\right)^2 = \left(\frac{1{,}96 \cdot 9}{\sqrt{20}}\right)^2 = 77{,}8$$

Aproximando al entero superior:

n = 78