INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

INSTRUCCIONES: El examen presenta dos opciones: A y B. El alumno deberá elegir una de ellas y contestar razonadamente a los cuatro ejercicios de que consta dicha opción. Para la realización de esta prueba puede utilizarse calculadora científica, siempre que no disponga de la capacidad de representación gráfica o de cálculo simbólico.
TIEMPO: Una hora y treinta minutos.
CALIFICACIÓN: La puntuación máxima de cada ejercicio se indica en el encabezamiento del mismo.
.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)
Encontrar todas las matrices X tales que AX = XA, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Para cada valor de *a* se considera la función $f(x) = \dfrac{3x^2 - ax}{x+2}$

Se pide:
(a) **Calcular el valor de *a* para que *f*(x) tenga un mínimo relativo en x = 2.**
(b) **Hallar las asíntotas de la curva** $y = f(x)$ **para el valor *a* = 3.**

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)
Una persona desea jugar en una atracción de feria, donde regalan un peluche, si al tirar un dardo se acierta en un blanco. Si sólo se permite tirar tres dardos y la probabilidad de acertar en cada tirada es 0,3.
(a) **¿Cuál es la probabilidad de llevarse el peluche?**
(b) **¿Cuál es la probabilidad de llevarse el peluche exactamente en el tercer intento?, ¿y de llevárselo exactamente en el segundo?**

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)
Los depósitos mensuales, en euros, de una entidad bancaria, siguen una distribución normal de media m y desviación típica s = 5,1. Con el fin de contrastar si la media de los depósitos mensuales es 20 euros, se toma una muestra de tamaño 16, resultando ser la media muestral de 22,4 euros. ¿Se puede aceptar la hipótesis de que la media es 20 a un nivel de significación del 5 %?.

OPCIÓN B

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)
Determinar los valores máximo y mínimo de la función z = 3x + 4y sujeta a las restricciones:

3x + y ³ 3
x + y £ 5
x ³ - 2
y £ 10
y ³ 0

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)
Calcular el valor de *a* > 0 en los siguientes casos:

(a) $\int_0^3 \frac{1}{x+1} dx = a$

(b) $\int_0^a \frac{1}{x+1} dx = 3$

(c) $\int_0^3 \frac{1}{x+a} dx = 5$

Ejercicio 3. (puntuación máxima: 2 puntos)
Un día determinado, en una tienda de ropa joven, se han realizado 400 ventas pagadas con la tarjeta de crédito V y 350 ventas pagadas con la tarjeta MC. Las ventas restantes del día han sido abonadas en metálico. Se comprueba que 150 de las ventas pagadas con la tarjeta de crédito V superan los 150 euros, mientras que 300 de la ventas pagadas con MC superan esa cantidad. Se extrae al azar un comprobante de las ventas del día pagadas con tarjeta de crédito.

(a) **¿Cuál es la probabilidad de que corresponda a una compra superior a 150 euros?**
(b) **Si la compra es inferior a 150 euros, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido pagada con la tarjeta MC?**

Ejercicio 4. (puntuación máxima: 2 puntos)
De una población con distribución normal de media 50 y desviación típica 6, se extrae una muestra aleatoria de tamaño n y se calcula su media muestral.

(a) **¿Qué valor debe tener n para que se cumpla la desigualdad** $|\bar{x} - m| < 2$**, con una probabilidad de 0,95?**

(b) **Resolver el apartado anterior con una probabilidad de 0,90. Comparar ambos resultados.**

Soluciones a los ejercicios de la OPCIÓN A

Ejercicio 1.

Sea $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, entonces:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ 4a+2c & 4b+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+4b & 2b \\ c+4d & 2d \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = a+4b \\ b = 2b \\ 4a+2c = c+4d \\ 4b+2d = 2d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = a \\ b = 0 \\ c = 4d-4a \\ d = d \end{cases}$$

Las matrices pedidas son: $X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 4d-4a & d \end{pmatrix}$

Por ejemplo, una de ellas es: $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -8 & -1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 2.

(a) Para que $f(x)$ tenga un mínimo relativo en x = 2 debe cumplirse que:

$f'(2) = 0$ y $f''(2) > 0$

- $$f'(x) = \frac{(6x-a)(x+2)-(3x^2-ax)}{(x+2)^2} = \frac{3x^2+12x-2a}{(x+2)^2}$$

$$f'(2) = \frac{12+24-2a}{16} = 0 \Rightarrow a = 18$$

Veamos que, para ese valor de a = 18, $f''(2) > 0$:

$$f''(x) = \frac{96}{(x+2)^3} \to f''(2) = \frac{96}{64} > 0$$

(b) Para a = 3 (y para cualquier valor de a) es evidente que la función tiene, en x = –2, una asíntota vertical, pues:

$$\lim_{x\to -2} \frac{3x^2-3x}{x+2} = \infty$$

También tiene una asíntota oblicua, pues el grado del numerador es uno más que el grado del denominador. La calculamos:

La asíntota oblicua es $y = mx + n$, siendo:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2-3x}{x(x+2)} = 3 \quad \text{y}$$

$$n = \lim_{x\to\infty}(f(x)-mx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-3x}{x+2} - 3x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{-9x}{x+2} = -9$$

La asíntota es: $y = 3x - 9$.

Ejercicio 3.

Sea A es suceso "acertar" y A^C su contrario.

Las sucesivas tiradas del dardo son independientes, por tanto, para cada dardo se tiene : $P(A) = 0,3$ y $P(A^C) = 0,7$

(a) P(acertar en tres intentos) = 1 – P(no acertar en ninguno de los tres intentos) =

$$= 1 - 0,7 \cdot 0,7 \cdot 0,7 = 0,657$$

(b) Exactamente en el tercer intento $\rightarrow$ La secuencia debe ser: A^C, A^C, A.

$$P(A^C \cap A^C \cap A) = P(A^C) \cdot P(A^C) \cdot P(A) = 0,7 \cdot 0,7 \cdot 0,3 = 0,147$$

Exactamente en el segundo intento $\rightarrow$ secuencia A^C, A.

$$P(A^C \cap A) = P(A^C) \cdot P(A) = 0,7 \cdot 0,3 = 0,21$$

Ejercicio 4.

Se trata de un contrate de hipótesis bilateral

Hipótesis nula, $H_0: \mu = 20$
Hipótesis alternativa, $H_1: \mu \neq 20$

La hipótesis nula se rechaza cuando $\left|\bar{x}-20\right| > Z_{a/2}\dfrac{s}{\sqrt{n}}$, siendo σ la desviación típica poblacional, $\bar{x}$ la media muestral, n el tamaño de la muestra y $Z_{a/2}$ el valor correspondiente en la tabla normal para una significación α.

En nuestro caso, $\bar{x}$ = 22,4, σ = 5,1, n = 16 y, para un nivel de significación del 5 %, $Z_{a/2}$=1,96, luego

$$Z_{a/2}\frac{s}{\sqrt{n}} = 1{,}96\cdot\frac{5{,}1}{\sqrt{16}} = 2{,}499$$

Como la diferencia

$$\left|\bar{x}-20\right| = 2{,}4 < 2{,}499$$

no se puede rechazar la hipótesis nula. Se concluye que la media de los depósitos mensuales es 20 euros.