16.3. Junio 2015 - Opción A

Problema 16.3.1 *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\left\{\begin{array}{c} 3x + y - z = 8 \\ 2x + az = 3 \\ x + y + z = 2 \end{array}\right.$$

a) Discútase en función de los valores del parámetro a.

b) Resuélvase para $a = 1$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccr|c} 3 & 1 & -1 & 8 \\ 2 & 0 & a & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right); \quad |A| = -2a - 4 = 0 \Longrightarrow a = -2$$

- Si $a \neq -2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a = -2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccr|c} 3 & 1 & -1 & 8 \\ 2 & 0 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right); \quad |A| = 0, \quad \left|\begin{array}{cc} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{array}\right| = -2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$\left|\begin{array}{ccc} 3 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right| = 6 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Como $\text{Rango}(A) \neq \text{Rango}(\overline{A}) \Longrightarrow$ el sistema es incompatible (no tiene solución)

b) Si $a = 1$:

$$\left\{\begin{array}{c} 3x + y - z = 8 \\ 2x + z = 3 \\ x + y + z = 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{array}\right.$$

Problema 16.3.2 *(2 puntos)* Sabiendo que la derivada de una función real de variable real f es

$$f'(x) = 3x^2 + 2x$$

a) Calcúlese la expresión de $f(x)$ sabiendo que su gráfica pasa por el punto $(1, 4)$.

b) Calcúlese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto $(1, 4)$.

Solución:

a) $f(x) = \displaystyle\int (3x^2 + 2x)\, dx = x^3 + x^2 + C$:

$$f(1) = 4 \Longrightarrow 2 + C = 4 \Longrightarrow C = 2 \Longrightarrow f(x) = x^3 + x^2 + 2$$

b)

$$b = f(1) = 4, \quad m = f'(1) = 5, \Longrightarrow y - 4 = 5(x - 1)$$

.

Problema 16.3.3 *(2 puntos)* Sean las funciones reales de variable real

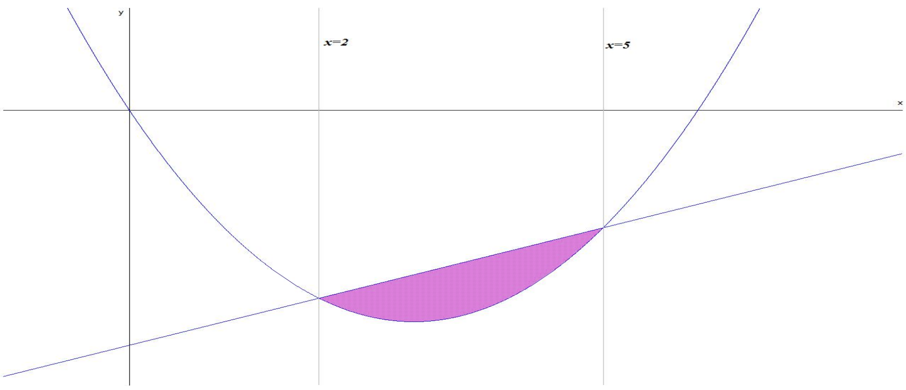
$$f(x) = x^2 - 6x, \quad g(x) = x - 10$$

a) Represéntense gráficamente las funciones f y g.

b) Calcúlese el área del recinto plano acotado por las gráficas de las funciones f y g.

Solución:

a) Gráfica:



b) $x^2 - 6x = x - 10 \Longrightarrow x = 2$ y $x = 5$.

$$F(x) = \int (f(x) - g(x))\,dx = \int (x^2 - 7x + 10)\,dx = \frac{x^3}{3} - \frac{7x^2}{2} + 10x$$

$$S_1 = \int_2^5 (f(x) - g(x))\,dx = F(5) - F(2) = -\frac{9}{2}$$

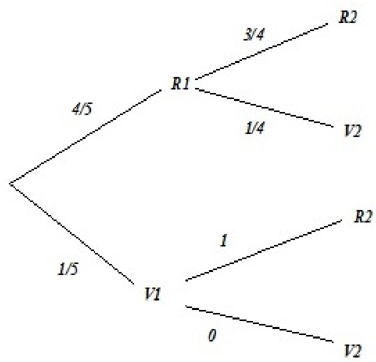
$$S = |S_1| = \left|-\frac{9}{2}\right| = \frac{9}{2}\ u^2$$

Problema 16.3.4 *(2 puntos)* En una bolsa hay cuatro bolas rojas y una verde. Se extraen de forma consecutiva y sin reemplazamiento dos bolas. Calcúlese la probabilidad de que:

a) Las dos bolas sean del mismo color.

b) La primera bola haya sido verde si la segunda bola extraída es roja.

Solución:



a)

$$P(mismo\ \ color) = P(R1)P(R2|R1) + P(V1)P(V2|V1) = \frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4} + \frac{1}{5}\cdot 0 = \frac{3}{5}$$

b)

$$P(V1|R2) = \frac{P(R2|V1)P(V1)}{P(R2)} = \frac{1\cdot\frac{1}{5}}{\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4} + \frac{1}{5}\cdot 1} = \frac{1}{4}$$

Problema 16.3.5 *(2 puntos)* El tiempo de reacción ante un obstaculo imprevisto de los conductores de automóviles de un pais, en milisegundos (ms), se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 250\ ms$.

a) Se toma una muestra aleatoria simple y se obtiene un intervalo de confianza $(701; 799)$, expresado en ms, para μ con un nivel del 95 %. Calcúlese la media muestral y el tamaño de la muestra elegida.

b) Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 25. Calcúlese el error máximo cometido en la estimación de μ mediante la media muestral con un nivel de confianza del 80 %.

Solución:

a) Tenemos $z_{\alpha/2} = 1,96$ e $IC = (701; 799) \Longrightarrow \begin{cases} \overline{X} - E = 701 \\ \overline{X} + E = 799 \end{cases} \Longrightarrow$ $\begin{cases} \overline{X} = 750 \\ E = 49 \end{cases}$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 49 = 1,96\frac{250}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = 100$$

b) $z_{\alpha/2} = 1,285$;

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,285\frac{250}{\sqrt{25}} = 64,25$$

16.4. Junio 2015 - Opción B

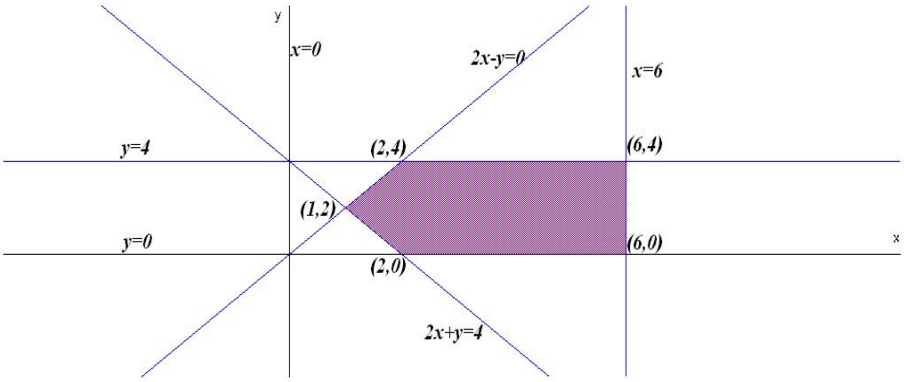
Problema 16.4.1 *(2 puntos)* Una fábrica de piensos para animales produce diariamente como mucho seis toneladas de pienso del tipo A y como máximo cuatro toneladas de pienso del tipo B. Además, la producción diaria de pienso del tipo B no puede superar el doble de la del tipo A y, por último, el doble de la fabricación de pienso del tipo A sumada con la del tipo B debe ser como poco cuatro toneladas diarias. Teniendo en cuenta que el coste de fabricación de una tonelada de pienso del tipo A es de 1000 euros y el de una tonelada del tipo B de 2000 euros, ¿cuál es la producción diaria para que la fábrica cumpla con sus obligaciones con un coste mínimo? Calcúlese dicho coste diario mínimo.

Solución:

LLamamos x : toneladas de pienso A e y : toneladas de pienso B. Se trata de un problema de programación, hay que optimizar la función objetivo $z(x, y) = 1000x + 2000y$ calculando su mínimo, sujeto a las restricciones (Región factible):

$$S : \begin{cases} x \le 6 \\ y \le 4 \\ y \le 2x \Longrightarrow 2x - y \ge 0 \\ 2x + y \ge 4 \\ x, y \ge 0 \end{cases}$$

La región S pedida será:



Los vértices a estudiar serán: $(2,0)$, $(6,0)$, $(6,4)$, $(2,4)$ y $(1,2)$:

$$\left\{\begin{array}{l} z(2,0) = 2000 \ \text{Mínimo} \\ z(6,0) = 6000 \\ z(6,4) = 14000 \\ z(2,4) = 10000 \\ z(1,2) = 5000 \end{array}\right.$$

El coste mínimo es de 2000 euros y se alcanza produciendo 2 toneladas de pienso A y ninguna del tipo B.

Problema 16.4.2 *(2 puntos)* Sea la matriz

$$A = \left(\begin{array}{rrr} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & k & 2 \end{array} \right)$$

a) Estúdiese el rango de A según los valores del parámetro real k.

b) Calcúlese, si existe, la matriz inversa de A para $k = 3$.

Solución:

a) $|A| = 0 \Longrightarrow 8 - 4k = 0 \Longrightarrow k = 2$.
Si $k \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3$.
Si $k = 2$:

$$A = \left(\begin{array}{rrr} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{array} \right); |A| = 0, \ \ \text{y} \ \ \left| \begin{array}{cc} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{array} \right| = 6 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

b) $k = 3$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1/2 & -1 & 1 \\ -3/4 & 2 & -3/2 \end{pmatrix}$$

Problema 16.4.3 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6} & \text{si} \quad x < 2 \\ 3x+m & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$

a) Calcúlese el valor del parámetro real m para que la función f sea continua en $x = 2$.

b) Calcúlese $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x)$.

Solución:

a) Para que f sea continua en $x = 2$:

$$\lim_{x \longrightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 2^-} \frac{x^2-4}{x^2-5x+6} = -4$$

$$\lim_{x \longrightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 2^+} (3x+m) = 6+m$$

$$6+m = -4 \Longrightarrow m = -10$$

b)

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{x^2-4}{x^2-5x+6} = 1$$

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \longrightarrow +\infty} (x+m) = \infty$$

Problema 16.4.4 *(2 puntos)* Sean A y B sucesos de un experimento aleatorio tales que $P(A \cap B) = 0,3$; $P(A \cap \overline{B}) = 0,2$; $P(B) = 0,7$. Calcúlense:

a) $P(A \cup B)$:

b) $P(B|\overline{A})$.

Nota: $\overline{S}$ denota al suceso complementario del suceso S.
Solución:

a)

$$\begin{cases} P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) \end{cases} \Longrightarrow$$

$$P(A \cup B) = P(A \cap \overline{B}) + P(B) = 0,2 + 0,7 = 0,9$$

b) $P(A) = P(A\cap \overline{B}) + P(A\cap B) = 0,2 + 0,3 = 0,5$

$$P(B|\overline{A}) = \frac{P(B\cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{P(B) - P(A\cap B)}{1 - P(A)} = \frac{0,7-0,3}{1-0,5} = 0,8$$

Problema 16.4.5 *(2 puntos)* La duración de cierto componente electrónico, en horas (h), se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica igual a 1000 h.

a) Se ha tomado una muestra aleatoria simple de esos componentes electrónicos de tamaño 81 y la media muestral de su duración ha sido $\overline{x} = 8000h$. Calcúlese un intervalo de confianza al 99 % para μ.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la media muestral este comprendida entre 7904 y 8296 horas para una muestra aleatoria simple de tamaño 100 si sabemos que $\mu = 8100h$?

Solución:

a) Tenemos $\overline{X} = 8000$, $\sigma = 1000$, $n = 81$ y $z_{\alpha/2} = 2,575$:

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (7713,89; 8286,11)$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,575\frac{1000}{\sqrt{81}} = 286,11$$

b) $\overline{X} \approx N\left(8100, \frac{1000}{\sqrt{100}}\right) = N(8100; 100)$

$$P(7904 \le \overline{X} \le 8296) = P\left(\frac{7904-8100}{100} \le Z \le \frac{8296-8100}{100}\right) =$$

$$P(-1,96 \le Z \le 1,96)) = P(Z \le 1,96) - P(Z \le -1,96) =$$

$$P(Z \le 1,96) - (1 - P(Z \le 1,96)) = 2P(Z \le 1,96) - 1 = 0,95$$