

14.3. Junio 2013 - Opción A

Problema 14.3.1 (2 puntos) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calcúlese A^{-1}

b) Resuélvase el sistema de ecuaciones dado por $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Solución:

a)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

b)

$$AX = B \implies X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Problema 14.3.2 (2 puntos) Se desea maximizar la función $f(x, y) = 64, 8x + 76, 5y$ sujeta a las siguientes restricciones:

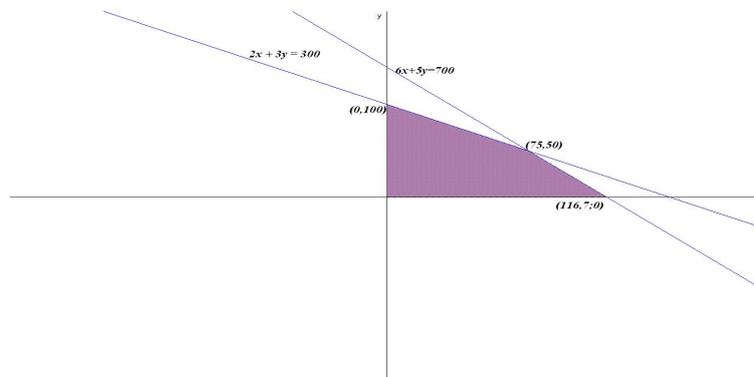
$$6x + 5y \leq 700, \quad 2x + 3y \leq 300, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$$

- a) Representétese gráficamente la región de soluciones factibles y calcúlese las coordenadas de sus vértices.
- b) Determínese el valor máximo de f sobre la región, indicando el punto donde se alcanza dicho máximo.

Solución:

$$f(x, y) = 64, 8x + 76, 5y \text{ sujeto a: } \begin{cases} 6x + 5y \leq 700 \\ 2x + 3y \leq 300 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

Representación:



$$\begin{cases} f(0, 100) = 7650 \\ f(116, 7; 0) = 7560 \\ f(75, 50) = 8685 \text{ Máximo} \end{cases}$$

El máximo, dentro de la región en estudio, se encuentra en el punto $(75, 50)$ con un valor de 8685.

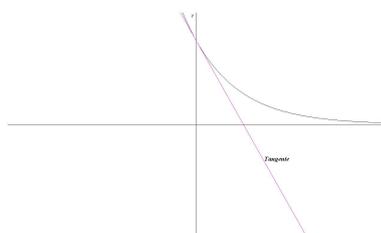
Problema 14.3.3 (2 puntos) Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = 3e^{-2x}$

- Obtégase la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $x = 0$
- Calcúlese el área de la región plana acotada limitada por la gráfica de f , las rectas $x = 0$, $x = 0,5$ y el eje de abscisas.

Solución:

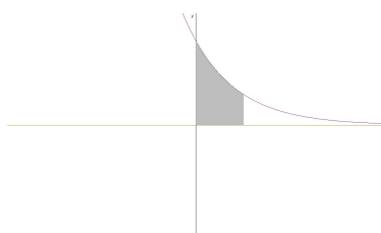
a) $f'(x) = -6e^{-2x} \implies f'(0) = -6$ y $f(0) = 3 \implies$

$$y - 3 = -6x \implies 6x + y - 3 = 0$$



b)

$$\int_0^{1/2} f(x) dx = \int_0^{1/2} (3e^{-2x} dx = -\frac{3}{2}e^{-2x}]_0^{1/2} = \frac{3(e-1)}{2e} = 0,948 u^2$$



Problema 14.3.4 (2 puntos) Al analizar las actividades de ocio de un grupo de trabajadores fueron clasificados como deportistas o no deportistas y como lectores o no lectores. Se sabe que el 55% de los trabajadores se clasificaron como deportistas o lectores, el 40% como deportistas y el 30% lectores. Se elige un trabajador al azar:

- Calcúlese la probabilidad de sea deportista y no lector.

- b) Sabiendo que el trabajador elegido es lector, calcúlese la probabilidad de que sea deportista.

Solución:

$D \equiv$ deportistas, $L \equiv$ lectores.

$$P(D \cup L) = 0,55, \quad P(D) = 0,4, \quad P(L) = 0,3$$

- a) $P(D \cup L) = P(D) + P(L) - P(D \cap L) \implies P(D \cap L) = P(D) + P(L) - P(D \cup L) = 0,4 + 0,3 - 0,55 = 0,15$
 $P(D \cap \bar{L}) = P(D) - P(D \cap L) = 0,4 - 0,15 = 0,25$

- b)

$$P(D|L) = \frac{P(D \cap L)}{P(L)} = \frac{0,15}{0,3} = 0,5$$

Problema 14.3.5 (2 puntos) El número de megabytes (Mb) descargados mensualmente por el grupo de clientes de una compañía de telefonía móvil con la tarifa AA se puede aproximar por una distribución normal con media $3,5 Mb$ y una desviación típica igual a $1,4 Mb$. Se toma una muestra aleatoria de tamaño 24.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que la media muestral sea inferior de $3,37 Mb$?
- b) Supóngase ahora que la media poblacional es desconocida y que la media muestral toma el valor de $3,42 Mb$. Obténgase un intervalo de confianza al 95 % para la media de la población.

Solución:

$$N(3,5; 1,4), \quad n = 24 \longrightarrow N\left(3,5; \frac{1,4}{\sqrt{24}}\right) = N(3,5; 0,28)$$

- a)

$$P(\bar{X} < 3,37) = P\left(Z < \frac{3,37 - 3,5}{0,28}\right) = P(Z < -0,46) = 1 - P(Z < 0,46) = 0,3228$$

- b) $N(\mu, 1,4)$, $z_{\alpha/2} = 1,96$ y $\bar{X} = 3,42$:

$$E = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0,56$$

$$IC = (\bar{X} - E, \bar{X} + E) = (2,86; 3,98)$$

14.4. Junio 2013 - Opción B

Problema 14.4.1 (2 puntos) Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a :

$$\begin{cases} ax - 2y = 2 \\ 3x - y - z = -1 \\ x + 3y + z = 1 \end{cases}$$

- a) Discútase en función de los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$.
b) Resuélvase para $a = 1$.

Solución:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & -2 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{array} \right); |A| = 2a + 8 = 0 \implies a = -4$$

- a) Si $a \neq -4 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^\circ$ de incógnitas \implies Sistema compatible determinado (solución única).
b) Si $a = -4$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -2 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{array} \right); |A| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 10 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} -4 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 20 \neq 0 \implies \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Como los rangos son distintos el sistema es incompatible (No tiene solución)

- c) Si $a = 1$:

$$\begin{cases} ax - 2y = 2 \\ 3x - y - z = -1 \\ x + 3y + z = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 2/5 \\ y = -4/5 \\ z = 3 \end{cases}$$

Problema 14.4.2 (2 puntos) Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ \frac{a + 3x}{x^2 - 4x + 3} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- a) Estúdiase la continuidad de f en $x = 0$ para los distintos valores del parámetro a .

b) Determinense las asíntotas de la función.

Solución:

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{a + 3x}{x^2 - 4x + 3} = \frac{a}{3}$$

Luego la función es continua en $x = 0$ si $a/3 = 1 \implies a = 3$.

Si $a \neq 3$ hay una discontinuidad no evitable:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

b) Asíntotas:

Si $x < 0$:

- Verticales: No hay
- Horizontales: $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \implies y = 0$
- Oblicuas: No hay por haber horizontales

Si $x \geq 0$:

- Verticales: $x^2 - 4x + 3 = 0 \implies x = 1, x = 3$
 - $x = 1$: pueden ocurrir que $a = -3$ o $a \neq -3$.
 - $a = -3$: No hay asíntota, se trata de una discontinuidad evitable.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-3 + 3x}{x^2 - 4x + 3} = \frac{3}{2}$$

- $a \neq -3$: Si hay asíntota

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{a + 3x}{x^2 - 4x + 3} = \pm\infty$$

- Si $x = 3$ pueden ocurrir que $a = -9$ o $a \neq -9$.
 - Si $a = -9$: No hay asíntota, se trata de una discontinuidad evitable.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{-9 + 3x}{x^2 - 4x + 3} = \frac{3}{2}$$

- Si $a \neq -9$: Si hay asíntota:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{a + 3x}{x^2 - 4x + 3} = \pm\infty$$

▪ Horizontales: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a + 3x}{x^2 - 4x + 3} = 0 \implies y = 0$

▪ Oblicuas: No hay por haber horizontales

Problema 14.4.3 (2 puntos) Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = x(5 - x)^2$

a) Determinéense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f .

b) Determinéense los intervalos de concavidad y convexidad de f .

Solución:

a) $f'(x) = (x - 5)(3x - 5) = 0 \implies x = 5, x = \frac{5}{3}$

	$(-\infty, 5/3)$	$(5/3, 5)$	$(5, +\infty)$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

f es creciente en el intervalo $(-\infty, 5/3) \cup (5, +\infty)$ y decreciente en $(5/3, 5)$. Presenta un máximo en $x = 5/3$ y un mínimo en $x = 5$.

b) $f''(x) = 6x - 20 = 0 \implies x = 10/3$

	$(-\infty, 10/3)$	$(10/3, +\infty)$
$f''(x)$	-	+
$f(x)$	convexa	cóncava

f es convexa en el intervalo $(-\infty, 10/3)$ y cóncava en $(5, +\infty)$. Presenta un punto de inflexión en $x = 10/3$.

Problema 14.4.4 (2 puntos) Una tienda de trajes de caballero trabaja con tres sastres. Un 5% de los clientes atendidos por el sastre A no queda satisfecho, tampoco el 8% de los atendidos por el sastre B ni el 10% de los atendidos por el sastre C . El 55% de los arreglos se encargan al sastre A , el 30% al B y el 15% restante al C . Calcúlese la probabilidad de que:

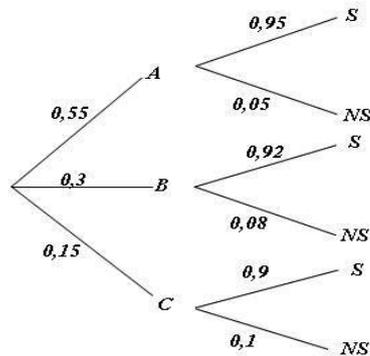
a) Un cliente no quede satisfecho con el arreglo.

b) Si un cliente no ha quedado satisfecho, le haya hecho el arreglo el sastre A

Solución:

a) $P(NS) = 0,55 \cdot 0,05 + 0,3 \cdot 0,08 + 0,15 \cdot 0,1 = 0,0665$

b) $P(A|NS) = \frac{P(NS|A)}{P(NS)} = \frac{0,05 \cdot 0,55}{0,0665} = 0,4135$



Problema 14.4.5 (2 puntos) La duración en horas de un determinado tipo de bombillas se puede aproximar por una distribución normal de media μ y desviación típica igual a 1940 h. Se toma una muestra aleatoria simple.

- ¿Qué tamaño muestral se necesitaría como mínimo para que, con nivel de confianza del 95 %, el valor absoluto de la diferencia entre μ y la duración media observada \bar{X} de esas bombillas sea inferior a 100 h?
- Si el tamaño de la muestra es 225 y la duración media observada \bar{X} es de 12415 h, obténgase un intervalo de confianza al 90 % para μ .

Solución:

$$N(\mu, 1940); \quad z_{\alpha/2} = 1,96; \quad E = \frac{2,45}{2} = 1,225$$

a) $z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \implies n \simeq 1445,82 \implies n = 1446$$

b) $n = 225, \bar{X} = 12415, z_{\alpha/2} = 1,645$

$$E = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 212,75 \implies IC = (\bar{X} - E, \bar{X} + E) = (12202,25; 12627,75)$$