

13.3. Junio 2012 - Opción A

Problema 13.3.1 (3 puntos) Se considera el sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real a :

$$\begin{cases} x + ay - 7z = 4a - 1 \\ x + (1+a)y - (a+6)z = 3a + 1 \\ ay - 6z = 3a - 2 \end{cases}$$

- Discútase el sistema según los diferentes valores de a .
- Resuélvase el sistema en el caso en el que tiene infinitas soluciones.
- Resuélvase el sistema en el caso $a = -3$.

Solución:

a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -7 & 4a-1 \\ 1 & 1+a & -(a+6) & 3a+1 \\ 0 & a & -6 & 3a-2 \end{array} \right); |A| = a^2 - a - 6 = 0 \implies a = 3, a = -2$$

- Si $a \neq 3$ y $a \neq -2 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\bar{A}) = \text{n}^\circ \text{ de incógnitas} \implies \text{Sistema compatible determinado (solución única)}.$
- Si $a = 3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -7 & 11 \\ 1 & 4 & -9 & 10 \\ 0 & 3 & -6 & 7 \end{array} \right); |A| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 11 \\ 1 & 4 & 10 \\ 0 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 10 \neq 0 \implies \text{Rango}(\bar{A}) = 3$$

Como los rangos son distintos el sistema es incompatible (No tiene solución)

- Si $a = -2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -7 & -9 \\ 1 & -1 & -4 & -5 \\ 0 & -2 & -6 & -8 \end{array} \right); |A_1| = |A_2| = |A_3| = |A_4| = 0 \text{ y } \left| \begin{array}{cc} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{array} \right| = 1 \neq 0 \implies$$

$\text{Rango}(A) = 2 = \text{Rango}(\bar{A}) < n^\circ \text{ de incógnitas} \implies$ sistema compatible indeterminado (Infinitas soluciones)

b)

$$\begin{cases} x - y - 4z = -5 \\ 2y - 6z = -8 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 4 - 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

c) $a = -3$

$$\begin{cases} x - 3y - 7z = -13 \\ x - 2y - 3z = -8 \\ -3y - 6z = -11 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -4/3 \\ y = 7/3 \\ z = 2/3 \end{cases}$$

Problema 13.3.2 (3 puntos) Una empresa vinícola tiene plantadas 1200 cepas de vid en una finca, produciendo cada cepa una media de 16 kg de uva. Existe un estudio previo que garantiza que por cada cepa que se añade a la finca, las cepas producen de media 0,01 kg menos de uva cada una. Determinése el número de cepas que se deben añadir a las existentes para que la producción de uvas de la finca sea máxima.

Solución:

x : N° de copas que debemos añadir. La producción vendrá dada por la siguiente función:

$$f(x) = (16 - 0,01x)(1200 + x) = -0,01x^2 + 4x + 19200$$

$$f'(x) = -0,02x + 4 = 0 \implies x = 200$$

$$f''(x) = -0,02 \implies f''(200) < 0 \implies \text{en } x = 200 \text{ hay un máximo}$$

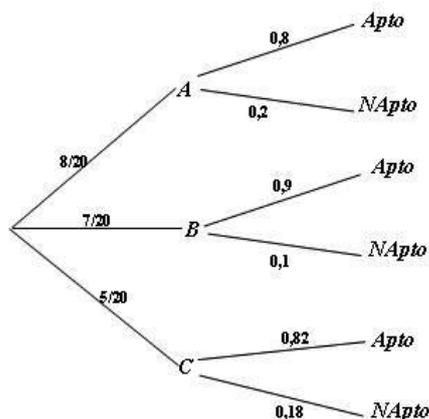
Luego hay que añadir 200 cepas.

Problema 13.3.3 (2 puntos) En un tribunal de la prueba de acceso a las enseñanzas universitarias oficiales de grado se han examinado 80 alumnos del colegio A, 70 alumnos del colegio B y 50 alumnos del colegio C. La prueba ha sido superada por el 80% de los alumnos del colegio A, el 90% de los del colegio B y por el 82% de los del colegio C.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno elegido al azar haya superado la prueba?

- b) Un alumno elegido al azar no ha superado la prueba, ¿cuál es la probabilidad de que pertenezca al colegio B ?

Solución:



a)

$$P(\text{Apto}) = \frac{8}{20} \cdot 0,8 + \frac{7}{20} \cdot 0,9 + \frac{5}{20} \cdot 0,82 = 0,84$$

b) $P(\text{NApto}) = 1 - P(\text{Apto}) = 0,16$

$$P(B|\text{NApto}) = \frac{P(\text{NApto}|B)P(B)}{P(\text{NApto})} = \frac{7}{32} = 0,21875$$

Problema 13.3.4 (2 puntos) Se supone que el peso en kilogramos de los alumnos de un colegio de Educación Primaria el primer día del curso se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 2,8 kg. Una muestra aleatoria simple de 8 alumnos de ese colegio proporciona los siguientes resultados (en kg):

26 27,5 31 28 25,5 30,5 32 31,5.

- a) Determínese un intervalo de confianza con un nivel del 90 % para el peso medio de los alumnos de ese colegio el primer día de curso.
- b) Determínese el tamaño muestral mínimo necesario para que el valor absoluto de la diferencia entre la media muestral y la media poblacional sea menor o igual que 0,9 kg con un nivel de confianza del 97 %.

Solución:

a) Tenemos $n = 8$, $\bar{X} = 29$, $\sigma = 2,8$ y $z_{\alpha/2} = 1,645$

$$IC = \left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = (27,372; 30,628)$$

b) Tenemos $E = 0,9$, $\sigma = 20$ y $z_{\alpha/2} = 2,17$

$$E = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \implies n = 45,577$$

Luego $n = 46$.

13.4. Junio 2012 - Opción B

Problema 13.4.1 (3 puntos) Un estadio de fútbol con capacidad para 72000 espectadores está lleno durante la celebración de un partido entre los equipos A y B . Unos espectadores son socios del equipo A , otros lo son del equipo B , y el resto no son socios de ninguno de los equipos que están jugando. A través de la venta de localidades sabemos lo siguiente:

- No hay espectadores que sean socios de ambos equipos simultáneamente.
- Por cada 13 socios de alguno de los dos equipos hay 3 espectadores que no son socios.
- Los socios del equipo B superan en 6500 a los socios del equipo A .

¿Cuántos socios de cada equipo hay en el estadio viendo el partido?

Solución:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 72000 \\ \frac{x + y}{13} = \frac{z}{3} \\ x + 6500 = y \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 72000 \\ 3x + 3y - 13z = 0 \\ x - y = -6500 \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} x = 26000 \\ y = 32500 \\ z = 13500 \end{array} \right.$$

Problema 13.4.2 (3 puntos) Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{si } x \leq 1 \\ -x^2 + 4x - 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- Estúdiese la continuidad y la derivabilidad de la función f .
- Representétese gráficamente la función f .
- Calcúlese el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f , el eje OX , el eje OY , y la recta $x = 2$.

Solución:

a) f continua en $x = 1$:

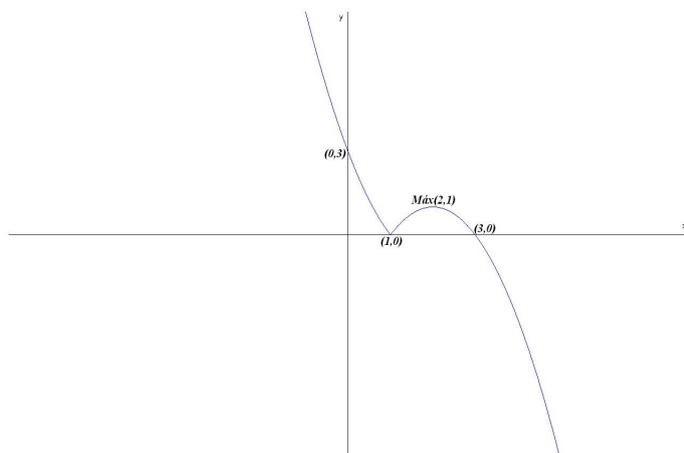
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(0) = 0$$

f no es derivable en $x = 1$:

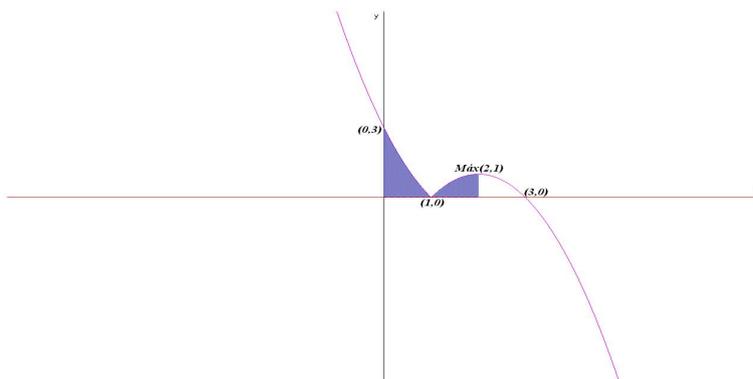
$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 4 & \text{si } x \leq 1 \\ -2x + 4 & \text{si } x > 1 \end{cases} \implies \begin{cases} f'(1^-) = -2 \\ f'(1^+) = 2 \end{cases} \implies f'(1^-) \neq f'(1^+)$$

Luego f no es derivable en $x = 1$.

b) Representación:



c) Área:



$$S_1 = \int_0^1 (x^2 - 4x + 3) dx = \left. \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x \right|_0^1 = \frac{4}{3}$$

$$S_2 = \int_1^2 (-x^2 + 4x - 3) dx = \left. -\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x \right|_1^2 = \frac{2}{3}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = 2 u^2$$

Problema 13.4.3 (2 puntos) Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que:

$$P(A \cap B) = 0,1 \quad P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,6 \quad P(A|B) = 0,5$$

Calcúlense:

- a) $P(B)$.
- b) $P(A \cup B)$.
- c) $P(A)$.
- d) $P(\bar{B}|\bar{A})$.

Nota: \bar{S} denota el suceso complementario del suceso S . $P(S|T)$ denota la probabilidad del suceso S condicionada al suceso T .

Solución:

a)

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \implies P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A|B)} = \frac{0,1}{0,5} = 0,2$$

b)

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 0,6$$

$$P(A \cup B) = 0,4$$

c)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \implies$$

$$P(A) = P(A \cup B) + P(A \cap B) - P(B) = 0,4 + 0,1 - 0,2 = 0,3$$

d)

$$P(\bar{B}|\bar{A}) = \frac{P(\bar{B} \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{0,6}{0,7} = 0,86$$

Problema 13.4.4 (2 puntos) Se supone que el gasto que hacen los individuos de una determinada población en regalos de Navidad se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica igual a 45 euros.

- a) Se toma una muestra aleatoria simple y se obtiene el intervalo de confianza $(251,6 ; 271,2)$ para μ , con un nivel de confianza del 95 %. Calcúlese la media muestral y el tamaño de la muestra elegida.
- b) Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 64 para estimar μ . Calcúlese el error máximo cometido por esa estimación con un nivel de confianza del 90 %.

Solución:

- a) $N(\mu, 45)$, $z_{\alpha/2} = 1,96$:

$$IC = (251,6; 271,2) = (\bar{X} - E, \bar{X} + E) \implies \begin{cases} \bar{X} - E = 251,6 \\ \bar{X} + E = 271,2 \end{cases} \implies \begin{cases} \bar{X} = 261,4 \\ E = 9,8 \end{cases}$$

$$E = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \implies n = 81$$

- b) $n = 64$, $z_{\alpha/2} = 1,645$:

$$E = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 9,253$$