Representación de funciones

Ejercicio nº 1.-

Representa una función polinómica $f(x)$, de la que sabemos que :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$
- **Su derivada es 0 en $(-2, -2)$ y en $(0, 2)$.**
- **Corta a los ejes en $(-3, 0)$, $(-1, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 2)$.**

Ejercicio nº 2.-

Dibuja la gráfica de la función $f(x)$, sabiendo que:

- **Su derivada se anula en $(0, 0)$.**
- **Solo corta a los ejes en $(0, 0)$.**
- **Sus asíntotas son: $x = -2$, $x = 2$ e $y = 0$**
- **La posición de la curva respecto a las asíntotas es:**

$$\begin{cases} \text{Si} \quad x \to -\infty, \quad y < 0 \\ \text{Si} \quad x \to +\infty, \quad y < 0 \end{cases}$$

- $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = -\infty; \quad \lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x\to2^-} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x\to2^+} f(x) = -\infty$

Ejercicio nº 3.-

Haz la gráfica de una función $f(x)$, sabiendo que :

- **Es continua.**
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$
- **Su derivada se anula en $(-3, -2)$, en $(0, 2)$ y en $(2, -3)$.**
- **Corta a los ejes en los puntos $(-4, 0)$, $(-2, 0)$, $(1, 0)$, $(3, 0)$ y $(0, 2)$.**

Ejercicio nº 4.-

Representa una función *f(x)*, de la que sabemos lo siguiente:

- **La derivada no se anula en ningún punto.**
- **La función es decreciente.**
- **Corta a los ejes en (–1, 0) y en (0, –1)**
- $\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = -\infty; \quad \lim\limits_{x\to2^+} f(x) = +\infty$
- **Tiene una asíntota horizontal en $y = 1$. Además:**

$$\begin{cases} \text{Si} \ x \to -\infty, \ y < 1 \\ \text{Si} \ x \to -\infty, \ y > 1 \end{cases}$$

Ejercicio nº 5.-

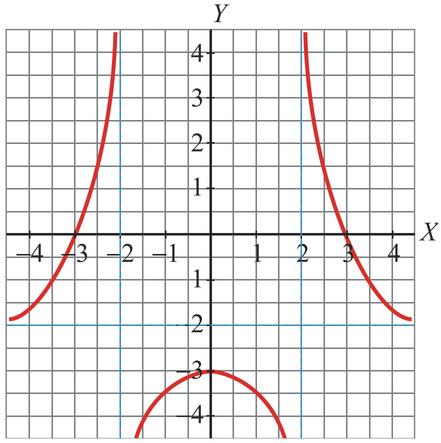
Representa gráficamente una función $f(x)$, de la que conocemos lo siguiente:

- **Su derivada se anula en $(-1, -4)$ y en $(1, 4)$.**
- **No corta a los ejes.**
- $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty; \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$
- **Tiene una asíntota oblicua, que es $y = 2x$. Además:**

$$\begin{cases} \text{Si} \quad x \to -\infty, & \text{la curva está por debajo de la asíntota.} \\ \text{Si} \quad x \to +\infty, & \text{la curva está por encima de la asíntota.} \end{cases}$$

Ejercicio nº 6.-

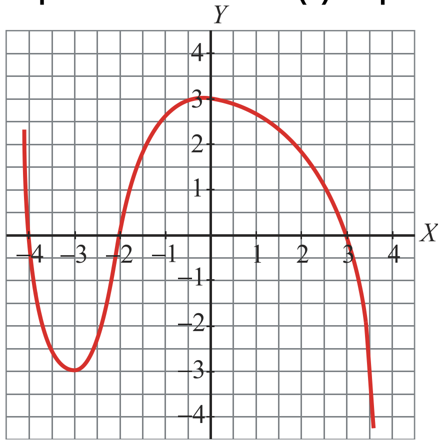
La siguiente gráfica corresponde a la función *f (x)*:



a) ¿En qué puntos se anula la derivada?
b) ¿Cuáles son sus asíntotas?
c) Indica la posición de la curva respecto a sus asíntotas verticales.

Ejercicio nº 7.-

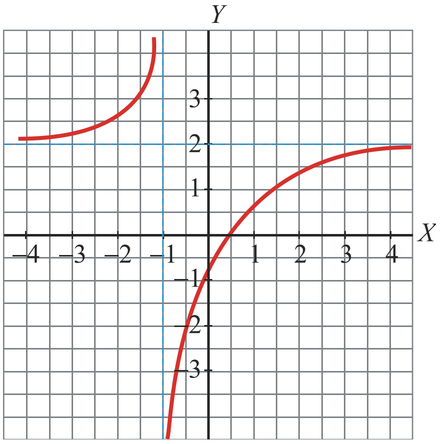
La siguiente gráfica corresponde a la función *f*(x). A partir de ella, indica:



a) Máximos y mínimos.
b) Puntos de corte con los ejes.
c) Ramas infinitas.
d) Intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

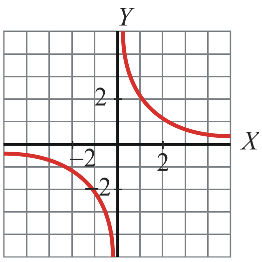
Ejercicio nº 8.-

A partir de la gráfica de *f* (x), di cuáles son sus asíntotas, indica la posición de la curva respecto a ellas y halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función:



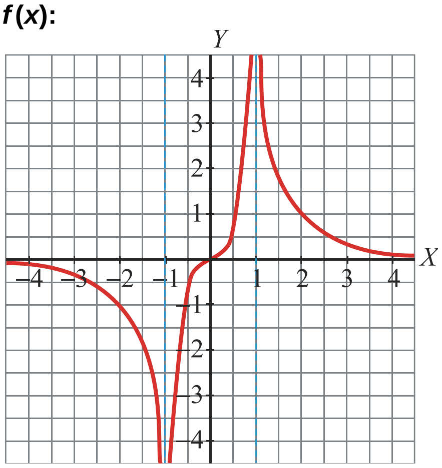
Ejercicio nº 9.-

Dada la gráfica de *f*(x), di cuáles son sus asíntotas e indica la posición de la curva respecto a ellas. Halla también los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función:



Ejercicio nº 10.-

A partir de la gráfica de *f* (*x*):



a) ¿Cuáles son los puntos de corte con los ejes?
b) Di cuáles son sus asíntotas.
c) Indica la posición de la curva respecto a las asíntotas verticales.

Ejercicio nº 11.-

Representa la siguiente función, estudiando los aspectos que consideres más relevantes:

$$f(x) = x^3 - 12x$$

Ejercicio nº 12.-

Estudia y representa la siguiente función:

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$$

Ejercicio nº 13.-

Estudia y representa la siguiente función:

$$f(x) = x^3 + 3x^2$$

Ejercicio nº 14.-

Estudia y representa la función:

$$f(x) = x^4 + 2x^2 + 1$$

Ejercicio nº 15.-

Estudia y representa la función:

$$f(x) = x^4 - 2x^2$$

Ejercicio nº 16.-

Representa gráficamente la siguiente función, estudiando previamente los aspectos que consideres más relevantes:

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1}$$

Ejercicio nº 17.-

Estudia y representa la siguiente función:

$$f(x) = \frac{x^2}{x-2}$$

Ejercicio nº 18.-

Estudia y representa la función:

$$f(x) = \frac{x+3}{x-1}$$

Ejercicio nº 19.-

Dada la función:

$$f(x) = \frac{3x}{x-3}$$

estudia sus aspectos más relevantes y represéntala gráficamente.

Ejercicio nº 20.-

Estudia y representa la siguiente función:

$$f(x)=\frac{3x}{x-2}$$

Ejercicio nº 21.-

Estudia y representa la siguiente función:

$$f(x)=\frac{x^3}{x-2}$$

Ejercicio nº 22.-

Dada la función:

$$f(x)=\frac{x^3-2}{x}$$

estudia sus aspectos más relevantes y represéntala gráficamente.

Ejercicio nº 23.-

Representa gráficamente la siguiente función, estudiando los aspectos que consideres más relevantes:

$$f(x)=\frac{x^3+2}{x}$$

Ejercicio nº 24.-

Estudia y representa la función:

$$f(x)=\frac{x^3}{x+2}$$

Ejercicio nº 25.-

Estudia y representa la siguiente función:

$$f(x)=\frac{x^4-1}{x}$$

Ejercicio nº 26.-

Dada la función

$$f(x)=\frac{2x^2+1}{x^2}$$

estudia sus aspectos más relevantes y represéntala gráficamente.

Ejercicio nº 27.-

Estudia y representa la siguiente función:

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 4}$$

Ejercicio nº 28.-

Estudia y representa la función:

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$$

Ejercicio nº 29.-

Estudia y representa la siguiente función:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 1}$$

Ejercicio nº 30.-

Representa gráficamente la siguiente función, estudiando previamente los aspectos que consideres más relevantes:

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$$

Ejercicio nº 31.-

Estudia y representa la siguiente función:

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$$

Ejercicio nº 32.-

Dada la función

$$f(x) = \frac{x^3 + 4}{x^2},$$

estudia sus aspectos más relevantes y represéntala gráficamente.

Ejercicio nº 33.-

Estudia y representa la función:

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 2x + 1}$$

Ejercicio nº 34.-

Estudia y representa la función:

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 2x + 1}$$

Ejercicio nº 35.-

Representa gráficamente la siguiente función, estudiando previamente los aspectos que consideres más relevantes:

$$f(x) = \frac{2x^3}{x^2 + 2}$$

Ejercicio nº 36.-

Representa gráficamente la siguiente función, estudiando previamente los aspectos que consideres más relevantes:

$$f(x) = \frac{x^4 - 4}{x^2 - 1}$$

Ejercicio nº 37.-

Estudia y representa la función:

$$f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^2}$$

Ejercicio nº 38.-

Estudia y representa la función:

$$f(x) = \frac{x^4}{x^2 + 1}$$

Ejercicio nº 39.-

Dada la función

$$f(x) = \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^2}$$

estudia sus aspectos más relevantes y represéntala gráficamente.

Ejercicio nº 40.-

Estudia y representa la siguiente función:

$$f(x) = \frac{2x^5}{x^2 + 1}$$

SOLUCIONES

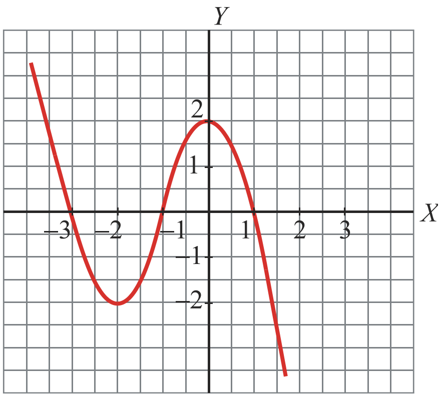
Representación de funciones

Ejercicio nº 1.-

Representa una función polinómica $f(x)$, de la que sabemos que :

- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$
- **Su derivada es 0 en $(-2, -2)$ y en $(0, 2)$.**
- **Corta a los ejes en $(-3, 0)$, $(-1, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 2)$.**

Solución:



Ejercicio nº 2.-

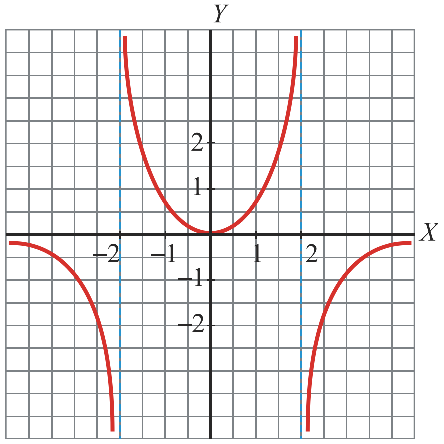
Dibuja la gráfica de la función $f(x)$, sabiendo que:

- **Su derivada se anula en $(0, 0)$.**
- **Solo corta a los ejes en $(0,0)$.**
- **Sus asíntotas son: $x = -2$, $x = 2$ e $y = 0$**
- **La posición de la curva respecto a las asíntotas es:**

$$\begin{cases} \text{Si} \quad x \to -\infty, \quad y < 0 \\ \text{Si} \quad x \to +\infty, \quad y < 0 \end{cases}$$

- $\lim_{x \to -2^-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \to -2^+} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to 2^-} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$

Solución:

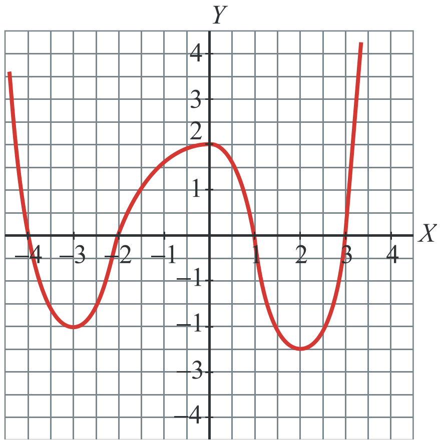


Ejercicio nº 3.-

Haz la gráfica de una función $f(x)$, sabiendo que :

- **Es continua.**
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$
- **Su derivada se anula en $(-3, -2)$, en $(0, 2)$ y en $(2, -3)$.**
- **Corta a los ejes en los puntos $(-4, 0)$, $(-2, 0)$, $(1, 0)$, $(3, 0)$ y $(0, 2)$.**

Solución:



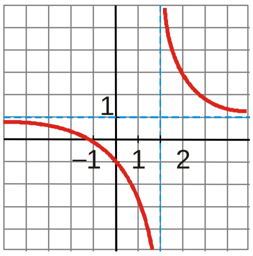
Ejercicio nº 4.-

Representa una función *f(x)*, de la que sabemos lo siguiente:

- **La derivada no se anula en ningún punto.**
- **La función es decreciente.**
- **Corta a los ejes en (–1, 0) y en (0, –1)**
- $\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$; $\quad \lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$
- **Tiene una asíntota horizontal en $y = 1$. Además:**

$$\begin{cases} \text{Si } x \to -\infty, \ y < 1 \\ \text{Si } x \to -\infty, \ y > 1 \end{cases}$$

Solución:



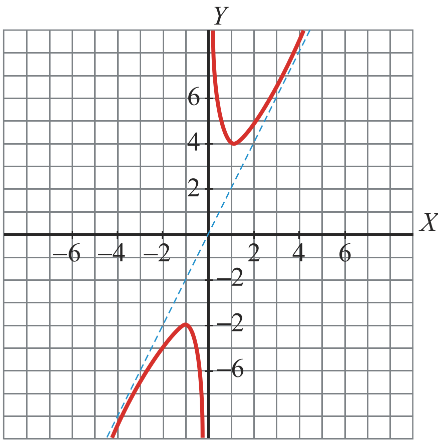
Ejercicio nº 5.-

Representa gráficamente una función $f(x)$, de la que conocemos lo siguiente:

- **Su derivada se anula en $(-1, -4)$ y en $(1, 4)$.**
- **No corta a los ejes.**
- $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$
- **Tiene una asíntota oblicua, que es $y = 2x$. Además:**

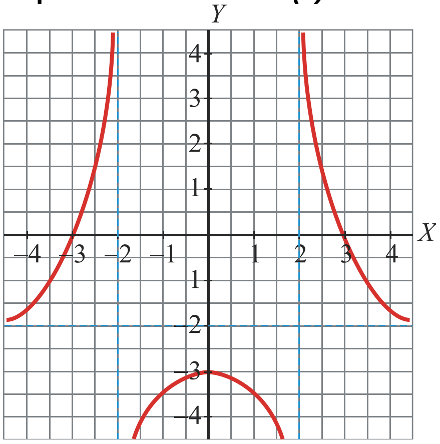
$$\begin{cases} \text{Si } x \to -\infty, & \text{la curva está por debajo de la asíntota.} \\ \text{Si } x \to +\infty, & \text{la curva está por encima de la asíntota.} \end{cases}$$

Solución:



Ejercicio nº 6.-

La siguiente gráfica corresponde a la función *f(x)*:



a) ¿En qué puntos se anula la derivada?
b) ¿Cuáles son sus asíntotas?
c) Indica la posición de la curva respecto a sus asíntotas verticales.

Solución:

a) $\left.\begin{array}{l} f'(0)=0 \\ f(0)=-3 \end{array}\right\}$ Hay un máximo en $(0,-3)$

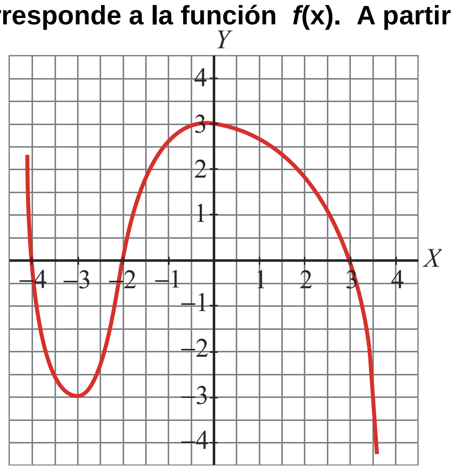
b) Asíntotas verticales: $x=-2$, $x=2$
Asíntota horizontal: $y=-2$

c) $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=+\infty;\qquad \lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=-\infty;\qquad \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$

Ejercicio nº 7.-

La siguiente gráfica corresponde a la función *f*(x). A partir de ella, indica:



a) Máximos y mínimos.
b) Puntos de corte con los ejes.
c) Ramas infinitas.
d) Intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

Solución:

a) $\left.\begin{array}{l} f'(-3)=0 \\ f(-3)=-3 \end{array}\right\}$ Hay un mínimo en $(-3,-3)$

$\left.\begin{array}{l} f'(0)=0 \\ f(0)=3 \end{array}\right\}$ Hay un máximo en $(0,\ 3)$

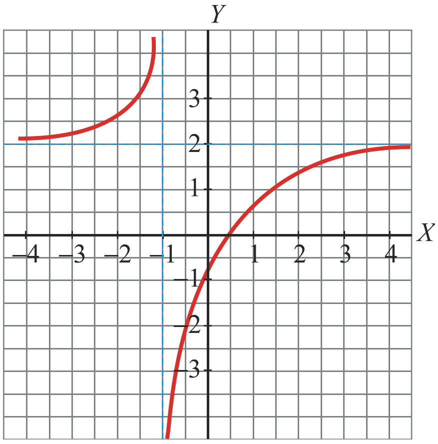
b) $(-4,\ 0)$, $(-2,\ 0)$, $(3,\ 0)$ y $(0,\ 3)$.

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=-\infty;\qquad \lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=+\infty$

d) Decrece en $(-\infty,\ -3)$ y en $(0,\ +\infty)$; crece en $(-3,\ 0)$.

Ejercicio nº 8.-

A partir de la gráfica de *f*(x), di cuáles son sus asíntotas, indica la posición de la curva respecto a ellas y halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función:



Solución:

- Asíntota vertical: $x = -1$

  Posición de la curva:
  $\lim_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$

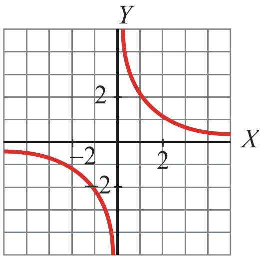
- Asíntota horizontal: $y = 2$

  Posición de la curva:
  $\begin{cases} \text{Si} \quad x \to -\infty, \quad y > 2 \\ \text{Si} \quad x \to +\infty, \quad y < 2 \end{cases}$

- La función es creciente en $(-\infty, -1)$ y en $(-1, +\infty)$.

<u>Ejercicio nº 9.-</u>

Dada la gráfica de *f*(x), di cuáles son sus asíntotas e indica la posición de la curva respecto a ellas. Halla también los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función:



Solución:

- Asíntota vertical: $x = 0$

  Posición de la curva:

  $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

  Asíntota horizontal: $y = 0$

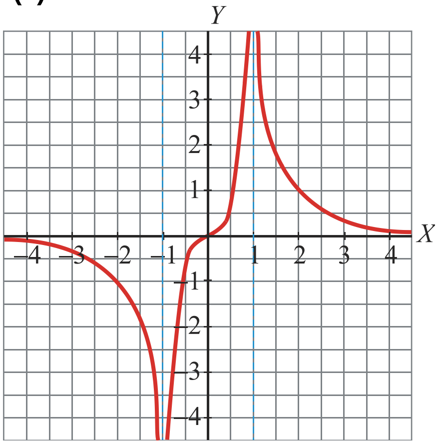
  Posición de la curva:

$$\begin{cases} \text{Si} \quad x \to -\infty, \quad y < 0 \\ \text{Si} \quad x \to +\infty, \quad y > 0 \end{cases}$$

- La función es decreciente en $(-\infty, 0)$ y en $(0, +\infty)$.

<u>Ejercicio nº 10.-</u>

A partir de la gráfica de $f(x)$:



a) ¿Cuáles son los puntos de corte con los ejes?
b) Di cuáles son sus asíntotas.
c) Indica la posición de la curva respecto a las asíntotas verticales.

Solución:

a) (0, 0)
b) Asíntotas verticales: $x = -1$, $x = 1$
Asíntota horizontal: $y = 0$

c) $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$; $\quad \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$; $\quad \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$

<u>Ejercicio nº 11.-</u>

Representa la siguiente función, estudiando los aspectos que consideres más relevantes:

$$\boldsymbol{f(x) = x^3 - 12x}$$

Solución:

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^3 - 12x\right) = +\infty$; $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^3 - 12x\right) = -\infty$
- Puntos de corte con los ejes:

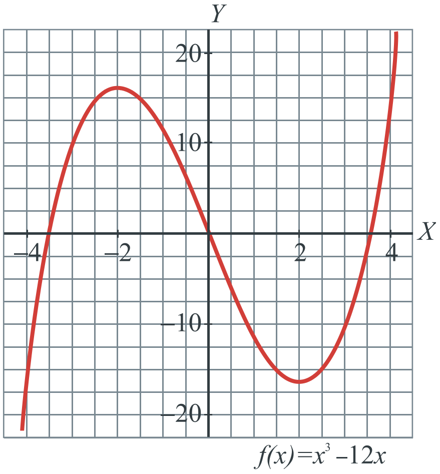
Con el eje X $\to$ $x^3 - 12x = x\left(x^2 - 12\right) = 0 \begin{cases} x = -\sqrt{12} \to \text{Punto } \left(-\sqrt{12}, 0\right) \\ x = 0 \to \text{Punto } (0, 0) \\ x = \sqrt{12} \to \text{Punto } \left(\sqrt{12}, 0\right) \end{cases}$

Con el eje Y $\to$ $x = 0$ $\to$ $y = 0$

- Puntos singulares:

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = -2 & \rightarrow & \text{Punto}(-2, 16) \\ x = 2 & \rightarrow & \text{Punto}(2, -16) \end{cases}$$

- Gráfica:



<u>Ejercicio nº 12.-</u>

Estudia y representa la siguiente función:

$$\boldsymbol{f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x}$$

Solución:

- $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - 4x^2 + 4x) = +\infty; \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 - 4x^2 + 4x) = -\infty$

- Puntos de corte con los ejes:

$$\text{Con el eje } X \rightarrow \quad x^3 - 4x^2 + 4x = x(x^2 - 4x + 4) = 0 \begin{cases} x = 0 & \rightarrow & \text{Punto } (0,\ 0) \\ x = 2 & \rightarrow & \text{Punto } (2,\ 0) \end{cases}$$

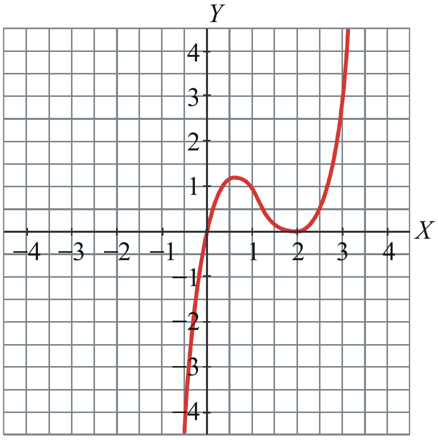
$$\text{Con el eje } Y \rightarrow \quad x = 0 \quad \rightarrow \quad y = 0 \quad \rightarrow \quad \text{Punto } (0,\ 0)$$

- Puntos singulares:

$$f'(x) = 3x^2 - 8x + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{6} = \frac{8 \pm 4}{6} \begin{cases} x = 2 \\ x = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Puntos $(2,\ 0)$ y $\left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{32}{27}\right)$.

- Gráfica:



$f(x)=x^3-4x^2+4x$

Ejercicio nº 13.-

Estudia y representa la siguiente función:

$$f(x)=x^3+3x^2$$

Solución:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3+3x^2\right)=+\infty; \qquad \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3+3x^2\right)=-\infty$

- Puntos de corte con los ejes:

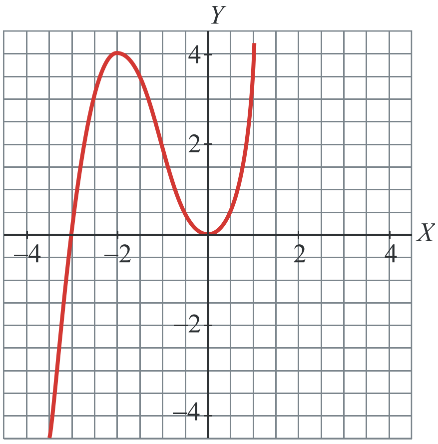
  Con el eje $X \rightarrow x^3+3x^2=0 \quad \Rightarrow \quad x^2(x+3)=0 \begin{cases} x=0 \rightarrow \text{Punto } (0,0) \\ x=-2 \rightarrow \text{Punto } (-2,\ 4) \end{cases}$

  Con el eje Y: $x=0 \quad \Rightarrow \quad y=0 \quad \rightarrow \quad \text{Punto}(0,\ 0)$

- Puntos singulares:

  $f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)=0 \begin{cases} x=0 \rightarrow \text{Punto } (0,0) \\ x=-2 \rightarrow \text{Punto } (-2,\ 4) \end{cases}$

- Gráfica:



$y=x^3+3x^2$

Ejercicio nº 14.-

Estudia y representa la función:

$$f(x)=x^4+2x^2+1$$

Solución:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^4+2x^2+1\right)=+\infty; \qquad \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^4+2x^2+1\right)=+\infty$

- Puntos de corte con los ejes:

  Con el eje $X \;\rightarrow\;\; x^4+2x^2+1=0.$ Cambio $x^2=z$

  $$z^2+2z+1=0$$

  $$z=\frac{-2\pm\sqrt{4-4}}{2}=\frac{-2}{2}=-1 \quad (\text{no nos da un valor real para } x).$$

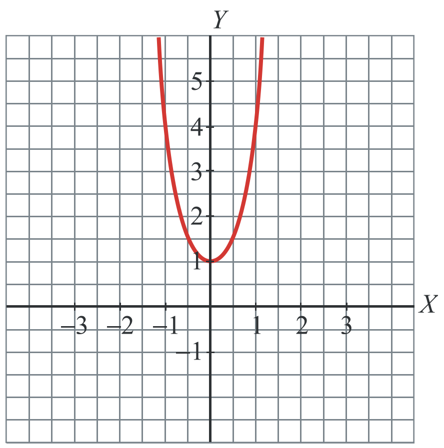
  No corta al eje X.

  Con el eje $Y \;\rightarrow\;\; x=0 \;\rightarrow\;\; y=1 \;\rightarrow\;\;$ Punto $(0,\,1)$

- Puntos singulares:

  $f'(x)=4x^3+4x=4x\left(x^2+1\right)=0 \Rightarrow x=0 \rightarrow \quad$ Punto$(0,1)$

- Gráfica:



$f(x)=x^4+2x^2+1$

<u>Ejercicio nº 15.-</u>

Estudia y representa la función:

$$\boldsymbol{f(x)=x^4-2x^2}$$

Solución:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^4-2x^2\right)=+\infty; \qquad \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^4-2x^2\right)=+\infty$

- Puntos de corte con los ejes:

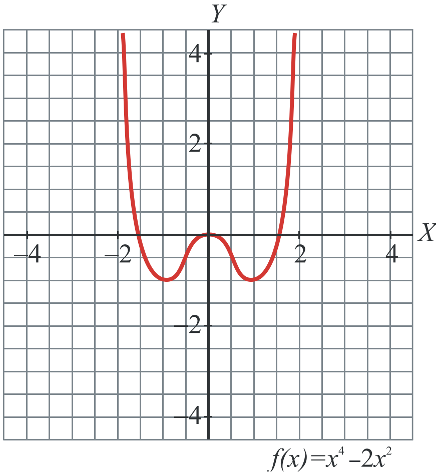
  $$\text{Con el eje } X \rightarrow\; x^4-2x^2=0 \;\Rightarrow\; x^2\left(x^2-2\right)=0\begin{cases} x=-\sqrt{2} \rightarrow \text{Punto}(-\sqrt{2},\ 0) \\ x=0 \rightarrow \text{Punto }(0,\,0) \\ x=-\sqrt{2} \rightarrow \text{Punto}(-\sqrt{2},\ 0)\end{cases}$$

  Con el eje $Y \;\rightarrow x=0 \;\rightarrow\;\; y=0 \;\rightarrow\;\;$ Punto $(0,0)$

- Puntos singulares:

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x\left(x^2 - 1\right) = 0 \quad \begin{cases} x = -1 \;\rightarrow\; \text{Punto } (-1,\,-1) \\ x = 0 \;\rightarrow\; \text{Punto } (0,\,0) \\ x = 1 \;\rightarrow\; \text{Punto } (1,\,-1) \end{cases}$$

- Gráfica:



Ejercicio nº 16.-

Representa gráficamente la siguiente función, estudiando previamente los aspectos que consideres más relevantes:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x^2}{x+1}}$$

Solución:

- Dominio $= \mathbf{R} - \{-1\}$

- Puntos de corte con los ejes:

  Con el eje $X \rightarrow \quad y = 0 \quad \rightarrow \quad \dfrac{x^2}{x+1} = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0 \quad \rightarrow \quad \text{Punto}\left(0,\ 0\right)$

  Con el eje $Y \rightarrow \quad x = 0 \quad \rightarrow \quad y = 0 \quad \rightarrow \quad \text{Punto}\left(0,\ 0\right)$

- Asíntotas verticales: $x = -1$

  $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty; \qquad \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$

- Asíntota oblicua:

  $\dfrac{x^2}{x+1} = x - 1 + \dfrac{1}{x+1} \quad \Rightarrow \quad y = x - 1$ es asíntota oblicua.

  Si $x \rightarrow +\infty, \ \dfrac{1}{x+1} > 0 \quad \Rightarrow$ La curva está por encima de la asíntota.

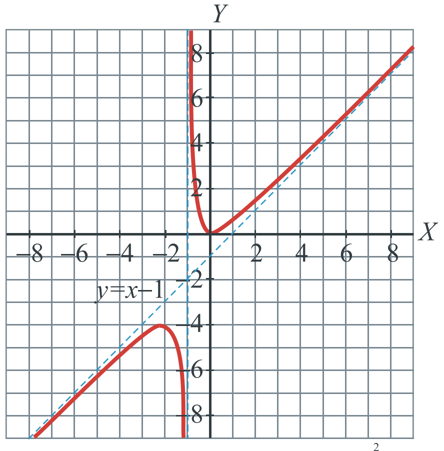
  Si $x \rightarrow -\infty, \ \dfrac{1}{x+1} < 0 \quad \Rightarrow$ La curva está por debajo de la asíntota.

- Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{2x(x+1) - x^2}{(x+1)^2} = \frac{2x^2 + 2x - x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x(x+2) = 0 \begin{cases} x = 0 & \rightarrow \quad \text{Punto}(0,\ 0) \\ x = -2 & \rightarrow \quad \text{Punto}(-2,\ -4) \end{cases}$$

- Gráfica:



$f(x) = \frac{x^2}{x+1}$

Ejercicio nº 17.-

Estudia y representa la siguiente función:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x^2}{x-2}}$$

Solución:

- Dominio = **R** − {2}

- Puntos de corte con los ejes:

  Con el eje $X \ \rightarrow \ y = 0 \ \rightarrow \ \frac{x^2}{x-2} = 0 \ \rightarrow \ x = 0 \ \rightarrow \ \text{Punto}(0,\ 0)$

  Con el eje $Y \ \rightarrow \ x = 0 \ \rightarrow \ y = 0 \ \rightarrow \ \text{Punto}(0,\ 0)$

- Asíntota vertical: $x = 2$

  $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty; \qquad \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

  Asíntota oblicua:

  $\frac{x^2}{x-2} = x + 2 + \frac{4}{x-2} \quad \Rightarrow \quad y = x + 2$ es asíntota oblicua.

  Si $x \to +\infty,\ \frac{4}{x-2} > 0 \quad \Rightarrow$ La curva está por encima de la asíntota.

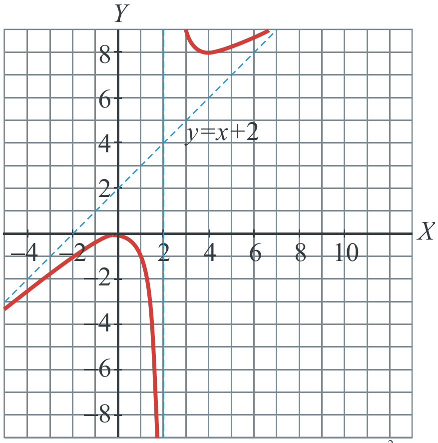
  Si $x \to -\infty,\ \frac{4}{x-2} < 0 \quad \Rightarrow$ La curva está por debajo de la asíntota.

- Puntos singulares:

$$f'(x)=\frac{2x(x-2)-x^2}{(x-2)^2}=\frac{2x^2-4x-x^2}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x}{(x-2)^2}=\frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$$

$$f'(x)=0 \quad \Rightarrow \quad x(x-4)=0 \quad \Rightarrow \begin{cases} x=0 \rightarrow \text{ Punto}(0,\ 0) \\ x=4 \rightarrow \text{ Punto}(4,\ 8) \end{cases}$$

- Gráfica:



$f(x)=\frac{x^2}{x-2}$

Ejercicio nº 18.-

Estudia y representa la función:

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{x+3}{x-1}}$$

Solución:

- Dominio $=\mathbf{R}\ -\ \{1\}$

- Puntos de corte con los ejes:

$$\text{Con el eje } X \ \rightarrow \ y=0 \ \rightarrow \ \frac{x+3}{x-1}=0 \ \Rightarrow \ x+3=0 \ \Rightarrow \ x=-3 \ \rightarrow \ \text{Punto}(-3,\ 0)$$

$$\text{Con el eje } Y \ \rightarrow \ x=0 \ \rightarrow \ y=\frac{3}{-1}=-3 \ \rightarrow \ \text{Punto }(0,\ -3)$$

- Asíntota vertical: $x=1$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=-\infty; \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$$

Asíntota horizontal: $y=1$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=1, \text{ con } y>1$$

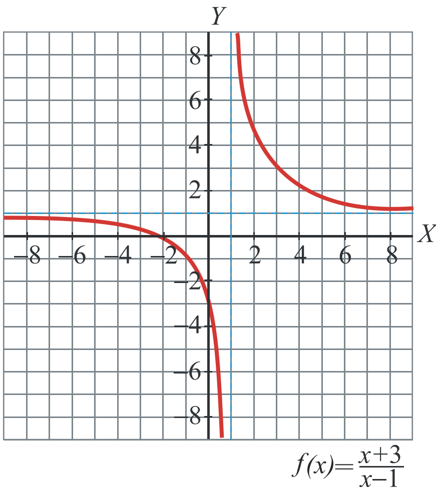
$$\lim_{x\to -\infty} f(x)=1, \text{ con } y<1$$

- Puntos singulares:

$$f'(x)=\frac{x-1-(x+3)}{(x-1)^2}=\frac{x-1-x-3}{(x-1)^2}=\frac{-4}{(x-1)^2}\neq 0$$

No tiene puntos singulares.

- Gráfica:



Ejercicio nº 19.-

Dada la función:

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{3x}{x-3}}$$

estudia sus aspectos más relevantes y represéntala gráficamente.

Solución:

- Dominio $= \mathbf{R} - \{3\}$

- Puntos de corte con los ejes:

  $$\text{Con el eje } X \;\rightarrow\; y=0 \;\rightarrow\; \frac{3x}{x-3}=0 \;\rightarrow\; x=0 \;\rightarrow\; \text{Punto}(0,0)$$

  $$\text{Con el eje } Y \;\rightarrow\; x=0 \;\rightarrow\; y=0 \;\rightarrow\; \text{Punto}(0,0)$$

- Asíntota vertical: $x=3$

  $$\lim_{x\to 3^-}\frac{3x}{x-3}=-\infty; \qquad \lim_{x\to 3^+}\frac{3x}{x-3}=+\infty$$

  Asíntota horizontal: $y=3$

  $$\lim_{x\to +\infty} f(x)=3, \text{ con } y>3$$

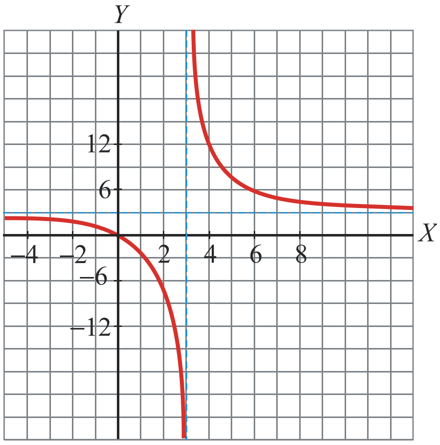
  $$\lim_{x\to -\infty} f(x)=3, \text{ con } y<3$$

- Puntos singulares:

  $$f'(x)\frac{3(x-3)-3x}{(x-3)^2}=\frac{3x-9-3x}{(x-3)^2}=\frac{-9}{(x-3)^2}\neq 0$$

  No tiene puntos singulares.

- Gráfica:



$f(x) = \frac{3x}{x-3}$

Ejercicio nº 20.-

Estudia y representa la siguiente función:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{3x}{x-2}}$$

Solución:

- Dominio $= \mathbf{R} - \{2\}$

- Puntos de corte con los ejes:

  $\text{Con el eje } X \rightarrow \quad y = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{3x}{x-2} = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0 \quad \rightarrow \quad \text{Punto}(0,\ 0)$

  $\text{Con el eje } Y \rightarrow \quad x = 0 \quad \rightarrow \quad y = 0 \quad \rightarrow \quad \text{Punto}(0,\ 0)$

- Asíntota vertical: $x = 2$

  $\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty \quad ; \quad \lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

  Asíntota horizontal: $y = 3$

  $\lim_{x \to +\infty} \frac{3x}{x-2} = 3, \text{ con } y > 3$

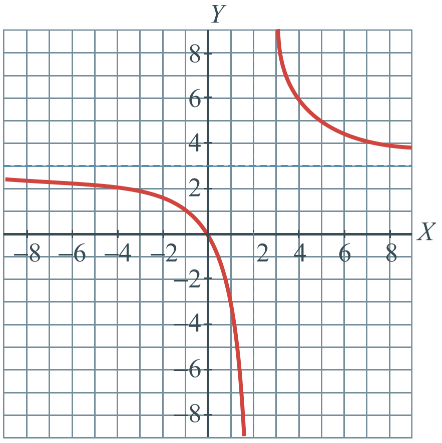
  $\lim_{x \to -\infty} \frac{3x}{x-2} = 3, \text{ con } y < 3$

- Puntos singulares:

  $f'(x) = \frac{3(x-2) - 3x}{(x-2)^2} = \frac{3x - 6 - 3x}{(x-2)^2} = \frac{-6}{(x-2)^2} \neq 0$

  No tiene puntos singulares.

- Gráfica:



$f(x)=\frac{3x}{x-2}$

Ejercicio nº 21.-

Estudia y representa la siguiente función:

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{x^3}{x-2}}$$

Solución:

- Dominio = **R** − {2}

- Puntos de corte con los ejes:

  $\text{Con el eje } X \rightarrow \quad y=0 \quad \rightarrow \quad \frac{x^3}{x-2}=0 \quad \rightarrow \quad x=0 \quad \rightarrow \quad \text{Punto}(0,\ 0)$

  $\text{Con el eje } Y \rightarrow \quad x=0 \quad \rightarrow \quad y=0 \quad \rightarrow \quad \text{Punto}(0,\ 0)$

- Asíntota vertical: $x = 2$

  $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=-\infty; \qquad \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$

  Rama parabólica (pues el grado del numerador es dos unidades mayor que el grado del denominador).

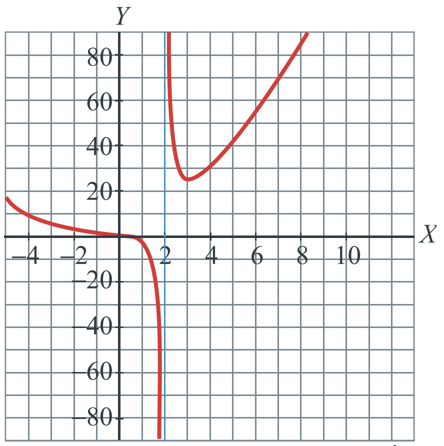
  $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty; \qquad \lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=+\infty$

- Puntos singulares

  $$f'(x)=\frac{3x^2(x-2)-x^3}{(x-2)^2}=\frac{3x^3-6x^2-x^3}{(x-2)^2}=\frac{2x^3-6x^2}{(x-2)^2}=\frac{2x^2(x-3)}{(x-2)^2}$$

  $$f'(x)=0 \quad \Rightarrow \quad 2x^2(x-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \quad \rightarrow \quad \text{Punto} \quad (0,\ 0) \\ \\ x=0 \quad \rightarrow \quad \text{Punto} \quad (3,\ 27) \end{cases}$$

- Gráfica:



$f(x)=\dfrac{x^3}{x-2}$

Ejercicio nº 22.-

Dada la función:

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{x^3-2}{x}}$$

estudia sus aspectos más relevantes y represéntala gráficamente.

Solución:

- Dominio = **R** $-$ {0}

- Puntos de corte con los ejes:

  $$\text{Con el eje } X \;\rightarrow\; y=0 \;\rightarrow\; \frac{x^3-2}{x}=0 \rightarrow x^3-2=0 \;\rightarrow$$
  $$\rightarrow\; x=\sqrt[3]{2}\approx 1{,}3 \quad\rightarrow\quad \text{Punto}(1{,}3;\,0)$$

  Con el eje $Y \rightarrow$ No corta al eje Y, pues $x=0$ no pertenece al dominio.

- Asíntota vertical: $x=0$

  $$\lim_{x\to 0^-} f(x)=+\infty; \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$$

- Rama parabólica (pues el grado del numerador es de dos unidades mayor que el del denominador).

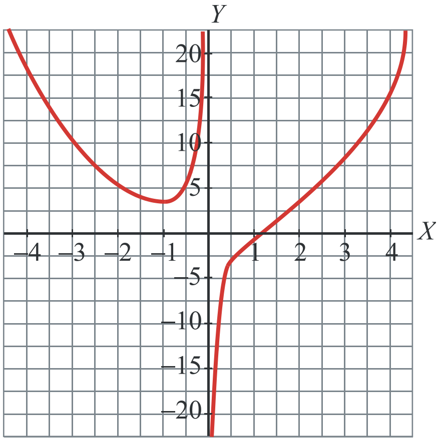
  $$\lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty; \qquad \lim_{x\to -\infty} f(x)=+\infty$$

- Puntos singulares:

  $$f'(x)=\frac{3x^2x-\left(x^3-2\right)}{x^2}=\frac{3x^3-x^3+2}{x^2}=\frac{2x^3+2}{x^2}=\frac{2\left(x^3+1\right)}{x^2}$$

  $$f'(x)=0 \;\Rightarrow\; 2\left(x^3+1\right)=0 \;\Rightarrow\; x^3+1=0 \;\Rightarrow\; x^3=-1 \;\Rightarrow\; x=\sqrt[3]{-1}=-1 \;\rightarrow\; \text{Punto}(-1,3)$$

- Gráfica:



$f(x)=\dfrac{x^3-2}{x}$

Ejercicio nº 23.-

Representa gráficamente la siguiente función, estudiando los aspectos que consideres más relevantes:

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{x^3+2}{x}}$$

Solución:

- Dominio $=$ **R** $-$ {0}

- Puntos de corte con los ejes:

$$\text{Con el eje } X \to y=0 \quad \to \quad \frac{x^3+2}{x}=0 \quad \to \quad x^3+2=0 \quad \to$$
$$\to x=\sqrt[3]{-2}\approx -1{,}3 \quad \to \quad \text{Punto } (-1{,}3;\,0)$$

Con el eje $Y \to$ No corta el eje Y, pues $x=0$ no está en el dominio.

- Asíntota vertical: $x=0$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=-\infty; \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$$

Rama parabólica (pues el grado del numerador es dos unidades mayor que el del denominador).

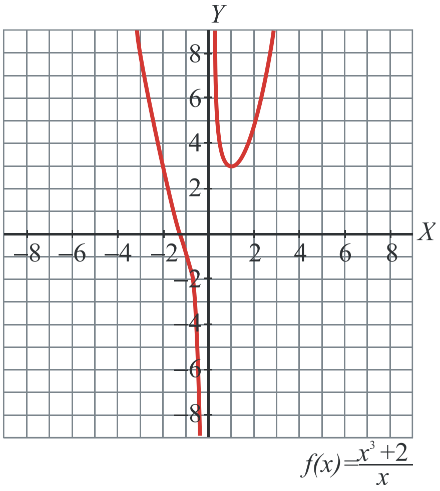
$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty; \qquad \lim_{x\to -\infty} f(x)=+\infty$$

- Puntos singulares:

$$f'(x)=\frac{3x^2\cdot x-\left(x^3+2\right)}{x^2}=\frac{3x^3-x^3-2}{x^2}=\frac{2x^3-2}{x^2}=\frac{2\left(x^3-1\right)}{x^2}$$

$$f'(x)=0 \quad \Rightarrow \quad 2\left(x^3-1\right)=0 \quad \Rightarrow \quad x^3-1=0 \quad \Rightarrow \quad x=\sqrt[3]{1}=1 \quad \to \quad \text{Punto}(1,\,3)$$

- Gráfica:



Ejercicio nº 24.-

Estudia y representa la función:

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{x^3}{x+2}}$$

Solución:

- Dominio $= \mathbf{R} - \{-2\}$
- Puntos de corte con los ejes:

  Con el eje $X \rightarrow y=0 \rightarrow \frac{x^3}{x+2}=0 \rightarrow x=0 \rightarrow$ Punto$(0,\ 0)$

  Con el eje $Y \rightarrow x=0 \rightarrow y=0 \rightarrow$ Punto$(0,\ 0)$

- Asíntota vertical: $x=-2$

  $\lim_{x\to -2^-} f(x)=+\infty; \qquad \lim_{x\to -2^+} f(x)=-\infty$

- Rama parabólica (pues el grado del numerador es dos unidades mayor que el del denominador).

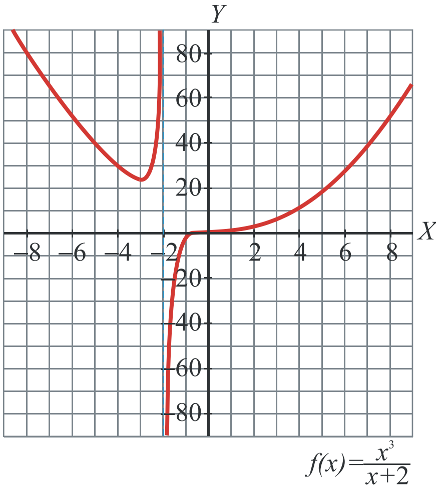
  $\lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty; \qquad \lim_{x\to -\infty} f(x)=+\infty$

- Puntos singulares:

$$f'(x)=\frac{3x^2(x+2)-x^3}{(x+2)^2}=\frac{3x^3+6x^2-x^3}{(x+2)^2}=\frac{2x^3+6x^2}{(x+2)^2}=\frac{2x^2(x+3)}{(x+2)^2}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow 2x^2(x+3)=0 \quad \begin{cases} x=0 \rightarrow \text{Punto} \quad (0,\ 0) \\ \\ x=-3 \rightarrow \text{Punto} \quad (-3,\ 27) \end{cases}$$

- Gráfica:



Ejercicio nº 25.-

Estudia y representa la siguiente función:

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{x^4-1}{x}}$$

Solución:

- Dominio = **R** − {0}

- Puntos de corte con los ejes:

  Con el eje $X \rightarrow y=0 \rightarrow \frac{x^4-1}{x}=0 \rightarrow x^4-1=0 \rightarrow x=\pm\sqrt[4]{1}=\pm 1$
  $\rightarrow$ Puntos $(1,0)$ y $(-1,0)$

  Con el eje $Y \rightarrow$ No corta al eje Y, pues $x=0$ no está en el dominio.

- Asíntota vertical: $x=0$

  $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=+\infty; \qquad \lim\limits_{x\leftarrow 0^+} f(x)=-\infty$

  Rama parabólica (pues el grado del numerador es tres unidades mayor que el del denominador).

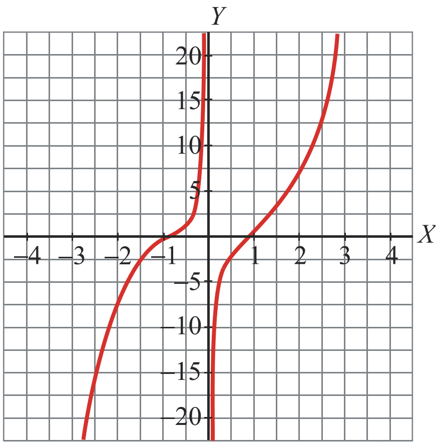
  $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty; \qquad \lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=-\infty$

- Puntos singulares:

  $$f'(x)=\frac{4x^3x-(x^4-1)}{x^2}=\frac{4x^4-x^4+1}{x^2}=\frac{3x^4+1}{x^2}\neq 0$$

  No tiene puntos singulares.

- Gráfica:



$f(x) = \frac{x^4-1}{x}$

Ejercicio nº 26.-

Dada la función

$$f(x) = \frac{2x^2+1}{x^2}$$

estudia sus aspectos más relevantes y represéntala gráficamente.

Solución:

- Dominio = **R** − {0}

- Puntos de corte con los ejes:

  Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow 2x^2 + 1 = 0 \rightarrow$ No corta al eje X.
  Con el eje $Y \rightarrow$ No corta al eje Y, pues $x = 0$ no pertenece al dominio.

- Asíntota vertical: $x = 0$

  $\lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty; \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

- Asíntota horizontal: $x = 2$

  $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2,$ con $y > 2$

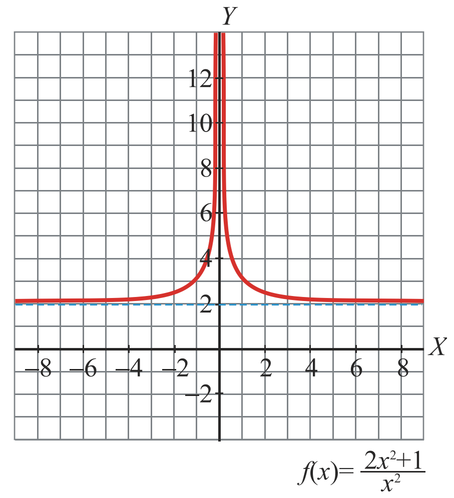
  $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2,$ con $y > 2$

- Puntos singulares:

  $$f'(x) = \frac{4x \cdot x^2 - (2x^2+1) \cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{4x^3 - 4x^3 - 2x}{x^4} = \frac{-2x}{x^4} = \frac{-2}{x^3} \neq 0$$

  No tiene puntos singulares.

- Gráfica:



<u>Ejercicio nº 27.-</u>

Estudia y representa la siguiente función:

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 4}$$

Solución:

- Dominio = **R** − {–2, 2}

- Puntos de corte con los ejes:

$$\text{Con el eje } X \;\rightarrow\; y = 0 \;\rightarrow\; \frac{2x^2}{x^2-4} = 0 \;\rightarrow\; 2x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \;\rightarrow\; \text{Punto}(0,\ 0)$$

$$\text{Con el eje } Y \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\; y = 0 \;\rightarrow\; \text{Punto}(0,\ 0)$$

- Asíntotas verticales: $x = -2$, $x = 2$

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = +\infty; \qquad \lim_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty; \qquad \lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$$

Asíntota horizontal: $y = 2$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2, \text{ con } y > 2$$

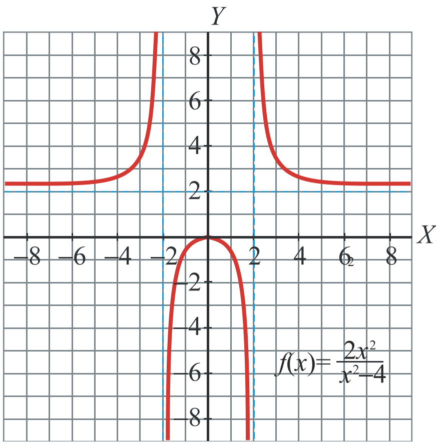
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2, \text{ con } y > 2$$

- Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{4x(x^2-4) - 2x^2 \cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{4x^3 - 16x - 4x^3}{(x^2-4)^2} = \frac{-16x}{(x^2-4)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; -16x = 0 \;\Rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\; \text{Punto}(0,\ 0)$$

- Gráfica:



<u>Ejercicio nº 28.-</u>

Estudia y representa la función:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}}$$

Solución:

- Dominio $= \mathbf{R} - \{-1, 1\}$
- Puntos de corte con los ejes:

$$\text{Con el eje } Y \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\; y = 0 \;\rightarrow\; \text{Punto}(0, 0)$$

$$\text{Con el eje } X \;\rightarrow\; y = 0 \;\rightarrow\; \frac{x^2}{x^2-1} = 0 \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\; \text{Punto}(0, 0)$$

- Asíntotas verticales: $x = -1,\ x = 1$

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = +\infty; \qquad \lim_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty; \qquad \lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$$

Asíntota horizontal: $y = 1$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1, \;\text{ con } y > 1$$

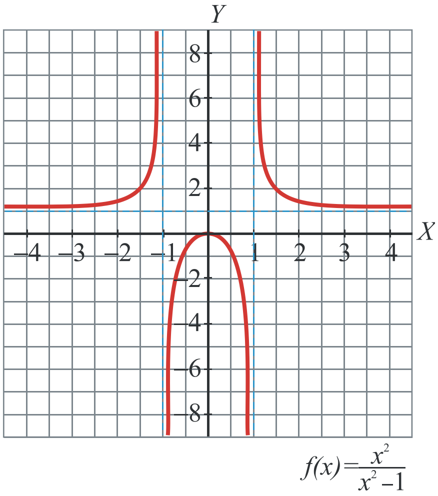
$$\lim_{x \to -\infty} f(\ ) = 1, \;\text{ con } y > 1$$

- Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{2x(x^2-1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{2x^3 - 2x - 2x^3}{(x^2-1)^2} = \frac{-2x}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; -2x = 0 \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\; \text{Punto}(0, 0)$$

- Gráfica:



Ejercicio nº 29.-

Estudia y representa la siguiente función:

$$f(x)=\frac{x^2-4}{x^2-1}$$

Solución:

- Dominio = **R** − {−1, 1}

- Puntos de corte con los ejes:

  Con el eje $X \to y=0 \to \frac{x^2-4}{x^2-1}=0 \to x^2-4=0 \to x=\pm 2 \to$
  $\to$ Puntos$(2,\ 0)$ y $(-2,\ 0)$

  Con el eje $Y \to x=0 \to y=4 \to$ Punto$(0,\ 4)$

- Asíntotas verticales: $x=-1,\ x=1$

  $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=-\infty; \qquad \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=+\infty$

  $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=+\infty; \qquad \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=-\infty$

  Asíntota horizontal: $y=1$

  $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=10,$ con $y<1$

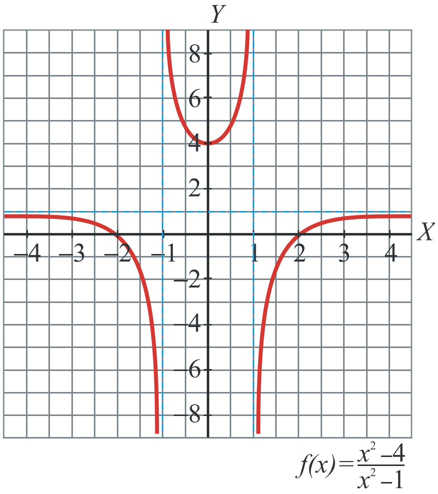
  $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=1,$ con $y<1$

- Puntos singulares:

  $$f'(x)=\frac{2x(x^2-1)-(x^2-4)\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=\frac{2x^3-2x-2x^3+8x}{(x^2-1)^2}=\frac{6x}{(x^2-1)^2}$$

  $f'(x)=0 \Rightarrow 6x=0 \Rightarrow x=0 \to$ Punto$(0,\ 4)$

- Gráfica:



Ejercicio nº 30.-

Representa gráficamente la siguiente función, estudiando previamente los aspectos que consideres más relevantes:

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}}$$

Solución:

- Dominio $=\mathbf{R}$

- Puntos de corte con los ejes:

  $\text{Con el eje } X \ \rightarrow \ y=0 \ \rightarrow \ \frac{x^2}{x^2+1}=0 \ \rightarrow \ x=0 \ \rightarrow \ \text{Punto}(0,\ 0)$

  $\text{Con el eje } Y \ \rightarrow \ x=0 \ \rightarrow \ y=0 \ \rightarrow \ \text{Punto}(0,\ 0)$

- No tiene asíntotas verticales.

  Asíntota horizontal: $y=1$

  $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1, \ \text{con } y<1$

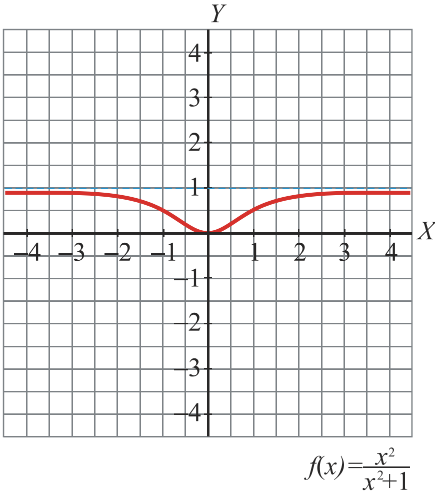
  $\lim_{x\to-\infty} f(x)=1, \ \text{con } y<1$

- Puntos singulares:

  $$f'(x)=\frac{2x\left(x^2+1\right)-x^2\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2x^3+2x-2x^3}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

  $f'(x)=0 \ \Rightarrow \ 2x=0 \ \Rightarrow \ x=0 \ \rightarrow \ \text{Punto}(0,\ 0)$

- Gráfica:



Ejercicio nº 31.-

Estudia y representa la siguiente función:

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{x^3}{x^2+1}}$$

Solución:

- Dominio $= \mathbf{R}$

- Puntos de corte con los ejes:

  Con el eje $X \;\rightarrow\; y=0 \;\rightarrow\; \frac{x^3}{x^2+1}=0 \;\rightarrow\; x=0 \;\rightarrow\;$ Punto$(0,\ 0)$

  Con el eje $Y \;\rightarrow\; x=0 \;\rightarrow\; y=0 \;\rightarrow\;$ Punto$(0,\ 0)$

- Asíntotas verticales: No tiene

  Asíntota oblicua:

  $$\frac{x^3}{x^2+1}=x+\frac{-x}{x^2+1} \;\Rightarrow\; y=x \;\text{ es asíntota oblicua}$$

  Si $x\rightarrow+\infty,\ \frac{-x}{x^2+1}<0 \;\Rightarrow\;$ La curva está por debajo de la asíntota.

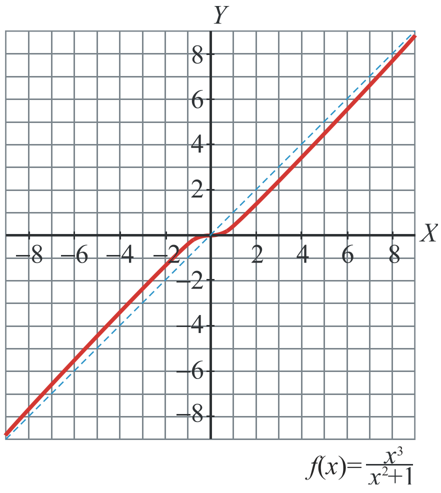
  Si $x\rightarrow-\infty,\ \frac{-x}{x^2+1}>0 \;\Rightarrow\;$ La curva está por encima de la asíntota.

- Puntos singulares:

  $$f'(x)=\frac{3x^2\cdot\left(x^2+1\right)-x^3\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{3x^4+3x^2-2x^4}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{x^4+3x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{x^2\left(x^2+3\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$$

  $$f'(x)=0 \;\Rightarrow\; x^2\left(x^2+3\right)=0 \;\Rightarrow\; x=0 \;\rightarrow\; \text{Punto}(0,\ 0)$$

- Gráfica:



<u>Ejercicio nº 32.-</u>

Dada la función

$$f(x)=\frac{x^3+4}{x^2},$$

estudia sus aspectos más relevantes y represéntala gráficamente.

Solución:

- Dominio = **R** $-\ \{0\}$

- Puntos de corte con los ejes:

  $$\text{Con el eje } X \ \rightarrow \ y=0 \ \rightarrow \ \frac{x^3+4}{x^2}=0 \ \Rightarrow \ x^3+4=0 \ \Rightarrow$$

  $$\Rightarrow \ x=\sqrt[3]{-4}\approx -1{,}6 \ \rightarrow \ \text{Punto}(-1{,}6;\ 0)$$

  Con el eje $Y \rightarrow$ No corta el eje Y, pues $x=0$ no está en el dominio.

- Asíntota vertical: $x=0$

  $$\lim_{x\to 0^-} f(x)=+\infty; \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$$

  Asíntota oblicua:

  $$\frac{x^3+4}{x^2}=x+\frac{4}{x^2} \ \Rightarrow \ y=x \text{ es asíntota oblicua}$$

  $$\text{Si } x\to+\infty,\ \frac{4}{x^2}>0 \ \Rightarrow \ \text{La curva está por encima de la asíntota.}$$

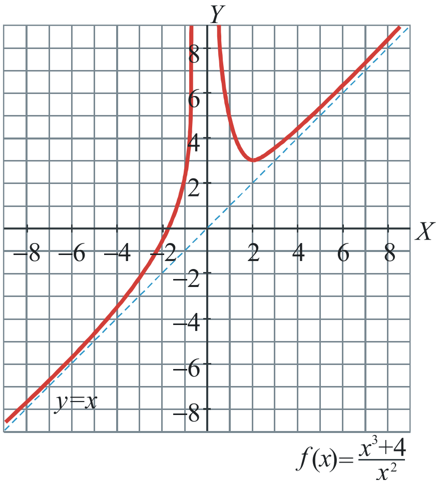
  $$\text{Si } x\to-\infty,\ \frac{4}{x^2}>0 \ \Rightarrow \ \text{La curva está por encima de la asíntota.}$$

- Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{3x^2 \cdot x^2 - \left(x^3+4\right) \cdot 2x}{\left(x^2\right)^2} = \frac{3x^4 - 2x^4 - 8x}{x^4} = \frac{x^4 - 8x}{x^4} = \frac{x\left(x^3 - 8\right)}{x^4} = \frac{x^3 - 8}{x^3}$$

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x^3 - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^3 = 8 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[3]{8} = 2 \quad \rightarrow \quad \text{Punto } (2,\ 3)$$

- Gráfica:



Ejercicio nº 33.-

Estudia y representa la función:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 2x + 1}}$$

Solución:

- Dominio:

$$x^2 + 2x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$\text{Dominio} = \mathbf{R} - \{-1\}$$

- Puntos de corte con los ejes:

$$\text{Con el eje } X \ \rightarrow \ y = 0 \ \rightarrow \ \frac{x^3}{x^2+2x+1} = 0 \ \rightarrow \ x^3 = 0 \ \rightarrow \ x = 0 \ \rightarrow \ \text{Punto}(0,\ 0)$$

$$\text{Con el eje } Y \ \rightarrow \ x = 0 \ \rightarrow \ y = 0 \ \rightarrow \ \text{Punto}(0,\ 0)$$

- Asíntota vertical: $x = -1$

$$\frac{x^3}{x^2+2x+1} = \frac{x^3}{(x+1)^2}; \qquad \lim_{x \to -1^-} f(x) = -\infty; \qquad \lim_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$$

Asíntota oblicua:

$$\frac{x^3}{x^2+2x+1} = x - 2 + \frac{3x+2}{x^2+2x+1} \quad \Rightarrow \quad y = x - 2 \ \text{ es asíntota oblicua}$$

.

$$\text{Si } x \to +\infty, \ \frac{3x+2}{x^2+2x+1} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{La curva está por encima de la asíntota.}$$

$$\text{Si } x \to -\infty, \ \frac{3x+2}{x^2+2x+1} < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{La curva está por debajo de la asíntota.}$$

- Puntos singulares:

$$f'(x)=\frac{3x^2\left(x^2+2x+1\right)-x^3(2x+2)}{\left(x^2+2x+1\right)^2}=\frac{3x^4+6x^3+3x^2-2x^4-2x^3}{\left(x^2+2x+1\right)^2}=$$

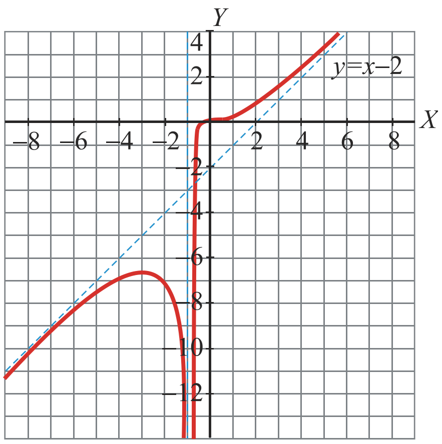
$$=\frac{x^4+4x^3+3x^2}{\left(x^2+2x+1\right)^2}=\frac{x^2\left(x^2+4x+3\right)}{\left(x^2+2x+1\right)^2}$$

$$f'(x)=0\ \begin{cases} x^2=0 \ \Rightarrow \ x=0 \ \rightarrow \ \text{Punto}(0,\ 0) \\ x^2+4x+3=0 \ \Rightarrow \ x=\dfrac{-4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\dfrac{-4\pm 2}{2} \ \begin{cases} x=-3 \\ x=-1 \end{cases} \end{cases}$$

$x=-1$ no vale, pues no está en el dominio.

$\text{Punto}\left(-3,\ \dfrac{-27}{4}\right).$

- Gráfica:



$f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+2x+1}$

Ejercicio nº 34.-

Estudia y representa la función:

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{x^3}{x^2+2x+1}}$$

Solución:

- Dominio:

$x^2+2x+1=0 \ \Rightarrow \ x=\dfrac{-2\pm\sqrt{4-4}}{2}=\dfrac{-2}{2}=-1$

$\text{Dominio}=\mathbf{R}\ -\ \{-1\}$

- Puntos de corte con los ejes:

$\text{Con el eje } X \ \rightarrow \ y=0 \ \rightarrow \ \dfrac{x^3}{x^2+2x+1}=0 \ \rightarrow \ x^3=0 \ \rightarrow \ x=0 \ \rightarrow \ \text{Punto}(0,\ 0)$

$\text{Con el eje } Y \ \rightarrow \ x=0 \ \rightarrow \ y=0 \ \rightarrow \ \text{Punto}(0,\ 0)$

- Asíntota vertical: $x = -1$

$$\frac{x^3}{x^2+2x+1} = \frac{x^3}{(x+1)^2}; \qquad \lim_{x\to -1^-} f(x) = -\infty; \qquad \lim_{x\to -1^+} f(x) = -\infty$$

Asíntota oblicua:

$$\frac{x^3}{x^2+2x+1} = x - 2 + \frac{3x+2}{x^2+2x+1} \quad \Rightarrow \quad y = x-2 \text{ es asíntota oblicua}$$

Si $x \to +\infty$, $\dfrac{3x+2}{x^2+2x+1} > 0 \quad \Rightarrow$ La curva está por encima de la asíntota.

Si $x \to -\infty$, $\dfrac{3x+2}{x^2+2x+1} < 0 \quad \Rightarrow$ La curva está por debajo de la asíntota.

- Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2+2x+1) - x^3(2x+2)}{(x^2+2x+1)^2} = \frac{3x^4+6x^3+3x^2-2x^4-2x^3}{(x^2+2x+1)^2} =$$

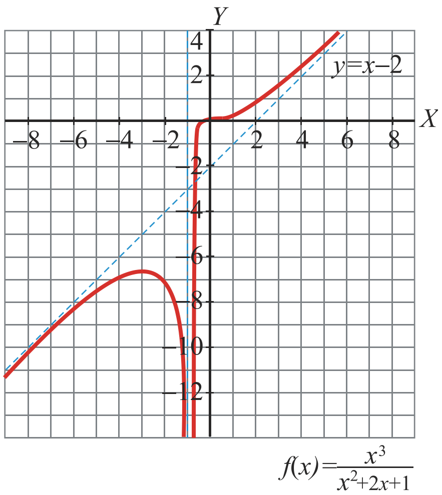
$$= \frac{x^4+4x^3+3x^2}{(x^2+2x+1)^2} = \frac{x^2(x^2+4x+3)}{(x^2+2x+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \begin{cases} x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad \to \quad \text{Punto}(0,\ 0) \\ x^2+4x+3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \dfrac{-4 \pm 2}{2} \begin{cases} x = -3 \\ x = -1 \end{cases} \end{cases}$$

$x = -1$ no vale, pues no está en el dominio.

$\text{Punto}\left(-3,\ \dfrac{-27}{4}\right)$.

- Gráfica:



Ejercicio nº 35.-

Representa gráficamente la siguiente función, estudiando previamente los aspectos que consideres más relevantes:

$$f(x) = \frac{2x^3}{x^2+2}$$

Solución:

- Dominio $= \mathbf{R}$

- Puntos de corte con los ejes:

  Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow \frac{2x^3}{x^2+2} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow$ Punto $(0, 0)$

  Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow$ Punto$(0, 0)$

- Asíntotas verticales: No tiene.

  Asíntota oblicua:

  $$\frac{2x^3}{x^2+2} = 2x + \frac{-4x}{x^2+2} \Rightarrow y = 2x \text{ es asíntota oblicua.}$$

  Si $x \rightarrow +\infty$, $\frac{-4x}{x^2+2} < 0 \Rightarrow$ La curva está por debajo de la asíntota.

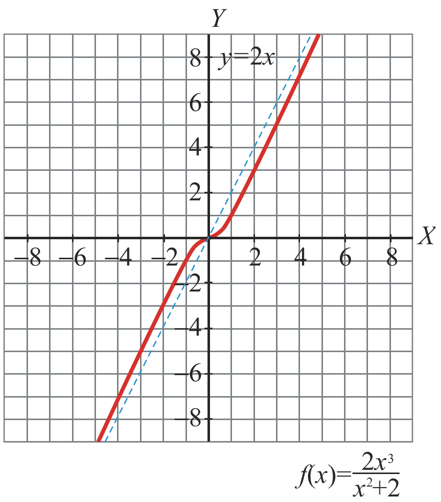
  Si $x \rightarrow -\infty$, $\frac{-4x}{x^2+2} > 0 \Rightarrow$ La curva está por encima de la asíntota.

- Puntos singulares:

  $$f'(x) = \frac{6x^2(x^2+2) - 2x^3 \cdot 2x}{(x^2+2)^2} = \frac{6x^4 + 12x^2 - 4x^4}{(x^2+2)^2} = \frac{2x^4 + 12x^2}{(x^2+2)^2} = \frac{2x^2(x^2+6)}{(x^2+2)^2}$$

  $$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x^2(x^2+6) = 0 \Rightarrow x = 0 \rightarrow \text{Punto}(0, 0)$$

- Gráfica:



<u>Ejercicio nº 36.-</u>

Representa gráficamente la siguiente función, estudiando previamente los aspectos que consideres más relevantes:

$$f(x) = \frac{x^4 - 4}{x^2 - 1}$$

Solución:

- Dominio = **R** − {1, 1}

- Puntos de corte con los ejes:

$$\text{Con el eje } X \rightarrow \quad y = 0 \quad \rightarrow \quad x^4 - 4 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \pm\sqrt[4]{4} \approx \pm 1{,}4 \rightarrow$$
$$\rightarrow \text{Puntos}\left(-1{,}4;\ 0\right) \text{ y } \left(1{,}4;\ 0\right)$$
$$\text{Con el eje } Y \quad \rightarrow \quad x = 0 \quad \rightarrow \quad y = 4 \quad \rightarrow \quad \text{Punto}\left(0,\ 4\right)$$

- Asíntotas verticales: $x = -1$, $x = 1$

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = -\infty; \qquad \lim_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty; \qquad \lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$$

Rama parabólica (pues el grado del numerador es dos unidades mayor que el del denominador).

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad ; \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

- Puntos singulares:

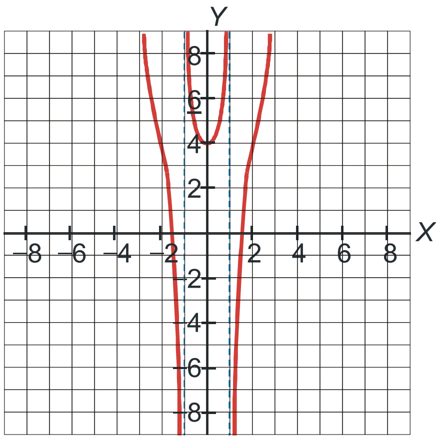
$$f'(x) = \frac{4x^3\left(x^2 - 1\right) - \left(x^4 - 4\right) \cdot 2x}{\left(x^2 - 1\right)^2} = \frac{4x^5 - 4x^3 - 2x^5 + 8x}{\left(x^2 - 1\right)^2} =$$

$$= \frac{2x^5 - 4x^3 + 8x}{\left(x^2 - 1\right)^2} = \frac{2x\left(x^4 - 2x^2 + 4\right)}{\left(x^2 - 1\right)^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2x = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0 \quad \rightarrow \quad \text{Punto}\left(0,\ 4\right) \\ x^4 - 2x^2 + 4 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 = z;\ z^2 - 2z + 4 = 0;\ z = \dfrac{2 + \sqrt{4 - 16}}{2} \end{cases}$$

(No tiene solución)

- Gráfica:



$f(x) = \dfrac{x^4 - 4}{x^2 - 1}$

Ejercicio nº 37.-

Estudia y representa la función:

$$f(x)=\frac{x^4+1}{x^2}$$

Solución:

- Dominio $= \mathbf{R} - \{0\}$

- Puntos de corte con los ejes:

  Con el eje $X \rightarrow \quad y=0 \quad \rightarrow \quad x^4+1=0 \quad \rightarrow$ no corta al eje X
  Con el eje $Y \rightarrow$ No corta al eje Y, pues $x=0$ no está en el dominio.

- Asíntota vertical: $x=0$

  $$\lim_{x\to 0^-} f(x)=+\infty; \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$$

  Rama parabólica (pues el grado del numerador es dos unidades mayor que el del denominador).

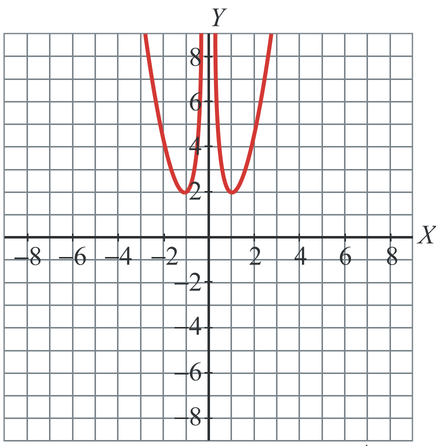
  $$\lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty; \qquad \lim_{x\to -\infty} f(x)=+\infty$$

- Puntos singulares:

  $$f'(x)=\frac{4x^3\cdot x^2-(x^4+1)\cdot 2x}{(x^2)^2}=\frac{4x^5-2x^5-2x}{x^4}=\frac{2x^5-2x}{x^4}=\frac{2x(x^4-1)}{x^4}=\frac{2(x^4-1)}{x^3}$$

  $$f'(x)=0 \Rightarrow 2(x^4-1)=0 \Rightarrow x^4-1=0 \Rightarrow x^4=1 \Rightarrow x=\pm\sqrt[4]{1}=\pm 1 \rightarrow \text{Puntos}(-1,\ 2) \text{ y } (1,\ 2)$$

- Gráfica:



$f(x)=\frac{x^4+1}{x^2}$

Ejercicio nº 38.-

Estudia y representa la función:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x^4}{x^2 + 1}}$$

Solución:

- Dominio = **R**

- Puntos de corte con los ejes:

$$\text{Con el eje } X \;\rightarrow\; y = 0 \;\rightarrow\; x^4 = 0 \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\; \text{Punto}(0,\ 0)$$
$$\text{Con el eje } Y \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\; y = 0 \;\rightarrow\; \text{Punto}(0,\ 0)$$

- Asíntotas verticales: No tiene.
  Rama parabólica (pues el grado del numerador es dos unidades mayor que el del denominador).

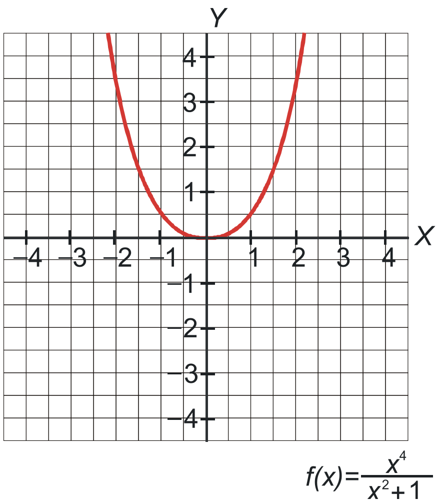
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

- Puntos singulares:

$$f(x) = \frac{4x^3(x^2+1) - x^4 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{4x^5 + 4x^3 - 2x^5}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^5 + 4x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^3(x^2+2)}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; 2x^3(x^2+2) = 0 \;\Rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\; \text{Punto}(0,\ 0)$$

- Gráfica



Ejercicio nº 39.-

Dada la función

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^2}}$$

estudia sus aspectos más relevantes y represéntala gráficamente.

Solución:

- Dominio $= \mathbf{R} - \{0\}$

- Puntos de corte con los ejes:

$$\text{Con el eje } X \;\rightarrow\; y=0 \;\rightarrow\; x^4-2x^2+1=0$$

$$\text{Si } x^2=z \;\rightarrow z^2-2z+1=0 \;\rightarrow\; z=\frac{2\pm\sqrt{4-4}}{2}=\frac{2}{2}=1$$

$$x^2=1 \;\Rightarrow\; x=\pm 1 \;\rightarrow\; \text{Puntos}(-1,\,0) \text{ y } (1,\,0)$$

Con el eje $Y \rightarrow$ No corta el eje Y porque $x=0$, no está en el dominio.

- Asíntota vertical: $x=0$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=+\infty; \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$$

Rama parabólica (pues el grado del numerador es dos unidades mayor que el del denominador).

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty; \qquad \lim_{x\to -\infty} f(x)=+\infty$$

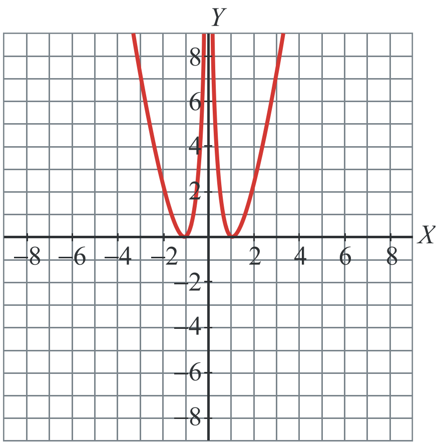
- Puntos singulares:

$$f'(x)=\frac{3x^2(x^2+2x+1)-x^3(2x+2)}{(x^2+2x+1)^2}=\frac{3x^4+6x^3+3x^2-2x^4-2x^3}{(x^2+2x+1)^2}=$$

$$=\frac{x^4+4x^3+3x^2}{(x^2+2x+1)^2}=\frac{x^2(x^2+4x+3)}{(x^2+2x+1)^2}$$

$$f'(x)=0 \;\Rightarrow\; 2(x^4-1)=0 \;\Rightarrow\; x^4=1 \;\Rightarrow\; x=\pm\sqrt[4]{1}=\pm 1 \;\rightarrow\; \text{Puntos}(-1,\,0) \text{ y } (1,\,0)$$

- Gráfica:



$$f(x)=\frac{x^4-2x^2+1}{x^2}$$

Ejercicio nº 40.-

Estudia y representa la siguiente función:

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{2x^5}{x^2+1}}$$

Solución:

- Dominio = **R**

- Puntos de corte con los ejes:

$$\text{Con el eje } X \;\rightarrow\; x=0 \;\rightarrow\; 2x^2=0 \;\rightarrow\; \text{Punto}(0,\,0)$$
$$\text{Con el eje } Y \;\rightarrow\; x=0 \;\rightarrow\; y=0 \;\rightarrow\; \text{Punto}(0,\,0)$$

- Asíntotas verticales: No tiene.

  Rama parabólica (pues el grado del numerador es tres unidades mayor que el del denominador).

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty; \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$

- Puntos singulares:

$$f'(x)=\frac{10x^4\left(x^2+1\right)-2x^5\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{10x^6+10x^4-4^6}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{6x^6+10x^4}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2x^4\left(3x^2+5\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$f'(x)=0 \;\Rightarrow\; 2x^4\left(3x^2+5\right)=0 \;\Rightarrow\; x=0 \;\rightarrow\; \text{Punto}(0,\,0)$$

- Gráfica: