

# **Probabilidad**

## **Experimentos deterministas**

Son los experimentos de los que podemos predecir el resultado antes de que se realicen.

### ***Ejemplo***

Si dejamos caer una piedra desde una ventana sabemos, sin lugar a dudas, que la piedra bajará. Si la arrojamos hacia arriba, sabemos que subirá durante un determinado intervalo de tiempo; pero después bajará.

## **Experimentos aleatorios**

Son aquellos en los que no se puede predecir el resultado, ya que éste depende del azar.

### ***Ejemplos***

Si lanzamos una moneda no sabemos de antemano si saldrá cara o cruz.

Si lanzamos un dado tampoco podemos determinar el resultado que vamos a obtener.

## **Teoría de probabilidades**

La **teoría de probabilidades** se ocupa de **asignar** un cierto **número** a cada **posible resultado** que pueda ocurrir en un **experimento aleatorio**, con el fin de cuantificar dichos resultados y saber si un suceso es más probable que otro. Con este fin, introduciremos algunas **definiciones**:

### ***Suceso***

Es cada uno de los resultados posibles de una experiencia aleatoria.

Al lanzar una moneda salga cara.

Al lanzar una moneda se obtenga 4.

### ***Espacio muestral***

Es el conjunto de todos los posibles resultados de una experiencia aleatoria, lo representaremos por  $E$  (o bien por la letra griega  $\Omega$ ).

Espacio muestral de una moneda:  $E = \{C, X\}$ .

Espacio muestral de un dado:  $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

### ***Suceso aleatorio***

**Suceso aleatorio** es cualquier subconjunto del espacio muestral.

Por ejemplo al tirar un dado un suceso sería que saliera par, otro, obtener múltiplo de 3, y otro, sacar 5.

### ***Ejemplo***

Una bolsa contiene bolas blancas y negras. Se extraen sucesivamente tres bolas. Calcular:

1. El espacio muestral.

$$E = \{(b,b,b); (b,b,n); (b,n,b); (n,b,b); (b,n,n); (n,b,n); (n,n,b); (n,n,n)\}$$

2. El suceso  $A = \{\text{extraer tres bolas del mismo color}\}$ .

$$A = \{(b,b,b); (n,n,n)\}$$

3. El suceso  $B = \{\text{extraer al menos una bola blanca}\}$ .

$$B = \{(b,b,b); (b,b,n); (b,n,b); (n,b,b); (b,n,n); (n,b,n); (n,n,b)\}$$

4. El suceso  $C = \{\text{extraer una sola bola negra}\}$ .

$$C = \{(b,b,n); (b,n,b); (n,b,b)\}$$

## **Tipos de sucesos**

### ***Suceso elemental***

**Suceso elemental** es cada uno de los elementos que forman parte del espacio muestral.

Por ejemplo al tirar un dado un suceso elemental es sacar 5.

### ***Suceso compuesto***

**Suceso compuesto** es cualquier subconjunto del espacio muestral.

Por ejemplo al tirar un dado un suceso sería que saliera par, otro, obtener múltiplo de 3.

### ***Suceso seguro***

**Suceso seguro, E**, está formado por todos los posibles resultados (es decir, por el espacio muestral).

Por ejemplo al tirar un dado un dado obtener una puntuación que sea menor que 7.

### ***Suceso imposible***

**Suceso imposible**,  $\emptyset$ , es el que no tiene ningún elemento.

Por ejemplo al tirar un dado obtener una puntuación igual a 7.

### ***Sucesos compatibles***

Dos sucesos, A y B, son compatibles cuando tienen algún suceso elemental común.

Si A es sacar puntuación par al tirar un dado y B es obtener múltiplo de 3, A y B son compatibles porque el 6 es un suceso elemental común.

### ***Sucesos incompatibles***

Dos sucesos, A y B, son **incompatibles** cuando no tienen ningún elemento en común.

Si A es sacar puntuación par al tirar un dado y B es obtener múltiplo de 5, A y B son incompatibles.

### ***Sucesos independientes***

Dos sucesos, A y B, son independientes cuando la probabilidad de que suceda A no se ve afectada porque haya sucedido o no B.

Al lanzar dos dados los resultados son independientes.

### ***Sucesos dependientes***

Dos sucesos, A y B, son dependientes cuando la probabilidad de que suceda A se ve afectada porque haya sucedido o no B.

Extraer dos cartas de una baraja, sin reposición, son sucesos dependientes.

### ***Suceso contrario***

El suceso contrario a A es otro suceso que se realiza cuando no se realiza A. Se denota por  $\bar{A}$

Son sucesos contrarios sacar par e impar al lanzar un dado.

### ***Espacio de sucesos***

**Espacio de sucesos**, **S**, es el conjunto de todos los sucesos posibles de un experimento aleatorio.

Si tiramos una moneda el espacio de sucesos está formado por:

$$S = \{ \emptyset, \{C\}, \{X\}, \{C,X\} \}.$$

Observamos que el primer elemento es el **suceso imposible** y el último el **suceso seguro**.

Si E tiene un número finito de elementos, n, de elementos el **número de sucesos** de E es  $2^n$ .

$$\text{Una moneda } E = \{C, X\}.$$

$$\text{Número de sucesos} = 2^2 = 4$$

$$\text{Dos monedas } E = \{(C,C); (C,X); (X,C); (X,X)\}.$$

$$\text{Número de sucesos} = 2^4 = 16$$

$$\text{Un dado } E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

$$\text{Número de sucesos} = 2^6 = 64$$

### Unión de sucesos

La **unión de sucesos**,  $A \cup B$ , es el suceso formado por todos los elementos de A y de B.

Es decir, el suceso  $A \cup B$  se verifica cuando ocurre uno de los dos, A o B, o ambos.

$A \cup B$  se lee como "**A o B**".

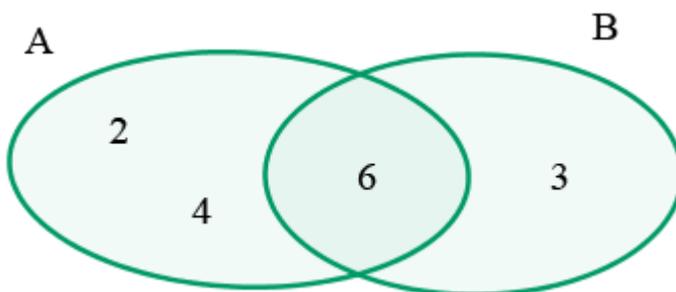
### Ejemplo

Consideramos el experimento que consiste en lanzar un dado, si A = "sacar par" y B = "sacar múltiplo de 3". Calcular  $A \cup B$ .

$$A = \{2, 4, 6\}$$

$$B = \{3, 6\}$$

$$A \cup B = \{2, 3, 4, 6\}$$



## Propiedades de la unión de sucesos

### **Conmutativa**

$$A \cup B = B \cup A$$

### **Asociativa**

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

### **Idempotente**

$$A \cup A = A$$

### **Simplificación**

$$A \cup (A \cap B) = A$$

### **Distributiva**

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

### **Elemento neutro**

$$A \cup \emptyset = A$$

### **Absorción**

$$A \cup E = E$$

## Intersección de sucesos

La **intersección de sucesos**,  $A \cap B$ , es el suceso formado por todos los elementos que son, a la vez, de A y B.

Es decir, el suceso  $A \cap B$  se verifica cuando ocurren simultáneamente A y B.

$A \cap B$  se lee como "**A y B**".

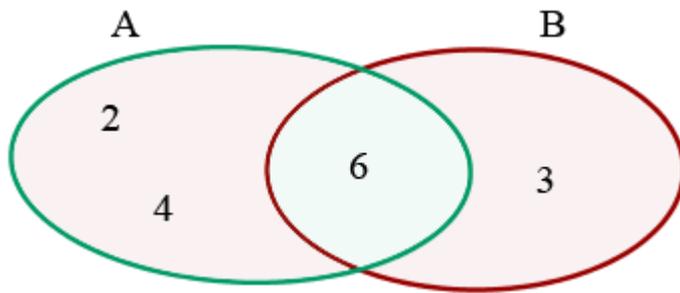
### **Ejemplo**

Consideramos el experimento que consiste en lanzar un dado, si A = "sacar par" y B = "sacar múltiplo de 3". Calcular  $A \cap B$ .

$$A = \{2, 4, 6\}$$

$$B = \{3, 6\}$$

$$A \cap B = \{6\}$$



### Propiedades de la intersección de sucesos

#### **Conmutativa**

$$A \cap B = B \cap A$$

#### **Asociativa**

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

#### **Idempotente**

$$A \cap A = A$$

#### **Simplificación**

$$A \cap (A \cup B) = A$$

#### **Distributiva**

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

#### **Elemento neutro**

$$A \cap E = A$$

#### **Absorción**

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

### Diferencia de sucesos

La **diferencia de sucesos**,  $A - B$ , es el suceso formado por todos los elementos de A que no son de B.

Es decir, la **diferencia de los sucesos** A y B se verifica cuando lo hace A y no B.

$A - B$  se lee como "**A menos B**".

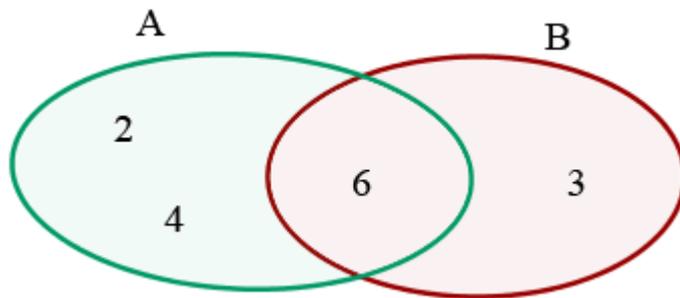
### Ejemplo

Consideramos el experimento que consiste en lanzar un dado, si  $A = \text{"sacar par"}$  y  $B = \text{"sacar múltiplo de 3"}$ . Calcular  $A - B$ .

$$A = \{2, 4, 6\}$$

$$B = \{3, 6\}$$

$$A - B = \{2, 4\}$$



### Propiedad

$$A - B = A \cap \bar{B}$$

### Sucesos contrarios

El suceso  $\bar{A} = E - A$  se llama **suceso contrario** o complementario de A.

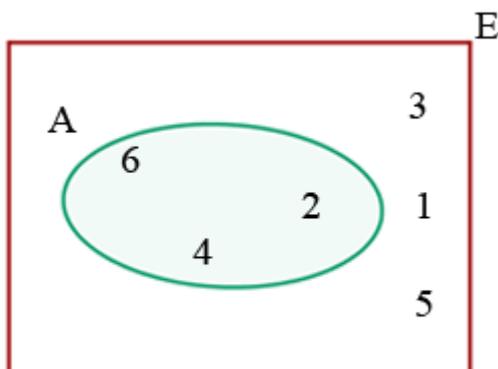
Es decir, se verifica siempre y cuando no se verifique A.

### Ejemplo

Consideramos el experimento que consiste en lanzar un dado, si  $A = \text{"sacar par"}$ . Calcular  $\bar{A}$ .

$$A = \{2, 4, 6\}$$

$$\bar{A} = \{1, 3, 5\}$$



### Propiedades

$$\overline{(\overline{A})} = A$$

$$\overline{\overline{E}} = \overline{\emptyset}$$

$$\overline{\emptyset} = E$$

$$A \cup \overline{A} = E$$

$$A \cap \overline{A} = \emptyset$$

### Leyes de Morgan

$$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

### Propiedades de la probabilidad

1. La probabilidad es positiva y menor o igual que 1.

$$0 \leq p(A) \leq 1$$

2. La probabilidad del suceso seguro es 1.

$$p(E) = 1$$

3. Si A y B son incompatibles, es decir  $A \cap B = \emptyset$  entonces:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

### Propiedades de la probabilidad

**1** La suma de las probabilidades de un suceso y su contrario vale 1, por tanto la probabilidad del suceso contrario es:

$$p(\overline{A}) = 1 - p(A)$$

**2** Probabilidad del suceso imposible es cero.

$$p(\emptyset) = 0$$

**3** La probabilidad de la unión de dos sucesos es la suma de sus probabilidades restándole la probabilidad de su intersección.

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

4 Si un suceso está incluido en otro, su probabilidad es menor o igual a la de éste.

$$\text{Si } A \subset B, \text{ entonces } p(A) \leq p(B)$$

5 Si  $A_1, A_2, \dots, A_k$  son incompatibles dos a dos entonces:

$$p(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) = p(A_1) + p(A_2) + \dots + p(A_k)$$

6 Si el espacio muestral E es finito y un suceso es  $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  entonces:

$$p(S) = p(x_1) + p(x_2) + \dots + p(x_n)$$

Por ejemplo la probabilidad de sacar par, al tirar un dado, es:

$$P(\text{par}) = P(2) + P(4) + P(6)$$

## Regla de Laplace

Si realizamos un experimento aleatorio en el que hay  $n$  sucesos elementales, todos igualmente probables, **equiprobables**, entonces si  $A$  es un suceso, la **probabilidad** de que ocurra el suceso  $A$  es:

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favorables a } A}{\text{número de casos posibles}}$$

### Ejemplos

1.- Hallar la probabilidad de que al lanzar dos monedas al aire salgan dos caras.

Casos posibles: {cc, cx, xc, xx}.

Casos favorables: 1.

$$P(2 \text{ caras}) = \frac{1}{4}$$

2.- En una baraja de 40 cartas, hallar la  $P(\text{as})$  y  $P(\text{copas})$ .

Casos posibles: 40.

Casos favorables de ases: 4.

$$P(\text{as}) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}$$

Casos favorables de copas: 10.

$$P(\text{copas}) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$$

3.- Calcular la probabilidad de que al echar un dado al aire, salga:

**1** Un número par.

Casos posibles: {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

Casos favorables: {2, 4, 6}.

$$P(\text{par}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

**2** Un múltiplo de tres.

Casos favorables: {3, 6}.

$$P(3) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

**3** Mayor que 4.

Casos favorables: {5, 6}.

$$P(> 4) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

## Combinatoria y probabilidad

La **combinatoria** nos puede ser muy útil para calcular los **sucesos posibles y favorables**, al aplicar **la regla de Laplace**. Especialmente si hay un gran número de sucesos.

### **Ejemplos**

1 Un grupo de 10 personas se sienta en un banco. ¿Cuál es la probabilidad de que dos personas fijadas de antemano se sienten juntas?

Casos posibles:

$$P_{10} = 10!$$

Casos favorables:

Si consideramos las dos personas que se sientan juntas como una sola persona habrá 9!; pero pueden estar de dos formas posibles a la izquierda uno de otro o a la derecha, por tanto se tiene  $2 \cdot 9!$ .

$$p(A) = \frac{2 \cdot 9!}{10!} = \frac{1}{5}$$

2 Se extraen cinco cartas de una baraja de 52. Hallar la probabilidad de extraer: 4 ases.

$$p(4 \text{ ases}) = \frac{C_4^4 \cdot C_{48}^1}{C_{52}^5} = \frac{1}{54145}$$

4 ases y un rey.

$$p(4 \text{ ases y un rey}) = \frac{C_4^4 \cdot C_4^1}{C_{52}^5} = \frac{1}{649740}$$

3 cincos y 2 sotas.

$$p(3 \text{ cincos y dos sotas}) = \frac{C_4^3 \cdot C_4^2}{C_{52}^5} = \frac{1}{180290}$$

Un 9, 10, sota, caballo y rey en cualquier orden.

$$p(\text{escalera}) = \frac{C_4^1 \cdot C_4^2 \cdot C_4^2 \cdot C_4^2 \cdot C_4^2}{C_{52}^5} = \frac{64}{162435}$$

3 de un palo cualquiera y 2 de otro.

Hay cuatro formas de elegir el primer palo y tres formas de elegir al segundo palo.

$$p(3 \text{ y } 2) = \frac{4 \cdot C_{13}^3 \cdot 3 \cdot C_{13}^2}{C_{52}^5} = \frac{429}{4165}$$

Al menos un as.

$$p(\text{ningún as}) = \frac{C_{48}^5}{C_{52}^5} = \frac{35673}{54145}$$

$$p(\text{al menos 1 as}) = 1 - \frac{35673}{54145} = \frac{18472}{54145}$$

## Probabilidad de la unión de sucesos

### Probabilidad de la unión de sucesos incompatibles

$$A \cap B = \emptyset$$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

Calcular la probabilidad de obtener un 2 ó un 5 al lanzar un dado.

$$P(2 \cup 5) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

### Probabilidad de la unión de sucesos compatibles

$$A \cap B \neq \emptyset$$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

$$p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C) - p(A \cap B) - p(A \cap C) - p(B \cap C) + p(A \cap B \cap C)$$

Ejemplo: Calcular la probabilidad de obtener un múltiplo de 2 ó un 6 al lanzar un dado.

$$P(2 \cup 6) = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

### Probabilidad condicionada

Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral E.

Se llama **probabilidad** del suceso A **condicionada** al B y se representa por **P(A/B)** a la **probabilidad del suceso A una vez ha ocurrido el B**.

$$P(B/A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

### **Ejemplo**

Calcular la probabilidad de obtener un 6 al tirar un dado sabiendo que ha salido par.

$$P(6/\text{par}) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{6}} = \frac{1}{2}$$

### **Sucesos independientes**

Dos sucesos A y B son independientes si

$$p(A/B) = p(A)$$

### **Sucesos dependientes**

Dos sucesos A y B son dependientes si

$$p(A/B) \neq p(A)$$

## **Probabilidad compuesta o de la intersección de sucesos**

### **Probabilidad de la intersección de sucesos independientes**

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$$

### **Ejemplo**

Se tiene una baraja de 40 cartas, se saca una y se vuelve a meter. ¿Cuál es la probabilidad de extraer dos ases?

$$p(A \cap B) = p(A_1) \cdot p(A_2) = \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{40} = \frac{1}{100}$$

### **Probabilidad de la intersección de sucesos dependientes**

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B/A)$$

### **Ejemplo**

Se tiene una baraja de 40 cartas, se extraen dos cartas. ¿Cuál es la probabilidad de extraer dos ases?

$$p(A \cap B) = p(A_1) \cdot p(A_2 / A_1) = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} = \frac{1}{130}$$

## Probabilidad de la diferencia de sucesos

$$p(A - B) = p(A \cap \bar{B}) = p(A) - p(A \cap B)$$

## Tablas de contingencia

Un método útil para clasificar los datos obtenidos en un recuento es mediante las **tablas de contingencia**.

Se trata de tablas en cuyas celdas figuran probabilidades, y en la cual podemos determinar unas probabilidades conociendo otras de la tabla.

### *Ejemplo*

Se sortea un viaje a Roma entre los 120 mejores clientes de una agencia de automóviles. De ellos, 65 son mujeres, 80 están casados y 45 son mujeres casadas. Se pide:

1 ¿Cuál será la probabilidad de que le toque el viaje a un hombre soltero?

2 Si del afortunado se sabe que es casado, ¿cuál será la probabilidad de que sea una mujer?

	Hombres	Mujeres	
Casados	35	45	80
Solteros	20	20	40
	55	65	120

$$p(\text{hombre soltero}) = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$$

$$p(\text{mujer / casado}) = \frac{45}{80} = 0.5625$$

## Diagramas de árbol

Para la construcción de un **diagrama en árbol** se partirá poniendo una **rama** para cada una de las **posibilidades**, acompañada de su **probabilidad**.

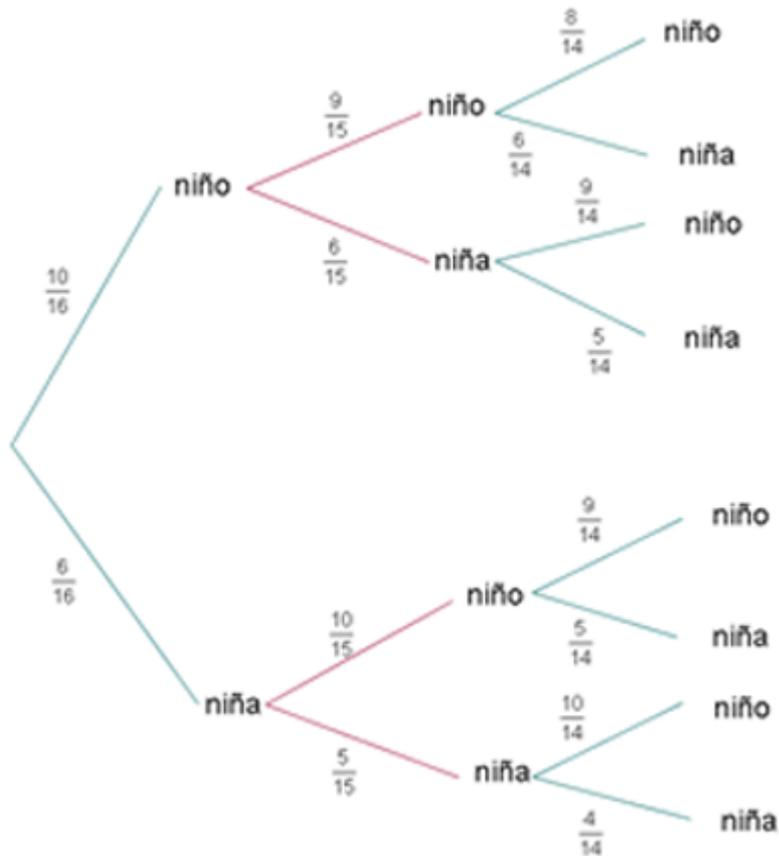
En el **final** de cada **rama parcial** se constituye a su vez, un **nudo** del cual parten nuevas **ramas**, según las **posibilidades** del siguiente paso, salvo si el nudo representa un posible final del experimento (**nudo final**).

Hay que tener en cuenta: que la **suma de probabilidades** de las **ramas** de cada **nudo** ha de dar **1**.

### Ejemplos

Una clase consta de seis niñas y 10 niños. Si se escoge un comité de tres al azar, hallar la probabilidad de:

1 Seleccionar tres niños.



$$p(3 \text{ niños}) = \frac{10}{16} \cdot \frac{9}{15} \cdot \frac{8}{14} = 0.214$$

2 Seleccionar exactamente dos niños y una niña.

$$p(2 \text{ niños y } 1 \text{ niña}) = \frac{10}{16} \cdot \frac{9}{15} \cdot \frac{6}{14} + \frac{10}{16} \cdot \frac{6}{15} \cdot \frac{9}{14} + \frac{6}{16} \cdot \frac{10}{15} \cdot \frac{9}{14} = 0.482$$

3 Seleccionar exactamente dos niñas y un niño.

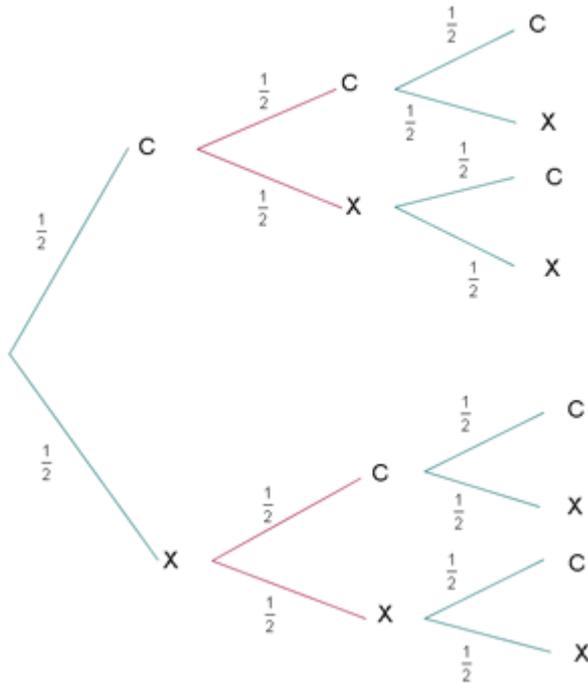
$$p(2 \text{ niñas y } 1 \text{ niño}) = \frac{10}{16} \cdot \frac{6}{15} \cdot \frac{5}{14} + \frac{6}{16} \cdot \frac{10}{15} \cdot \frac{5}{14} + \frac{6}{16} \cdot \frac{5}{15} \cdot \frac{10}{14} = 0.268$$

4 Seleccionar tres niñas.

$$p(3 \text{ niñas}) = \frac{6}{16} \cdot \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} = 0.0357$$

Calcular la **probabilidad** de que al arrojar al aire tres monedas, salgan:

Tres caras.



$$p(3c) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

## Experimentos compuestos

Un **experimento compuesto** es aquel que consta de dos o más experimentos aleatorios simples.

Es decir, si tiramos un dado, o una moneda, son experimentos aleatorios simples, pero si realizamos el experimento de tirar un dado y posteriormente una moneda, estamos realizando un **experimento compuesto**.

En los **experimentos compuestos** es conveniente usar el llamado **diagrama en árbol** para hacerse una idea global de todos ellos.

## Teorema de la probabilidad total

Si  $A_1, A_2, \dots, A_n$  son:

Sucesos incompatibles 2 a 2.

Y cuya unión es el espacio muestral ( $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = E$ ).

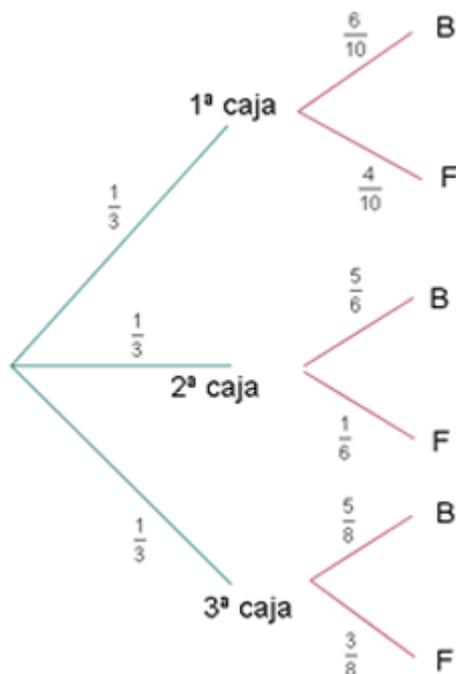
Y B es otro suceso.

Resulta que:

$$p(B) = p(A_1) \cdot p(B/A_1) + p(A_2) \cdot p(B/A_2) + \dots + p(A_n) \cdot p(B/A_n)$$

### **Ejemplo**

Se dispone de tres cajas con bombillas. La primera contiene 10 bombillas, de las cuales hay cuatro fundidas; en la segunda hay seis bombillas, estando una de ellas fundida, y la tercera caja hay tres bombillas fundidas de un total de ocho. ¿Cuál es la probabilidad de que al tomar una bombilla al azar de una cualquiera de las cajas, esté fundida?



$$p(\text{fundida}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{10} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8} = \frac{113}{360}$$

## Teorema de Bayes

Si  $A_1, A_2, \dots, A_n$  son:

**Sucesos incompatibles 2 a 2.**

Y cuya **unión** es el **espacio muestral** ( $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = E$ ).

Y  $B$  es otro suceso.

Resulta que:

$$p(A_i/B) = \frac{p(A_i) \cdot p(B/A_i)}{p(A_1) \cdot p(B/A_1) + p(A_2) \cdot p(B/A_2) + \dots + p(A_n) \cdot p(B/A_n)}$$

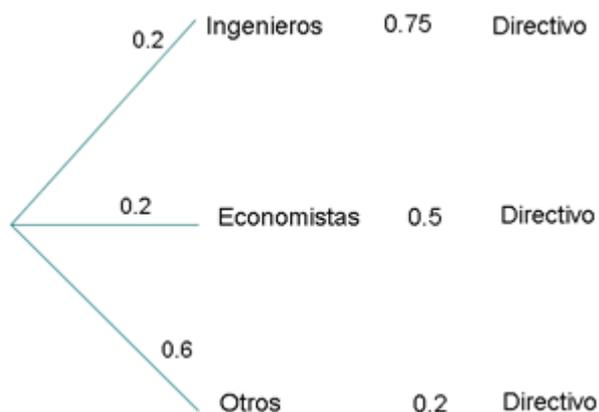
Las probabilidades  $p(A_i)$  se denominan **probabilidades a priori**.

Las probabilidades  $p(A_i/B)$  se denominan **probabilidades a posteriori**.

Las probabilidades  $p(B/A_i)$  se denominan verosimilitudes.

### **Ejemplos**

El 20% de los empleados de una empresa son ingenieros y otro 20% son economistas. El 75% de los ingenieros ocupan un puesto directivo y el 50% de los economistas también, mientras que los no ingenieros y los no economistas solamente el 20% ocupa un puesto directivo. ¿Cuál es la probabilidad de que un empleado directivo elegido al azar sea ingeniero?



$$p(\text{ingeniero} / \text{directivo}) = \frac{0.2 \cdot 0.75}{0.2 \cdot 0.75 + 0.2 \cdot 0.5 + 0.6 \cdot 0.2} = 0.405$$

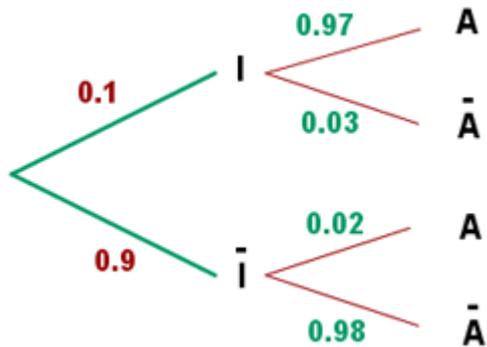
La probabilidad de que haya un accidente en una fábrica que dispone de alarma es 0.1. La probabilidad de que suene esta sí se ha producido algún incidente es de 0.97 y la probabilidad de que suene si no ha sucedido ningún incidente es 0.02.

En el supuesto de que haya funcionado la alarma, ¿cuál es la probabilidad de que no haya habido ningún incidente?

Sean los sucesos:

I = Producirse incidente.

A = Sonar la alarma.



$$P(\bar{I} / A) = \frac{0.9 \cdot 0.02}{0.1 \cdot 0.97 + 0.9 \cdot 0.02} = 0.157$$