EL NÚMERO *e*.

En Matemáticas existen algunos números que son muy famosos. Ya conocemos el número $\boldsymbol{\pi}$ y el número áureo **Φ**; vamos a hablar del número ***e***, que debe su nombre al matemático alemán Leonard Euler.

El número e es un número irracional, y se obtiene a partir de la expresión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ haciendo n cada vea más grande

Lo anterior supone que, aumentando suficientemente el valor que sustituyamos por n en la fórmula, más decimales del número e obtendremos:

$$\left(1+\frac{1}{100}\right)^{100} = 1'01^{100} = 2'704813...$$

$$\left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000} = 1'001^{1000} = 2'716023...$$

$$\left(1+\frac{1}{1000000}\right)^{1000000} = 1'000001^{1000000} = 2'718280...$$

$$e = 2'718281828459045.....$$

El número **e** es un número irracional pues tiene infinitas cifras decimales no periódicas. Se lo suele llamar el **número de Euler** por ser su inventor el matemático Leonhard Euler.

El número es muy importante por ser la base para las funciones exponenciales, y por ello se ha sugerido que Euler llamara e por significar "exponencial".

e es también la base de los logaritmos naturales o neperianos (inventados por John Napier).

El número e tiene numerosas aplicaciones en todas las ramas de la ciencia, la economía, etc. Un ejemplo es el siguiente:

El número e en la Naturaleza.

La tasa de natalidad y mortalidad de cualquier especie animal o vegetal en condiciones naturales de equilibrio suelen permanecer estables. Por eso, como si de una tasa de interés financiero se tratara, las poblaciones tienden a crecer de acuerdo con un modelo que incluye el número e en su formulación:

$$Ne^{rt}$$

Donde N población inicial, r coeficiente de crecimiento y t el tiempo en años.

Logaritmos

El **logaritmo** de un número, en una **base** dada, es el **exponente** al cual se debe elevar la **base** para obtener el número.

$$\log_a x = y \Rightarrow a^y = x \qquad\qquad a > 0 \text{ y } a \neq 1$$

Siendo **a** la **base**, **x** el **número** e **y** el **logarítmo**.

Ejemplos:

$\log_2 4 = 2$ $2^2 = 4$

$\log_2 1 = 0$ $2^0 = 1$

Calcular por la definición de logaritmo el valor de y

1 $\log_{\frac{1}{2}} 0.25 = y$

$\left(\frac{1}{2}\right)^y = 0.25$ $\left(\frac{1}{2}\right)^y = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ $y = 2$

2 $\log_{\sqrt{5}} 125 = y$

$\sqrt{5}^y = 125$ $5^{\frac{1}{2}y} = 5^3$ $y = 6$

3 $\log 0.001 = y$

$10^y = 0.001$ $10^y = 10^{-3}$ $y = -3$

4 $\ln \frac{1}{e^5} = y$

$e^y = \frac{1}{e^5}$ $e^y = e^{-5}$ $y = -5$

5 $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[5]{\frac{1}{81}} = y$

Logaritmos decimales

Los **logaritmos decimales** o vulgares son los que tienen **base 10**. Se representan por **log (x).**

Logaritmos neperianos o logaritmos naturales

Los **logaritmos naturales** o **logaritmos neperianos** son los que tienen **base e**. Se representan por **ln (x) o L(x).**

Los **logaritmos neperianios** deben su nombre a su descubridor John Neper y fueron los primeros en ser utilizados.

Propiedades de los logaritmos

De la **definición de logaritmo**:

$$\log_a x = y \Rightarrow a^y = x \qquad\qquad a > 0 \text{ y } a \neq 1$$

podemos deducir:

No existe el **logaritmo** de un número con **base negativa**.

$$\nexists \log_{-a} x$$

No existe el **logaritmo** de un **número negativo**.

$$\nexists \log_a (-x)$$

No existe el logaritmo de cero.

$$\nexists \log_a 0$$

El logaritmo de 1 es cero.

$$\log_a 1 = 0$$

El logaritmo en base a de a es uno.

$$\log_a a = 1$$

log 10 = 1

ln e = 1

$$\log_2 2 = 1$$

El **logaritmo** en base a de una **potencia** en base a es igual al **exponente**.

$$\log_a a^n = n$$

$$\log 10\,000 = \log 10^4 = 4$$

$$\ln e^2 = 2$$

$$\log_2 \left(\frac{1}{8}\right) = \log_2 \left(\frac{1}{2^3}\right) = \log_2 2^{-3} = -3$$

Operaciones con logaritmos

Logaritmo de una multiplicación

El **logaritmo** de una **multiplicación** es igual a la **suma** de los **logaritmos** de los factores.

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_2 (4 \cdot 8) = \log_2 4 + \log_2 8 = 2 + 3 = 5$$

Logaritmo de una división

El **logaritmo** de un **cociente** es igual al **logaritmo** del **dividendo** **menos** el **logaritmo del divisor**.

$$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_2 \left(\frac{8}{4}\right) = \log_2 8 - \log_2 4 = 3 - 2 = 1$$

Logaritmo de una potencia

El **logaritmo** de una *potencia* es igual al **producto** del **exponente** por el **logaritmo de la base**.

$$\log_a (x^n) = n \log_a x$$

$$\log_2 (8^4) = 4 \log_2 8 = 4 \cdot 3 = 12$$

Logaritmo de una raíz

El **logaritmo** de una **raíz** es igual al **cociente** entre el **logaritmo del radicando y el índice** de la raíz.

$$\log_a \left(\sqrt[n]{x}\right) = \frac{1}{n} \log_a x$$

$$\log_2 \left(\sqrt[4]{8}\right) = \frac{1}{4} \log_2 8 = \frac{1}{4} \cdot 3 = \frac{3}{4}$$

Cambio de base:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

$$\log_2 4 = \frac{\log_4 4}{\log_4 2} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Ejemplo de cálculo de logaritmos

1.- **Calcula** el valor de **x** aplicando la **definición de logarítmo**:

1 $\log_2 32 = x$

$2^x = 32$ $\quad$ $2^x = 2^5$ $\quad$ $x = 5$

2 $\log_9 \frac{1}{3} = x$

$(9)^x = \frac{1}{3}$ $\quad$ $3^{2x} = 3^{-1}$ $\quad$ $x = -\frac{1}{2}$

3 $\log_{\frac{1}{2}} 0.25 = x$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{25}{100}$ $\quad$ $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{4}\right)$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ $\quad$ $x = 2$

4 $\log_9 \sqrt[4]{3} = x$

$(9)^x = \sqrt[4]{3}$ $\quad$ $3^{2x} = 3^{\frac{1}{4}}$ $\quad$ $x = \frac{1}{8}$

5 $\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{4} = x$

$\left(\sqrt{2}\right)^x = \frac{1}{4}$ $\quad$ $2^{\frac{1}{2}x} = 2^{-2}$ $\quad$ $x = -4$

6 $\log_x 81 = -4$

$x^{-4} = 81$ $\quad$ $x^4 = \frac{1}{81}$ $\quad$ $x = \frac{1}{3}$

7 $\log_2 x^3 = 6$

$x^3 = 2^6$ $\quad$ $x = 4$

2.- Conociendo que log 2 = 0.3010, **calcula** los siguientes **logaritmos decimales**.

1 $\log 0.02$

$$\log\left(\frac{2}{100}\right) = \log 2 - \log 10^2 = \log 2 - 2 = 0.3010 - 2 = -1.6989$$

2 $\log \sqrt[4]{8}$

$$\log \sqrt[4]{2^3} = \frac{3}{4}\log 2 = \frac{3}{4} \cdot 0.3010 = 0.2257$$

3 $\log 5$

$$\log\left(\frac{10}{2}\right) = \log 10 - \log 2 = 1 - 0.3010 = 0.69897$$

4 $\log 0.0625$

$$\log\left(\frac{625}{10000}\right) = \log\left(\frac{5^4}{2^4 \cdot 5^4}\right) = \log\left(\frac{1}{2^4}\right) =$$

$$\log 1 - \log 2^4 = 0 - 4\log 2 = -1.2040$$

3.- Calcular los **logaritmos** de de las expresiones que se indican:

1 $\ln \dfrac{x^2 \cdot y \cdot (m+n)}{m \cdot n} =$

$$= \ln\left[x^2 \cdot y \cdot (m+n)\right] - \ln(m \cdot n) =$$

$$= \ln x^2 + \ln y + \ln(m+n) - (\ln m + \ln n) =$$

$$= 2\ln x + \ln y + \ln(m+n) - \ln m - \ln n$$

2 $\log_2 \dfrac{a^2 - b^2}{a \cdot b} =$

$$= \log_2 \frac{(a+b)\cdot(a-b)}{a \cdot b} =$$

$$= \log_2\left[(a+b)\cdot(a+b)\right] - \log_2(a \cdot b) =$$

$$= \log_2 (a+b) + \log_2 (a-b) - (\log_2 a + \log_2 b) =$$

$$= \log_2 (a+b) + \log_2 (a-b) - \log_2 a - \log_2 b$$

$_3 \log\ 2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$

$$\log\ 2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = \log\ 2 + \log\ \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} =$$

$$= \log\ 2 + \frac{1}{2}\log\left(2\sqrt{2\sqrt{2}}\right) = \log\ 2 + \frac{1}{2}\left[\log\ 2 + \frac{1}{2}\log\left(2\sqrt{2}\right)\right] =$$

$$= \log\ 2 + \frac{1}{2}\left[\log\ 2 + \frac{1}{2}\left(\log\ 2 + \log\sqrt{2}\right)\right] =$$

$$= \log\ 2 + \frac{1}{2}\left[\log\ 2 + \frac{1}{2}\left(\log\ 2 + \frac{1}{2}\log 2\right)\right] =$$

$$= \log\ 2 + \frac{1}{2}\log\ 2 + \frac{1}{4}\log\ 2 + \frac{1}{8}\log 2 = \frac{15}{8}\log\ 2$$