MATEMÁTICAS II
SEPTIEMBRE 2016
OPCIÓN A

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 3 puntos)

Dada la función $f(x) = (6-x)e^{\frac{x}{3}}$, se pide:

a) (1 punto) Determinar su dominio, asíntotas y cortes con los ejes.
b) (1punto) Calcular su derivada, intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos relativos.
c) Determinar el área del triángulo que forman los ejes coordenados con la tangente a la curva y=f(x) en el punto x=0.

Solución:

a) **Dominio**:

Dom(f(x)) = ℝ

Asíntotas:
- No existen asíntotas verticales.

- Asíntotas horizontales:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\infty}(6-x)e^{\frac{x}{3}} = \infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty}(6-x)e^{\frac{x}{3}} = 0\end{array}\right\} Hay\ asíntota\ horizontal\ y=0$$

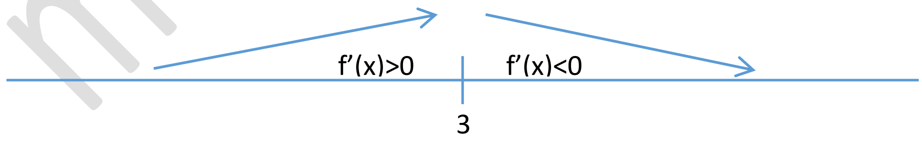
- Como hay asíntota horizontal, no hay oblicua.

- **Cortes con los ejes**.

Corte con el eje x: y=0. $6-x=0 \rightarrow x=6 \quad P(6{,}0)$
Corte con el eje y: x=0. y=6 Q(0,6)

b) Derivada, crecimiento y decrecimiento, extremos relativos.

$$f'(x) = -e^{\frac{x}{3}} + \frac{(6-x)}{3}e^{\frac{x}{3}} = e^{\frac{x}{3}}\left(\frac{(6-x)}{3}-1\right) \rightarrow \frac{(6-x)}{3}-1=0 \rightarrow x=3$$



Solución: Crece (-∞,3). Decrece (3, ∞) máximo en x=3.

c) Recta tangente en x=0 y área del triángulo.

$$x=0 \rightarrow m=f'(x)=1 \rightarrow y=f(0)=6 \rightarrow y-6=1(x-0) \rightarrow y=x+6$$

Área del triángulo= $\int_{-6}^{0}(x+6)dx = [\frac{x^2}{2}+6x]_{-6}^{0} = 0-\left(\frac{36}{2}-36\right) = 18u^2$

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 3 puntos):

Dadas las rectas r $\equiv \begin{cases} x-2z-1=0 \\ x+y+z-4=0 \end{cases}$ $y\ s \equiv \{(2+\lambda, 1-3\lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}$, se pide:

a) (1punto) Obtener la recta que pasa por el punto P(1,0,5) y corta perpendicularmente a r.
b) (1 punto) Obtener el plano que contiene a la recta r y es paralelo a s.
c) (1 punto) Hallar la distancia entre las rectas r y s.

Solución:

a) Recta t que pasa por el punto P(1,0,5) y corta perpendicularmente a r. $Q(x_1,y_1,z_1)$

$$\overrightarrow{v_r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (2,-3,1) \qquad \overrightarrow{v_t} = \overline{PQ} = (x-1, y, z-5)$$

Si r y t son perpendiculares, $\overrightarrow{v_r} * \overrightarrow{v_t} = 0 \rightarrow 2(x-1) - 3y + (z-5) = 0 \rightarrow 2x - 2 - 3y + z - 5 = 0 \rightarrow 2x - 3y + z - 7 = 0\ (1)$ plano que contiene a t y es perpendicular a r

$$Q(x,y,z) \in r \ \rightarrow \begin{Bmatrix} x = 2z+1 \\ 2z+1+y+z-4=0 \rightarrow y = 3-3z \end{Bmatrix} \rightarrow Q(2z+1, 3-3z, z)\ (2)$$

Sustituyendo (2)en(1): $2(2z+1) - 3(3-3z) + z - 7 = 0 \rightarrow 14z - 14 = 0 \rightarrow z = 1$
$x = 3, y = 0, z = 1 \ \rightarrow Q(3,0,1) \rightarrow \ \overrightarrow{v_t} = \overline{PQ} = (3-1, 0, 1-5) = (2,0,-4)$

$$t \equiv \begin{cases} x = 1+2\tau \\ y = 0 \quad \tau \in \mathbb{R} \\ z = 5-4\tau \end{cases}$$

b) Plano que contiene a r y es paralelo a s.

$$\left.\begin{matrix} \overrightarrow{v_r} = (2,-3,1) \\ \overrightarrow{v_s} = (1,-3,1) \\ P_r = (1,3,0) \\ P_s = (2,1,0) \end{matrix}\right\} \overrightarrow{n_\pi} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = (0,-1,-3) \rightarrow \pi \equiv -y - 3z + D = 0 \rightarrow$$

$$-3 - 0 + D = 0 \rightarrow D = 3 \rightarrow \pi \equiv -y - 3z + 3 = 0$$

c) Distancia entre las rectas r y s.

$$d(r,s) = \frac{\left[\overrightarrow{P_rP_S}, v_r, v_s\right]}{|v_r\ x\ v_s|} \rightarrow \begin{Bmatrix} \overrightarrow{P_rP_S} = (2,1,0) - (1,3,0) = (1,-2,0) \\ \left[\overrightarrow{P_rP_S}, v_r, v_s\right] = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -3-2+4+3 = 2 \\ |v_r\ x\ v_s| = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10} \end{Bmatrix} \rightarrow$$

$$d(r,s) = \frac{\left[\overrightarrow{P_rP_S}, v_r, v_s\right]}{|v_r\ x\ v_s|} = \frac{2}{\sqrt{10}} u^2$$

<u>Ejercicio 3.</u> (Calificación máxima: 2 puntos)

a) (1 punto) Determine, si es posible, los parámetros α y β de modo que se verifique la igualdad:

$$\alpha \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$$

b) (1 punto) Determine los posibles valores de λ para que el rango de la matriz A sea 2, donde

$$A = \lambda\begin{pmatrix}2 & 2\\1 & 3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$$

Solución:

a) Determine α y β

$$\alpha\begin{pmatrix}3 & -4\\5 & 3\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1 & 0\\2 & 1\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}3 & -8\\-2 & -5\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\2 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\4 & 1\end{pmatrix} \to \alpha\begin{pmatrix}3 & -4\\5 & 3\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1 & 0\\4 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & -8\\-2 & -5\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r}3\alpha+\beta=3\\5\alpha+4\beta=-2\\-4\alpha=-8\\3\alpha+\beta=-5\end{array}\right\}\begin{array}{l}\alpha=2\\\beta=-3\end{array}$$

b) λ para que el rango de la matriz A sea 2. Para que rg(A)=0, |A|≠0

$$A = \lambda\begin{pmatrix}2 & 2\\1 & 3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\lambda+1 & 2\lambda\\\lambda & 3\lambda+1\end{pmatrix} \to |A| = (2\lambda+1)(3\lambda+1) - 2\lambda^2$$

$$= 4\lambda^2 + 5\lambda + 1 = 0 \to \lambda = \frac{-1}{4}\ y\ \lambda = -1$$

$$Para\ Rg(A) = 2\ , \lambda \neq \frac{-1}{4}\ y\ \lambda \neq -1$$

<u>Ejercicio 4.</u> (Calificación máxima: 2 puntos)

Cierta fundación ha destinado 247000 euros para la dotación de 115 becas de estudios. El importe de cada beca es de 3000 euros, si el estudiante cursa un grado universitario; de 2000 euros, si cursa formación profesional y de 1500 euros, si realiza estudios de postgrado. Sabiendo que la fundación ha concedido doble número de becas de formación profesional que de postgrado, ¿cuántas becas ha concedido a cada nivel de estudios?

Solución:

$$\left.\begin{array}{c}x+y+z=115\\3000x+2000y+1500z=247000\\2y=z\end{array}\right\}\left.\begin{array}{c}x+3y=115\\3000x+5000y=247000\end{array}\right\}\begin{array}{c}x=41{,}5\\y=24{,}5\\z=29\end{array}$$

MATEMÁTICAS II
SEPTIEMBRE 2016
OPCIÓN B

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 3 puntos)
Dado el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{cases} 2x & + & (a-1)y & - & 2z & = & a \\ 2x & + & y & - & az & = & 2 \\ -x & + & y & + & z & = & 1-a \end{cases}$$

Se pide:

a) (2 puntos) Discutirlo según los valores del parámetro a.
b) (1 punto) Resolverlo cuando sea posible.

Solución:

$$A\begin{pmatrix} 2 & a-1 & -2 \\ 2 & 1 & -a \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B\begin{pmatrix} 2 & a-1 & -2 & a \\ 2 & 1 & -a & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1-a \end{pmatrix}$$

a) $\begin{vmatrix} 2 & a-1 & -2 \\ 2 & 1 & -a \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2-4+a^2-a-2+2a-2a+2 = a^2-a-2 = 0 \left[\begin{array}{l} a=2 \\ a=-1 \end{array} \right.$

<u>$a\neq 2$ y $a\neq -1$</u> Rg(A) = Rg(B) = nº incógnitas → Sistema Compatible Determinado

<u>a= 2</u> Rg(A) = Rg(B) < nº incógnitas → Sistema Compatible Indeterminado

$$A\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Rg(A):

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0;\ \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \ \rightarrow \mathrm{Rg}(A) = 2$$

Rg(B):

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0;\ \begin{vmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0;\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \ \rightarrow \mathrm{Rg}(B) = 2$$

<u>a= –1</u> Rg(A) ≠ Rg(B) → Sistema Incompatible

$$A\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Rg(A):

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0;\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \ \rightarrow \mathrm{Rg}(A) = 2$$

Rg(B):

$$\begin{vmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0;\ \begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 9 \neq 0 \ \rightarrow \mathrm{Rg}(B) = 3$$

b) Para a=2

$$\begin{cases} 2x + y - 2z = 2 \\ 2x + y - 2z = 2 \\ -x + y + z = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + y = 2 + 2\lambda \\ -x + y = -1 - \lambda \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + y = 2 + 2\lambda \\ \underline{x - y = 1 + \lambda} \\ 3x = 3 + 3\lambda \end{cases} \begin{matrix} \rightarrow (1+\lambda) - y = 1 + \lambda \rightarrow y = 0 \\ \rightarrow x = 1 + \lambda \end{matrix}$$

Solución: (1+λ, 0, λ)

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 3 puntos)
Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{5-x} & \text{si} \quad x \le 0 \\ \dfrac{1}{5+x} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Se pide:

a) (1 punto) Estudiar la continuidad de f y determinar sus asíntotas.
b) (1 punto) Estudiar la derivabilidad de f y calcular f'(x) donde sea posible.
c) (1 punto) Calcular $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

Solución:

a) Se analiza la continuidad en las funciones que componen f(x) y en el cambio de función x=0

$\frac{1}{5-x}$ es discontinua en x=5 pero como no pertenece al dominio de esta función, es continua en su dominio.

$\frac{1}{5+x}$ es discontinua en x= - 5 pero como no pertenece al dominio de esta función, es continua en su dominio.

Para x=0

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{5+x} = \frac{1}{5}$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{5-x} = \frac{1}{5}$$

$$f(0) = \frac{1}{5-0} = \frac{1}{5}$$

Como $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$ la función es continua en $\mathbb{R}$

Estudio asíntotas

∄ A.V.

A.H. en y=0

$$\lim_{x\to \infty} \frac{1}{5+x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{5-x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

b) Analizamos la derivabilidad en x=0.

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(5-x)^2} & \text{si} \quad x<0\\ \dfrac{-1}{(5+x)^2} & \text{si} \quad x>0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{-1}{(5+x)^2}=-\frac{1}{5}$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{(5-x)^2}=\frac{1}{5}$$

Como $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)$ la función no es derivable en x=0

c) La integral se va a dividir en dos integrales al ser una función a trozos y el intervalo incluir el punto en el que cambian las funciones:

$$I=\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=\int_{-1}^{0}\frac{1}{5-x}dx+\int_{0}^{1}\frac{1}{5+x}dx=-\mathrm{Ln}|5-x|\;\Big]_{-1}^{0}+\mathrm{Ln}|5+x|\;\Big]_{0}^{1}=$$

$$=(-\mathrm{Ln}5+\mathrm{Ln}6)+(\mathrm{Ln}6-\mathrm{Ln}5)=2\mathrm{Ln}6-2\mathrm{Ln}5=0{,}3646$$

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)

Sea π el plano que contiene a los puntos A(0, 2,1), B(1, 0, 1) y C(-1, -2, -1). Calcule el volumen del tetraedro que forma el origen de coordenadas con los puntos de intersección de π con cada uno de los ejes coordenados.

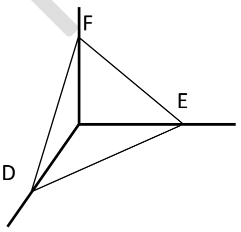
Solución:

$$\pi \in \begin{cases} A\,(0,2,1)\\ B(1,0,1)\\ C(-1,-2,-1)\end{cases}$$

$$\overrightarrow{AB}=B-A=(1,-2,0)$$

$$\overrightarrow{AC}=C-A=(-1,-4,-2)$$

$$\pi\equiv\begin{vmatrix} x & y-2 & z-1\\ 1 & -2 & 0\\ -1 & -4 & -2\end{vmatrix}=4x-4(z-1)-2(z-1)+2(y-2)=0\rightarrow 2x+y-3z+1=0$$



$$F \;\rightarrow\; 3z+1=0 \;\rightarrow\; z=-\frac{1}{3} \qquad F\left(0,0,-\frac{1}{3}\right)$$

$$E \;\rightarrow\; 2x+1=0 \;\rightarrow\; x=-\frac{1}{2} \qquad E\left(-\frac{1}{2},0,0\right)$$

$$D \;\rightarrow\; y+1=0 \;\rightarrow\; y=-1 \qquad D\,(0,-1,0)$$

Vectores propios del tetraedro

$$\overrightarrow{OF}\left(0,0,-\frac{1}{3}\right) \qquad \overrightarrow{OE}\left(-\frac{1}{2},0,0\right) \qquad \overrightarrow{OD}\,(0,-1,0)$$

$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}0 & 0 & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{vmatrix}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}u^3$$

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)
Dados el plano $\pi \equiv 3x+3y+z-9=0$, se pide:

a) (1 punto) Determinar la ecuación del plano perpendicular a π que contiene al eje OX.
b) (1 punto) Determinar el punto del plano π más cercano al origen de coordenadas.

Solución:

a) Por ser $\beta\perp\pi$, éste contiene al vector normal de π.

$V_\pi(3,3,1)$ $V_x(1,0,0)$ $P_o(0,0,0)$

$$\beta\equiv\begin{vmatrix}x & y & z\\ 3 & 3 & 3\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=y-3z=0$$

b) El punto más cercano será el que esté en la recta r perpendicular al plano π que pase por el origen de coordenadas.

$V_\pi(3,3,1)$ $P_o(0,0,0)$

$$r\equiv\begin{cases}x=3t\\ y=3t\\ z=t\end{cases}$$

El punto pedido será la intersección de la recta con el plano π.

$$3\cdot 3t+3\cdot 3t+t-9=0\ \rightarrow\ 19t=9\ \rightarrow\ t=\frac{9}{19}$$

$$P\equiv\begin{cases}x=3\cdot\frac{9}{19}=\frac{27}{19}\\ y=3\cdot\frac{9}{19}=\frac{27}{19}\\ z=\frac{9}{19}\end{cases}$$