UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
PRUEBA DE ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS
OFICIALES DE GRADO
Curso **2014-2015**
MATERIA: MATEMÁTICAS II

2

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida. Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora científica, siempre que no disponga de capacidad de representación gráfica o de cálculo simbólico. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas**.
Calificación: Las preguntas 1ª y 2ª se valorarán sobre 3 puntos; las preguntas 3ª y 4ª sobre 2 puntos.
Tiempo: 90 minutos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. **Calificación máxima:** 3 puntos.
Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -mx & + & my & + & z & = & 0\,, \\ x & - & my & + & 3z & = & 4\,, \\ 2x & - & 2y & - & z & = & 0\,, \end{array}\right.$$

se pide:

a) (2 puntos) Discutirlo según los valores del parámetro m.
b) ($0'5$ puntos) Resolverlo en el caso $m = 0$.
c) ($0'5$ puntos) Resolverlo en el caso $m = 2$.

Ejercicio 2. **Calificación máxima:** 3 puntos.
La recta r pasa por $P(2,-1,0)$ y tiene vector director $(1,\lambda,-2)$; la recta s pasa por $Q(1,0,-1)$ y tiene vector director $(2,4,2)$.

a) (2 puntos) Calcular $\lambda > 0$ para que la distancia entre r y s sea $\dfrac{9}{\sqrt{59}}$.
b) (1 punto) Calcular λ para que r sea perpendicular a la recta que pasa por P y Q.

Ejercicio 3. **Calificación máxima:** 2 puntos.

a) ($0'5$ puntos) Estudiar el crecimiento de la función $f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3$.
b) ($1'5$ puntos) Demostrar que la ecuación $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 = 0$ tiene una única solución real y localizar un intervalo de longitud 1 que la contenga.

Ejercicio 4. **Calificación máxima:** 2 puntos.

a) (1 punto) Calcular la integral definida $\displaystyle\int_1^4 (1-x)e^{-x}dx$.
b) (1 punto) Calcular $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(1-x)e^{-x}$ y $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(1-x)e^{-x}$.

OPCIÓN B

Ejercicio 1 . Calificación máxima: 3 puntos.
Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} a + x\ln(x)\,, & \text{si } x > 0\,, \\ x^2 e^x\,, & \text{si } x \leq 0\,, \end{cases}$$

(donde ln denota logaritmo neperiano y a es un número real) se pide:

a) (1 punto) Calcular el valor de a para que $f(x)$ sea continua en todo $\mathbb{R}$.
b) (1 punto) Calcular $f'(x)$ donde sea posible.
c) (1 punto) Calcular $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$.

Ejercicio 2 . Calificación máxima: 3 puntos.
Dados los puntos $P(-1,-1,1)$, $Q(1,0,2)$ y los planos

$$\pi_1 \equiv x - z = 0, \qquad \pi_2 \equiv my - 6z = 0, \qquad \pi_3 \equiv x + y - mz = 0,$$

se pide:

a) (1 punto) Calcular los valores de m para los que los tres planos se cortan en una recta.
b) (1 punto) Para $m = 3$, hallar la ecuación del plano que contiene al punto P y es perpendicular a la recta de intersección de los planos π_1 y π_2.
c) (1 punto) Hallar la distancia entre los puntos Q y P', siendo P' el punto simétrico de P respecto al plano π_1.

Ejercicio 3 . Calificación máxima: 2 puntos.
Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3$ y usando las propiedades de los determinantes, calcular el valor de los siguientes determinantes:

$$\text{a)(1 punto)} \begin{vmatrix} 2a-2b & c & 5b \\ 2d-2e & f & 5e \\ -2 & 3 & 10 \end{vmatrix} \qquad \text{b)(1 punto)} \begin{vmatrix} a-1 & b-2 & 2c-6 \\ 2 & 4 & 12 \\ d & e & 2f \end{vmatrix}$$

Ejercicio 4 . Calificación máxima: 2 puntos.
Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, hallar todas las matrices $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ que conmutan con A, es decir que cumplen $AB = BA$.

OPCIÓN A

1) a) Matrices asociadas : $M=\begin{pmatrix}-m & m & 1\\ 1 & -m & 3\\ 1 & -2 & -1\end{pmatrix}$ y $M^*=\left(\begin{array}{ccc|c}-m & m & 1 & 0\\ 1 & -m & 3 & 4\\ 1 & -2 & -1 & 0\end{array}\right)$.

$$|M|=\begin{vmatrix}-m & m & 1\\ 1 & -m & 3\\ 1 & -2 & -1\end{vmatrix}=-m^2+3m-2=0\Rightarrow\left\langle\begin{array}{l}m=1\\ m=2\end{array}\right..$$

- <u>Caso 1</u>.- Si $m\neq 1,\ \ m\neq 2,\ |M|\neq 0\Rightarrow rang(M)=3=rang(M^*)\Rightarrow SCD$
- <u>Caso 2</u>.- Si $m=1,\ rang(M^*)=rang\left(\begin{array}{ccc|c}-1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 3 & 4\\ 2 & -2 & -1 & 0\end{array}\right)=\begin{array}{c}F_2\leftrightarrow F_1\\ F_3+2F_1\end{array}=rang\left(\begin{array}{ccc|c}-1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4 & 4\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right)=F_2/4=$

$$=rang\left(\begin{array}{ccc|c}-1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right)=F_3-F_2=rang\left(\begin{array}{ccc|c}-1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{array}\right)=3\neq 2=rang(M)\Rightarrow SI$$

- <u>Caso 3</u>.- Si $m=2$,

$$rang(M^*)=rang\left(\begin{array}{ccc|c}-2 & 2 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 3 & 4\\ 2 & -2 & -1 & 0\end{array}\right)=F_1\leftrightarrow F_2=rang\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 3 & 4\\ -2 & 2 & 1 & 0\\ 2 & -2 & -1 & 0\end{array}\right)=\begin{array}{c}F_2+2F_1\\ F_3-2F_1\end{array}=$$

$$=rang\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 3 & 4\\ 0 & -2 & 7 & 8\\ 0 & 2 & -7 & -8\end{array}\right)=F_3+F_2=rang\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 3 & 4\\ 0 & -2 & 7 & 8\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)=2=rang(M)\Rightarrow SCI$$

b) Si $m=0$, el sistema es compatible determinado (ver apartado a)). Sustituyendo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 3 & 4\\ 2 & -2 & -1 & 0\end{array}\right)\approx F_3-2F_2=\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 3 & 4\\ 0 & -2 & -7 & -8\end{array}\right).$$ En ecuaciones: $\left\{\begin{array}{c}z=0\\ x+3z=4\\ -2y-z=-8\end{array}\right\}\Rightarrow\boxed{x=4},\ \boxed{y=4},\ \boxed{z=0}$

c) Si $m=2$, el sistema es compatible indeterminado (ver apartado a)). Sustituyendo:

$\left(\begin{array}{ccc|c}-1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 3 & 4\\ 2 & -2 & -1 & 0\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 3 & 4\\ 0 & -2 & 7 & 8\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$. En ecuaciones: $\left\{\begin{array}{c}x-2y+3z=4\\ -2y+7z=8\end{array}\right\}$. Si $z=\lambda$, de la 2ª ecuación: $-2y+7\lambda=8\Rightarrow y=\dfrac{7\lambda-8}{2}$. Sustituyendo en la 1ª ecuación: $x-2\cdot\left(\dfrac{7\lambda-8}{2}\right)+3\lambda=4\Rightarrow$,

$\Rightarrow x-7\lambda+8+3\lambda=4\Rightarrow x=4\lambda-4$ luego la solución será $\boxed{\left\{\left(4\lambda-4,\dfrac{7\lambda-8}{2},\lambda\right)\Big\|\ \lambda\in R\right\}}$.

2) a) En paramétricas las rectas son: $r \equiv \begin{cases} x = 2+t \\ y = -1+\lambda t \\ z = -2t \end{cases}$, $s \equiv \begin{cases} x = 1+2\mu \\ y = 4\mu \\ z = -1+2\mu \end{cases}$.

Sus vectores directores son: $\vec{v}_r = (1,\lambda,-2)$, $\vec{v}_s = (2,4,2)$, no son paralelos, luego r y s se cruzan

Como $\overrightarrow{PQ} = (-1,1,-1)$, $d(r,s) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{PQ},\vec{v}_r,\vec{v}_s\right]\right|}{\left|\vec{v}_r \wedge \vec{v}_s\right|} = \dfrac{\left\|\begin{matrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & \lambda & -2 \\ 2 & 4 & 2 \end{matrix}\right\|}{\left\|\begin{matrix} i & j & k \\ 1 & \lambda & -2 \\ 2 & 4 & 2 \end{matrix}\right\|} = \dfrac{18}{\left|(2\lambda+8,-6,4-2\lambda)\right|} =$

$= \dfrac{18}{\sqrt{(2\lambda+8)^2+(-6)^2+(4-2\lambda)^2}} = \dfrac{18}{\sqrt{8\lambda^2+16\lambda+116}}$. Como $d(r,s) = \dfrac{9}{\sqrt{59}}$, se tendrá:

$\dfrac{18}{\sqrt{8\lambda^2+16\lambda+116}} = \dfrac{9}{\sqrt{59}} \Rightarrow 2\sqrt{59} = \sqrt{\sqrt{8\lambda^2+16\lambda+116}} \Rightarrow 236 = 8\lambda^2+16\lambda+116 \Rightarrow 8\lambda^2+16\lambda-120 = 0$

Resolviendo: $\lambda = -5, \lambda = 3$, como solo interesa el valor positivo: $\boxed{\lambda = 3}$

b) $\overrightarrow{PQ} = (-1,1,-1)$, $\vec{v}_r = (1,\lambda,-2)$. si han de ser perpendiculares: $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v}_r = 0 \Rightarrow (-1,1,-1)\cdot(1,\lambda,-2) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -1+\lambda+2 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = -1}$

---

3) a) Sea $f(x) = 1+2x+3x^2+4x^3 \Rightarrow f'(x) = 2+6x+12x^2 > 0$, luego la función siempre es creciente en R

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+2x+3x^2+4x^3\right) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(1+2x+3x^2+4x^3\right) = +\infty$

Como $f(x) = 1+2x+3x^2+4x^3$ es continua en R (es un polinomio), por Bolzano existe un punto en el que se anula (tiene una solución real $1+2x+3x^2+4x^3 = 0$). Además es única ya que la derivada no se anula nunca. (ver apartado a))

El intervalo [-1,0] es el pedido, pues: $f(-1) = -2 < 0$ y $f(0) = 1 > 0$

---

4) a) Calculamos la primitiva $\int (1-x)\,e^{-x}\,dx$ por partes:

$$\int (1-x)e^{-x}\,dx = \left\{\begin{matrix} u = 1-x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{-x}dx \Rightarrow v = -e^{-x} \end{matrix}\right\} = -(1-x)e^{-x} + \int e^{-x}\,dx = (x-1)e^{-x} + e^{-x} + C =$$

$$= xe^{-x} - e^{x} + e^{-x} + C = xe^{-x} + C$$

Así: $\displaystyle\int_1^4 (1-x)\,e^{-x}\,dx = \left[xe^{-x}\right]_1^4 = 4e^{-4} - e^{-1} = \boxed{\frac{4}{e^4} - \frac{1}{e}}$

b) $\lim_{x\to+\infty}(1-x)\,e^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-x}{e^x}=\frac{-\infty}{+\infty}=L'H=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{e^x}=\boxed{0}$

$\lim_{x\to-\infty}(1-x)\,e^{-x}=(+\infty)\div(+\infty)=\boxed{+\infty}$

OPCIÓN B

1) Sea la función $f(x)=\begin{cases} a+x\ln(x) & si\ x>0 \\ x^2e^x & si\ x\le 0\end{cases}$:

a) Continuidad de f . En $R-\{0\}$ es continua por ser operaciones con funciones continuas

En $x=0$. Estudiamos límites laterales:

- $\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0}\left(x^2e^x\right)=0$;
- $\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0}(a+x\ln(x))=a+0\cdot(-\infty)=a+\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(x)}{1/x}\right)=a+\frac{-\infty}{+\infty}=L'H=a+\lim_{x\to 0}\left(\frac{1/x}{-1/x^2}\right)=$

  $=a+\lim_{x\to 0}(-x)=a+0$

Igualando $a+0=0\Rightarrow\boxed{a=0}$

b) Haciendo $a=0$. $f'(x)=\begin{cases} 1+\ln(x) & si\ x>0 \\ (x+2)\,xe^x & si\ x<0\end{cases}$ Veamos que ocurre en $x=0$

$f'(0^-)=\lim_{x\to 0}\left((x+2)xe^x\right)_{x=0}=0$; $f'(0^+)=\lim_{x\to 0}(1+\ln(x))_{x=0}=-\infty$. Luego no derivable en $x=0$

c) Calculamos $\int x^2e^x\,dx$ por partes.

$$\int x^2e^x\,dx=\begin{Bmatrix} u=x^2\Rightarrow du=2xdx \\ dv=e^xdx\Rightarrow v=e^x\end{Bmatrix}=x^2e^x-\int 2xe^x\,dx=\text{procediendo de nuevo por partes}$$

$$=x^2e^x-\begin{Bmatrix} u=2x\Rightarrow du=2dx \\ dv=e^xdx\Rightarrow v=e^x\end{Bmatrix}=x^2e^x-\left(2xe^x-\int 2xe^x\,dx\right)=x^2e^x-2xe^x+\int 2e^x\,dx=$$

$$=x^2e^x-2xe^x+2e^x+C$$

Luego $\int_{-1}^{0}f(x)\,dx=\left[x^2e^x-2xe^x+2e^x\right]_{-1}^{0}=\boxed{2-\frac{5}{e}}$

2) Sean los puntos $P(-1,-1,1)$, $Q(1,0,2)$ y los planos: $\pi_1\equiv x-z=0,\ \ \pi_2\equiv my-6z=0,$

$\pi_3\equiv x+y-mz=0,$

a) Si los planos se han de cortar en una recta $\vec{n}_{\pi_1}, \vec{n}_{\pi_2}, \vec{n}_{\pi_3}$ han de ser linealmente dependientes, es decir

$rang(\vec{n}_{\pi_1}, \vec{n}_{\pi_2}, \vec{n}_{\pi_3}) < 3 \Rightarrow |\vec{n}_{\pi_1}, \vec{n}_{\pi_2}, \vec{n}_{\pi_3}| = 0$. Como $\vec{n}_{\pi_1} = (1,0,-1), \vec{n}_{\pi_2} = (0,m,-6), \vec{n}_{\pi_3} = (1,1,-m)$

sustituyendo: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & -6 \\ 1 & 1 & -m \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -m^2 + m + 6 = 0 \Rightarrow \boxed{m = -2}$ y $\boxed{m = 3}$

b) Si $m = 3$, sea π el plano pedido, $\vec{n}_\pi = \vec{n}_{\pi_1} \wedge \vec{n}_{\pi_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -6 \end{vmatrix} = (3,6,3)$.

Luego $\pi \equiv 3x + 6y + 3z + D = 0,$ como además el plano pasa por el punto $P(-1,-1,1)$, sustituyendo:

$-3 - 6 + 3 + D = 0 \Rightarrow D = 6$, luego $\pi \equiv 3x + 6y + 3z + 6 = 0$ o $\boxed{\pi \equiv x + 2y + z + 2 = 0}$

c) Sea $P'(a,b,c)$ simétrico de P respecto al plano $\pi_1 \equiv x - z = 0$

Construimos una recta s perpendicular a π_1 , que pase por P , $s \perp \pi \Rightarrow \vec{v}_s \| \vec{n}_{\pi_1} \Rightarrow \vec{v}_s = (1,0,-1)$

Con lo que en paramétricas $s: \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = -1 \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$. Sea Q el punto de corte de la recta s con π_1

Sustituyendo en el plano $-1 + \lambda - (1 - \lambda) = 0 \Rightarrow -2 + 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 1$. Con lo que el punto $Q(-1+1,-1,1-1) = (0,-1,0)$

Imponemos por último que Q sea el punto medio de PP': $\left(\frac{a-1}{2}, \frac{b-1}{2}, \frac{c+1}{2}\right) = (0,-1,0)$

Igualando componentes $\left\{\begin{array}{c} 0 = (a-1)/2 \\ -1 = (b-1)/2 \\ 0 = (c+1)/2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 1 \\ b = -1 \\ c = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{P' = (1,-1,-1)}$

Así: $d(Q,P') = \sqrt{(1-1)^2 + (-1-0)^2 + (-1-2)^2} \Rightarrow \boxed{d = \sqrt{10}}$

---

3) a) $\begin{vmatrix} 2a-2b & c & 5b \\ 2d-2e & f & 5e \\ -2 & 3 & 10 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 2a-2b & c & b \\ 2d-2e & f & e \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = C_1 + 2C_5 = 5 \cdot \begin{vmatrix} 2a & c & b \\ 2d & f & e \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} a & c & b \\ d & f & e \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = C_2 \leftrightarrow C_3 =$

$= -5 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$. Como $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3$, $\begin{vmatrix} 2a-2b & c & 5b \\ 2d-2e & f & 5e \\ -2 & 3 & 10 \end{vmatrix} = \boxed{-30}$

b) $\begin{vmatrix} a-1 & b-2 & 2c-6 \\ 2 & 4 & 12 \\ d & e & 2f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-1 & b-2 & 2(c-3) \\ 2 & 4 & 2\cdot 6 \\ d & e & 2f \end{vmatrix} = 2\cdot \begin{vmatrix} a-1 & b-2 & c-3 \\ 2 & 4 & 6 \\ d & e & f \end{vmatrix} = 2\cdot \begin{vmatrix} a-1 & b-2 & c-3 \\ 2\cdot 1 & 2\cdot 2 & 2\cdot 3 \\ d & e & f \end{vmatrix} =$

$$= 2\cdot 2\cdot \begin{vmatrix} a-1 & b-2 & c-3 \\ 1 & 2 & 3 \\ d & e & f \end{vmatrix} = F_1 + F_2 == 4\cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \\ d & e & f \end{vmatrix} = F_2 \leftrightarrow F_3 = -4\cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-4)\cdot 3 = \boxed{-12}$$

---

4) Si $AB = BA \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3a+c & 3b+d \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a+b & a \\ 3c+d & c \end{pmatrix} \Rightarrow$ en ecuaciones

$\left\{ \begin{array}{c} 3a+c = 3a+b \\ 3b+d = a \\ a = 3c+d \\ b = c \end{array} \right\}$. La 1ª y 4ª ecuación son equivalentes, luego $\boxed{B = \begin{pmatrix} 3b+d & b \\ b & d \end{pmatrix}}$
