OPCIÓN A

Ejercicio 1.- Calificación máxima 3 puntos

Dada la función: $f(x)=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{x}{x+4}$ se pide

a) **(1 punto)** Determinar el dominio de **f** y sus asíntotas

b) **(1 punto)** Calcular **f'(x)** y determinar los extremos relativos de f**(x)**

c) **(1 punto)** Calcular $\int_0^1 f(x)\,dx$

$a)$

$$\begin{cases} x+1=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow f(-1)=\dfrac{1}{-1+1}+\dfrac{-1}{(-1)+4}=\dfrac{1}{0}-\dfrac{1}{3} \Rightarrow Sin\ solución \\ x+4=0 \Rightarrow x=-4 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow f(-4)=\dfrac{1}{(-4)+1}+\dfrac{(-4)}{(-4)+4}=-\dfrac{1}{3}+\dfrac{-4}{0} \Rightarrow Sin\ solución \end{cases}$$

$$Dom\,(f)=\forall x \in \Re-\{-4\,,\,-1\} \Rightarrow Asíntotas\ verticales \Rightarrow \begin{cases} x=-4 \\ x=-1 \end{cases}$$

Asíntotas horizontales

$$y=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x+1}+\frac{x}{x+4}\right)=\frac{1}{\infty}+\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(0+\frac{\frac{x}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{4}{x}}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{4}{x}}=\frac{1}{1+\frac{4}{\infty}}=\frac{1}{1+0}=1 \Rightarrow$$

$$Existe\ a\sin tota\ horizontal,\ y=1, cuando\ x\to\infty$$

$$y=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x+1}+\frac{x}{x+4}\right)=\frac{1}{-\infty}+\frac{-\infty}{-\infty}=0+\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x+4}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{4}{x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{1+\frac{4}{-\infty}}=\frac{1}{1+0}=1$$

$$Existe\ a\sin tota\ horizontal,\ y=1, cuando\ x\to-\infty$$

Asíntotas oblicuas

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{x+1}+\frac{x}{x+4}\right)}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2+x}+\frac{x}{x^2+4x}\right)=\frac{1}{\infty}+\frac{\infty}{\infty}=0+\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2+4x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+4\frac{x}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{4}{x}}=\frac{\frac{1}{\infty}}{1+\frac{4}{\infty}}=\frac{0}{1+0}=0 \Rightarrow No\ existe\ a\sin tota\ oblicua$$

$$m=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x^2+x}+\frac{x}{x^2+4x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2-x}+\frac{-x}{x^2-4x}\right)=\frac{1}{\infty}+\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{x^2-4x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-4\frac{x}{x^2}}=0$$

$$\Rightarrow No\ existe\ asíntota\ oblicua$$

Continuación del Ejercicio 1 de la opción A

b)

$$f(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{x}{x+4}\Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{(x+4)-x}{(x+4)^2}\Rightarrow f'(x)=-\frac{(x+4)^2+4\,(x+1)^2}{(x+1)^2(x+4)^2}$$

$$f'(x)=-\frac{\left(x^2+8x+16\right)-4\left(x^2+2x+1\right)}{(x+1)^2(x+4)^2}=-\frac{x^2+8x+16-4x^2-8x-4}{(x+1)^2(x+4)^2}=(-1)\frac{(-3)x^2+12}{(x+1)^2(x+4)^2}$$

$$f'(x)=\frac{3x^2-12}{(x+1)^2(x+4)^2}\Rightarrow f'(x)=\frac{3\left(x^2-4\right)}{(x+1)^2(x+4)^2}=\frac{3\,(x+2)\,(x-2)}{(x+1)^2(x+4)^2}.$$

$$Crecimiento\Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow\frac{3\,(x+2)\,(x-2)}{(x+1)^2(x+4)^2}>0\Rightarrow\begin{cases}3>0\Rightarrow\forall x\in\Re\\ x+2>0\Rightarrow x>-2\\ x-2>0\Rightarrow x>2\\ (x+1)^2>0\Rightarrow\forall x\in\Re\\ (x+4)^2>0\Rightarrow\forall x\in\Re\end{cases}$$

	$-\infty$ -2	-2 2	2 ∞
3 > 0	**(+)**	**(+)**	**(+)**
x > -2	**(-)**	**(+)**	**(+)**
x > 2	**(-)**	**(-)**	**(+)**
$(x + 1)^2$	**(+)**	**(+)**	**(+)**
$(x + 4)^2$	**(+)**	**(+)**	**(+)**
Solución	**(+)**	**(-)**	**(+)**

Decrecimiento $\forall x\in\Re/-2<x<2$ **Crecimiento** $\forall x\in\Re/(x<-2)\cup(x>2)$

Máximo relativo en $x=-2\Rightarrow f(-2)=\frac{1}{-2+1}+\frac{-2}{-2+4}=-1-1=-2$ **de crecimiento pasa a decrecimiento**

Mínimo relativo en $x=2\Rightarrow f(2)=\frac{1}{2+1}+\frac{2}{2+4}=\frac{1}{3}+\frac{2}{6}=\frac{2}{3}$ **de decrecimiento pasa a crecimiento**

$$I=\int_0^1\left(\frac{1}{x+1}+\frac{x}{x+4}\right)dx=\int_0^1\frac{1}{x+1}\,dx=+\int_0^1\frac{x}{x+4}\,dx=\int_1^2\frac{dt}{t}\,dx=\int_1^2\frac{1}{t}\,dt+\int_0^1\frac{x+4-4}{x+4}\,dx=$$

$$x+1=t\Rightarrow dx=dt\Rightarrow\begin{cases}x=1\Rightarrow t=2\\ x=0\Rightarrow t=1\end{cases}$$

$$I=[\ln t]_1^2+\int_0^1\frac{x+4}{x+4}\,dx-\int_0^1\frac{4}{x+4}\,dx=(\ln 2-\ln 1)+\int_0^1 1\cdot dx-\int_0^1\frac{4}{x+4}\,dx=(\ln 2-0)+[x]_0^1-4\int_4^5\frac{du}{u}$$

$$x+4=u\Rightarrow dx=du\Rightarrow\begin{cases}x=1\Rightarrow t=5\\ x=0\Rightarrow t=4\end{cases}$$

$$I=\ln 2+(1-0)-4\cdot[\ln u]_4^5=\ln 2+1-4\cdot(\ln 5-\ln 4)=1+\ln 2-4\cdot\ln 5+4\cdot\ln 4=1+\ln 2-\ln 5^4+\ln 4^4$$

$$I=1+\ln\frac{2\cdot 4^4}{5^4}=1+\ln\frac{512}{625}$$

Ejercicio 2.- Calificación máxima 3 puntos

Dada las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & a & a\\ 1 & a & 1\\ a-1 & a & 2\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\\ w\end{pmatrix}$, $O=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ **,** se pide:

a) **(1 punto)** Determinar el valor o valores de **a** para los cuales no existe la matriz inversa A^{-1}
b) **(1 punto)** Para **a = -2**, hallar la matriz inversa $\mathbf{A^{-1}}$
c) **(1 punto)** Para **a = 1** calcular todas las soluciones del sistema lineal **AX = O**

$a)$

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & a & a\\ 1 & a & 1\\ a-1 & a & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & a & a\\ 0 & 0 & 1-a\\ a-2 & 0 & 2-a\end{vmatrix}=(-a)\cdot\begin{vmatrix}0 & 1-a\\ a-2 & 2-a\end{vmatrix}=(-a)\cdot[-(a-2)\cdot(1-a)]=a\cdot(1-a)\cdot(a-2)$$

$$Si\ |A|=0\Rightarrow a\cdot(1-a)\cdot(a-2)=0\Rightarrow\begin{cases}a=0\\ 1-a=0\Rightarrow a=1\\ a-2=0\Rightarrow a=2\end{cases}\Rightarrow\forall a\in\Re-\{0,1,2\}\Rightarrow|A|\neq 0\Rightarrow Existe\ A^{-1}$$

$No\ existe\ cuando\ a=0\ ó\ a=1\ ó\ a=2$

$b)$

$$Si\ a=-2\Rightarrow|A|=(-2)\cdot[1-(-2)]\cdot(-2-2)=(-2)\cdot 3\cdot(-4)=24\neq 0\Rightarrow Existe\ A^{-1}\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot adj\ A^t$$

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & -2\\ 1 & -2 & 1\\ -3 & -2 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow A^t=\begin{pmatrix}1 & 1 & -3\\ -2 & -2 & -2\\ -2 & 1 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow adj\ A^t=\begin{pmatrix}-2 & 8 & -6\\ -5 & -4 & -3\\ -8 & 8 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$A^{-1}=\frac{1}{24}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 8 & -6\\ -5 & -4 & -3\\ -8 & 8 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{12} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{4}\\ -\frac{5}{24} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{8}\\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0\end{pmatrix}$$

c) El sistema es homogéneo siendo compatible determinado para todo valor que haga que el determinante A, de los coeficientes no sea nulo y su solución es la trivial (0 , 0 , 0); cuando sea cero el determinante el sistema es compatible indeterminado de la que tendremos que hallar su solución paramétrica

$$|A|=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0\end{array}\right)\Rightarrow rang\ (A)=rang\ (A/B)=2<Número\ de\ incógnitas\Rightarrow$$

$$Compatible\ In\det er\min ado\Rightarrow y+2z=0\Rightarrow y=-2z\Rightarrow x-2z+z=0\Rightarrow x=z\Rightarrow$$
$$Solución\Rightarrow(x\ ,\ y\ ,\ z)=(\lambda\ ,\ -2\lambda\ ,\ \lambda)$$

Ejercicio 3.- Calificación máxima 2 puntos
Dado los puntos **A(2 , 0 , - 2)** , **B(3 , - 4 , - 1)** , **C(5 , 4 , - 3)** y **D(0 , 1 , 4**), se pide:
a) **(1 punto)** Calcular el área del triángulo de vértices **A, B** y **C**
b) **(1 punto)** Calcular el volumen del tetraedro **ABCD**

a) El área del triángulo **ABC** es igual a la mitad del módulo del vector que resulta al hallar el producto vectorial de los vectores **AB** y **AC** (al tratarse de valores numéricos no pueden simplificarse ambos vectores)

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (3 , -4 , -1) - (2 , 0 , -2) = (1 , -4 , 1) \\ \overrightarrow{AC} = (5 , 4 , -3) - (2 , 0 , -2) = (3 , 4 , -1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -4 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 4\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k} + 12\vec{k} - 4\vec{i} + \vec{j} = 4\vec{j} + 16\vec{k} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (0 , 4 , 16)$$

$$Área = \frac{1}{2} \cdot \left| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \right| \Rightarrow \left| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \right| = \sqrt{0^2 + 4^2 + 16^2} = \sqrt{16 + 256} = \sqrt{272} \Rightarrow Área = 4\sqrt{17}\ u^2$$

b) El volumen del tetraedro es la sexta parte del valor calculado con el producto mixto de los tres vectores **AB, AC y AD**

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1 , -4 , 1) \\ \overrightarrow{AC} = (3 , 4 , -1) \\ \overrightarrow{AD} = (0 , 1 , 4) - (2 , 0 , -2) = (-2 , -1 , 6) \end{cases} \Rightarrow V = \frac{1}{6} \cdot \left| \overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD} \right) \right| \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD} \right) = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 6 \\ 1 & -4 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -8 - 3 + 24 + 72 + 8 - 1 = 92 \Rightarrow V = \frac{1}{6} \cdot |92| = \frac{92}{6} = \frac{46}{3}\ u^3$$

Ejercicio 4.- Calificación máxima 2 puntos
Dados los planos: $\pi_1 \equiv 2x + z - 1 = 0$, $\pi_2 \equiv x + z + 2 = 0$, $\pi_3 \equiv x + 3y + 2z - 3 = 0$,se pide:
a) **(1 punto)** Obtener las ecuaciones paramétricas de la recta determinada por $\pi_1\ y\ \pi_2$
b) **(1 punto)** Calcular el seno del ángulo que la recta del plano anterior forma con el plano π_3

a)

$$\begin{cases} 2x + z - 1 = 0 \\ -x - z - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow 3 + z + 2 = 0 \Rightarrow z = -5 \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 3 \\ y = \lambda \\ z = -5 \end{cases}$$

$b)$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (0 , 1 , 0) \\ \overrightarrow{v_{\pi_3}} = (1 , 3 , 2) \end{cases} \Rightarrow sen\ \alpha = \frac{\left| \overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_{\pi_3}} \right|}{\left| \overrightarrow{v_r} \right| \cdot \left| \overrightarrow{v_{\pi_3}} \right|} = \frac{|(0 , 1 , 0) \cdot (1 , 3 , 2)|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2} \cdot \sqrt{1^2 + 3^2 + 2^2}} = \frac{|0 + 3 + 0|}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{14}} = \frac{3}{\sqrt{14}} = \frac{3\sqrt{14}}{14}$$

$$\alpha = arc\ sen \left(\frac{3\sqrt{14}}{14} \right) = 53º18'2'' \quad (no\ lo\ pide\ el\ problema)$$

OPCIÓN B

Ejercicio 1.- Calificación máxima 3 puntos

Dados el plano π y la recta r siguientes:

$$\pi \equiv 2x - y + 2z + 3 = 0, \qquad r \equiv \begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = 2 - 2t, \\ z = 1 + t, \end{cases}$$

se pide:

a) (1 punto) Estudiar la posición relativa de r y π.

b) (1 punto) Calcular la distancia entre r y π.

c) (1 punto) Obtener el punto P' simétrico de $P(3, 2, 1)$ respecto del plano π.

a) Una recta y un plano pueden ser paralelos, que la recta este contenida en el plano o, finalmente, que se corten en un punto.
Puesta la recta r en ecuación implícita analizaremos si el sistema es compatible determinado que nos diría que la recta y el plano se cortan en un punto; si el sistema es compatible indeterminado la recta está contenida en el plano y, finalmente, si el sistema es incompatible la recta y el plano son paralelos

$$r \equiv \frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{-2} = z - 1 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y-2}{-2} \Rightarrow x - 1 = y - 2 \Rightarrow x - y + 1 = 0 \\ \dfrac{x-1}{-2} = z - 1 \Rightarrow x - 1 = -2z + 2 \Rightarrow x + 2z - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = -1 \\ x + 2z = 3 \\ 2x - y + 2z = -3 \end{cases} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -4 + 2 + 2 = 0 \Rightarrow No\ se\ cortan\ el\ plano\ y\ la\ recta$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & -3 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right) \Rightarrow rang\ (A) = 2 \neq rang\ (A/B) = 3 \Rightarrow$$

$$Sistema\ Incompatible \Rightarrow El\ plano\ y\ la\ recta\ son\ paralelos$$

b) La distancia entre **r** y el plano π es la distancia de uno cualquiera de los puntos **R** de la recta (tomaremos el propuesto en su ecuación) al plano π.

$$Siendo\ R(1, 2, 1) \Rightarrow d(r, \pi) = d(R, \pi) = \frac{|2 \cdot 1 - 2 + 2 \cdot 1 + 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{|5|}{\sqrt{9}} = \frac{5}{3}\, u$$

c) Hallaremos una recta **s** que contenga al punto **P** y que sea perpendicular al plano π, que tendrá como vector director el del plano. Hallada la recta calcularemos el punto **Q** de intersección de ella y el plano, punto que es el punto medio entre **P** y su simétrico **P'**.

$$\overrightarrow{v_s} = \overrightarrow{v_\pi} = (2, -1, 2) \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases} \Rightarrow 2 \cdot (3 + 2\lambda) - (2 - \lambda) + 2 \cdot (1 + 2\lambda) + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$6 + 4\lambda - 2 + \lambda + 2 + 4\lambda + 3 = 0 \Rightarrow 9\lambda + 9 = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow Q \begin{cases} x = 3 + 2 \cdot (-1) \\ y = 2 - (-1) \\ z = 1 + 2 \cdot (-1) \end{cases} \Rightarrow Q(1, 3, -1)$$

Continuación del Ejercicio 1 de la opción B

$$\begin{cases} 1 = \dfrac{3 + x_{P'}}{2} \Rightarrow 3 + x_{P'} = 2 \Rightarrow x_{P'} = -1 \\ 3 = \dfrac{2 + y_{P'}}{2} \Rightarrow 2 + y_{P'} = 6 \Rightarrow y_{P'} = 4 \quad \Rightarrow P'(-1\,,\,4\,,\,-3) \\ -1 = \dfrac{1 + z_{P'}}{2} \Rightarrow 1 + z_{P'} = -2 \Rightarrow z_{P'} = -3 \end{cases}$$

Ejercicio 2.- Calificación máxima 3 puntos

Dada la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{5\,sen\,x}{2x} + \dfrac{1}{2} & si \quad x < 0 \\ a \quad si \quad x = 0 \\ xe^x + 3 \quad si \quad x > 0 \end{cases}$, se pide:

a) **(1 punto)** Hallar, si existe, el valor de **a** para que **f(x)** sea continua
b) **(1 punto)** Decir si la función es derivable en **x = 0** para algún valor de **a**
c) **(1 punto)** Calcular la integral $\int_1^{\ln 5} f(x)\,dx$ en donde **ln** denota logaritmo neperiano

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \dfrac{5\,sen\,0}{2x} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{5 \cdot 0}{2 \cdot 0} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{0}{0} + \dfrac{1}{2} = \xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital} \dfrac{1}{2} + \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{5\cos x}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{5\cos 0}{2} = \dfrac{6}{2} = 3 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0 \cdot e^0 + 3 = 0 \cdot 1 + 3 = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = 3 \Rightarrow Es\ continua\ cuando\ a = 3$$

b)

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{5}{2} \cdot \dfrac{x\cos x - sen\,x}{x^2} & si \quad x < 0 \\ 0 \quad si \quad x = 0 \\ e^x + xe^x \quad si \quad x > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = \dfrac{5}{2} \cdot \dfrac{0 \cdot \cos 0 - sen\,0}{0^2} = \dfrac{0}{0} = \xrightarrow{Aplican\ do\ L'Hopital} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{5}{2} \cdot \dfrac{\cos x - x\,sen\,x - \cos x}{2x} \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = e^0(1 + 0) = 1 \cdot 1 = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} -\frac{5}{4} \cdot \frac{x\,sen\,x}{x} = -\frac{5}{4} \cdot \frac{0 \cdot sen\,0}{0} = \frac{0}{0} = \xrightarrow{Aplican\ do\ L'Hopital} = \lim_{x \to 0^-} -\frac{5}{4} \cdot \frac{sen\,x + x\cos x}{1}$$

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = -\frac{5}{4} \cdot (sen\,0 + 0 \cdot \cos 0) = -\frac{5}{4} \cdot (\,0 + 0 \cdot 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = 0 \neq \lim_{x \to 0^+} f'(x) = 1 \Rightarrow No\ es\ derivable$$

Continuación del Ejercicio 2 de la opción B

$c)$

$$\int_1^{\ln 5}\left(xe^x+3\right)dx=\int_1^{\ln 5}3\,dx+\int_1^{\ln 5}xe^x\,dx=3\cdot[x]_1^{\ln 5}+\left[xe^x\right]_1^{\ln 5}-\int_1^{\ln 5}e^x\,dx=3\cdot(\ln 5-1)+\left(\ln 5\cdot e^{\ln 5}-1\cdot e^1\right)-\left[e^x\right]_1^{\ln 5}$$

$$\begin{cases} x=u\Rightarrow dx=du \\ e^x\,dx=dv\Rightarrow v=\int e^x\,dx=e^x \end{cases}$$

$$u=e^{\ln 5}\Rightarrow \ln u=\ln e^{\ln 5}=\ln 5\cdot\ln e=\ln 5\Rightarrow u=e^{\ln 5}=5$$

$$\int_1^{\ln 5}\left(xe^x+3\right)dx=\int_1^{\ln 5}e^x\,dx=3\ln 5-3+5\ln 5-e-\left(e^{\ln 5}-e^{l1}\right)=8\ln 5-3-e-5+e=8\ln 5-8$$

$$\int_1^{\ln 5}\left(xe^x+3\right)dx=8\left(\ln 5-1\right)$$

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.

Dada la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}\cdot B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

donde B es una matriz cuadrada de tamaño 2×2, se pide:

a) (1 punto) Calcular el valor o valores de a para los que esta ecuación tiene solución.

b) (1 punto) Calcular B en el caso $a=1$.

a) Tiene solución siempre que la matriz que contiene **a**, tenga inversa, parq ello su matriz no puede ser nula.

$$Llamando\ A=\begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} a & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}=7a-6\Rightarrow Si\ |A|=0\Rightarrow 7a-6=0\Rightarrow 7a=6\Rightarrow a=\frac{6}{7}$$

$$\forall a\in\Re-\left\{\frac{6}{7}\right\}\Rightarrow |A|\neq 0\Rightarrow Existe\ A^{-1}$$

$b)$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot B=A^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow I\cdot B=A^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow B=A^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A|=7\cdot 1-6=1\neq 0\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot adj\ A^t\Rightarrow A^t=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}\Rightarrow adj\ A^t=\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$A^{-1}=\frac{1}{1}\cdot\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow B=\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4.- Calificación máxima 2 puntos

Estudiar el rango de la matriz $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -3 & 5\\ 2 & 2 & -1 & a\\ 1 & 2 & 1 & 6\\ 3 & 1 & -4 & a\end{pmatrix}$, según los valores del parámetro **a**

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & -1 & -3 & 5\\ 2 & 2 & -1 & a\\ 1 & 2 & 1 & 6\\ 3 & 1 & -4 & a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & -5 & -5 & -7\\ 0 & -2 & -3 & a-12\\ 1 & 2 & 1 & 6\\ 0 & -5 & -7 & a-18\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}-5 & -5 & -7\\ -2 & -3 & a-12\\ -5 & -7 & a-18\end{vmatrix}$$

$$|A|=15\cdot(a-18)+25\cdot(a-12)-98+105-35\cdot(a-12)-10\cdot(a-18)=5\cdot(a-18)-10\cdot(a-12)+7$$

$$|A|=5a-90-10a+120+7=-5a+37\Rightarrow Si\ |A|=0\Rightarrow -5a+37=0\Rightarrow 5a=37\Rightarrow a=\frac{37}{5}$$

$$\forall a\in\Re-\left\{\frac{37}{5}\right\}\Rightarrow |A|\neq 0\Rightarrow rang\ (A)=4$$

$$Si\ a=\frac{37}{5}$$

$$\begin{pmatrix}2 & -1 & -3 & 5\\ 2 & 2 & -1 & \frac{37}{5}\\ 1 & 2 & 1 & 6\\ 3 & 1 & -4 & \frac{37}{5}\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}2 & -1 & -3 & 5\\ 10 & 10 & -5 & 37\\ 1 & 2 & 1 & 6\\ 15 & 5 & -20 & 37\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}2 & -1 & -3 & 5\\ 10 & 10 & -5 & 37\\ 2 & 4 & 2 & 12\\ 30 & 10 & -40 & 74\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}2 & -1 & -3 & 5\\ 0 & 15 & 10 & 12\\ 0 & 5 & 5 & 7\\ 0 & 25 & 5 & -1\end{pmatrix}\equiv$$

$$\equiv\begin{pmatrix}2 & -1 & -3 & 5\\ 0 & 0 & -5 & -9\\ 0 & 5 & 5 & 7\\ 0 & 0 & -20 & -36\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}2 & -1 & -3 & 5\\ 0 & 0 & -5 & -9\\ 0 & 5 & 5 & 7\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow rang\ (A)=3$$