OPCIÓN A

Ejercicio 1.- Calificación máxima: 3 puntos

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} k & k & k^2 \\ 1 & -1 & k \\ 2k & -2 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ se pide

a) (1'5 puntos). Hallar el rango de **A** en función de los valores de **k**
b) (0'75 puntos). Para **k = 2** hallar, si existe, la solución del sistema **AX = B**
c) (0'75 puntos). Para **k = 1**, hallar, si existe, la solución del sistema **AX = C**

$a)$

$$|A|=\begin{vmatrix} k & k & k^2 \\ 1 & -1 & k \\ 2k & -2 & 2 \end{vmatrix}=-2k+2k^3-2k^2+2k^3+2k^2-2k=4k^3-4k=4k\left(k^2-1\right)$$

$$\Rightarrow Si\ |A|=0\Rightarrow 4k\left(k^2-1\right)=0\Rightarrow\begin{cases} k=0 \\ k^2-1=0\Rightarrow k^2=1\Rightarrow k=\pm\sqrt{1}\Rightarrow\begin{cases} k=-1 \\ k=1\end{cases}\Rightarrow \end{cases}$$

$$\forall k\in\Re-\{-1,0,1\}\Rightarrow|A|\neq 0\Rightarrow rang(A)=3$$

$Si\ a=-1$

$$A=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow rang(A)=2$$

$Si\ a=0$

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}\Rightarrow rang(A)=2$$

$Si\ a=1$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow rang(A)=2$$

$b)Al\ ser\ el\ rang(A)=3=Número\ de\ incognitas\Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$

$$AX=B\Rightarrow A^{-1}AX=A^{-1}B\Rightarrow IX=A^{-1}B\Rightarrow X=A^{-1}B\Rightarrow|A|=4\cdot 2\cdot\left(2^2-1\right)=24\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}\left(adj\ A^t\right)$$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}\Rightarrow A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}\Rightarrow adj\ A^t=\begin{pmatrix} 2 & -12 & 8 \\ 6 & -12 & 0 \\ 2 & 12 & -4 \end{pmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{24}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -12 & 8 \\ 6 & -12 & 0 \\ 2 & 12 & -4 \end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\frac{1}{24}\begin{pmatrix} 2 & -12 & 8 \\ 6 & -12 & 0 \\ 2 & 12 & -4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}=\frac{1}{24}\cdot\begin{pmatrix} 24-72+64 \\ 72-72 \\ 24+72-32 \end{pmatrix}=\frac{1}{24}\cdot\begin{pmatrix} 16 \\ 0 \\ 64 \end{pmatrix}\Rightarrow(x,y,z)=\left(\frac{16}{24},0,\frac{64}{24}\right)\Rightarrow$$

$$(x,y,z)=\left(\frac{2}{3},0,\frac{8}{3}\right)$$

Continuación del Ejercicio 1 de la Opción A

$c)$

$Con\ k = 1$

$Al\ ser\ rang(A) = 2 < Número\ de\ incognitas \Rightarrow El\ sistema\ es\ Comp.\ Indeterminado\ o\ Incompatible$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 2 & 3 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 0 & -5 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & -5 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right) \Rightarrow 0z = -3 \Rightarrow z = -\frac{3}{0} \Rightarrow$$

$Sistema\ Incompatible \Rightarrow No\ hay\ solución$

Ejercicio 2.- Calificación máxima: 3 puntos

Dado los puntos **P_1(1 , 3 , -1)** , **P_2(a , 2 , 0)** , **P_3(1 , 5 , 4)** y **P_4(2 , 0 , 2)**, se pide:

a) (1 punto). Hallar el valor de **a** para que los cuatro puntos estén en el mismo plano.

b) (1 punto). Hallar los valores de **a** para que el tetraedro con vértices **P_1**, **P_2**, **P_3** y **P_4** tenga volumen igual a **7**

c) (1 punto). Hallar la ecuación del plano cuyos puntos equidistan de **P_1** y **P_3**

a) Hallaremos el plano π que contiene a **P_1**, **P_3** y **P_4** y hallaremos el valor de la coordenada **a** de **P_2** para que pertenezca a ese plano.
Para hallar el plano π calcularemos los vectores **P_1P_3** , **P_1P_4** y **P_1G** (siendo G el punto genérico del plano) y al estar los tres en el mismo plano (son coplanarios) el determinante de la matriz formada por ellos es nula y la ecuación del plano

$$\begin{cases} \overrightarrow{P_1P_3} = (1,5,4) - (1,3,-1) = (0,2,5) \\ \overrightarrow{P_1P_4} = (2,0,2) - (1,3,-1) = (1,-3,3) \\ \overrightarrow{P_1G} = (x,y,z) - (1,3,-1) = (x-1, y-3, z+1) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z+1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$6\cdot(x-1) + 5\cdot(y-3) - 2\cdot(z+1) + 15\cdot(x-1) = 0 \Rightarrow 21\cdot(x-1) + 5\cdot(y-3) - 2\cdot(z+1) = 0 \Rightarrow$$

$$\pi \equiv 21x + 5y - 2z - 38 = 0 \Rightarrow$$

$$Para\ que\ P_2\ pertenezca\ al\ plano\ \pi \Rightarrow 21a + 5\cdot 2 - 2\cdot 0 - 38 = 0 \Rightarrow 21a - 28 = 0 \Rightarrow a = \frac{28}{21}$$

Continuación del Ejercicio 2 de la Opción A

$b)$

$$\begin{cases} \overrightarrow{P_1P_3} = (1,5,4)-(1,3,-1)=(0,2,5) \\ \overrightarrow{P_1P_4} = (2,0,2)-(1,3,-1)=(1,-3,3) \\ \overrightarrow{P_1P_2} = (a,2,0)-(1,3,-1)=(a-1,-1,1) \end{cases} \Rightarrow V = \frac{1}{6}\cdot\left|\overrightarrow{P_1P_3}\times\overrightarrow{P_1P_4}\right|\cdot\overrightarrow{P_1P_2} \Rightarrow$$

$$7 = \frac{1}{6}\cdot\begin{vmatrix} a-1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & 3 \end{vmatrix} \Rightarrow 42 = 6(a-1)-5-2+15(a-1) \Rightarrow 42 = 21(a-1)-7 \Rightarrow 49 = 15a-15 \Rightarrow$$

$$64 = 15a \Rightarrow a = \frac{64}{15}$$

c) El plano β que queremos hallar tiene como vector director el que une P_1 con P_3 y contendrá un punto Q que es el punto medio de los dos, que con el punto G (generador del plano) forma un vector perpendicular al que une los puntos y por lo tanto el producto escalar de ambos es nulo

$$Punto\ medio\ Q\left(\frac{1+1}{2},\frac{5+3}{2},\frac{4+(-1)}{2}\right) \Rightarrow Q\left(1,4,\frac{3}{2}\right)$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{P_1P_3} = (1,5,4)-(1,3,-1)=(0,2,5) \\ \overrightarrow{QG} = (x,y,z)-\left(1,4,\frac{3}{2}\right)=\left(x-1,y-4,z-\frac{3}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{P_1P_3}\perp\overrightarrow{QG} \Rightarrow \overrightarrow{P_1P_3}\cdot\overrightarrow{QG}=0 \Rightarrow$$

$$(0,2,5)\cdot\left(x-1,y-4,z-\frac{3}{2}\right)=0 \Rightarrow 2(y-4)+5\cdot\left(z-\frac{3}{2}\right)=0 \Rightarrow 2y+5z-8-\frac{15}{2}=0$$

$$\beta \equiv 2y+5z-\frac{31}{2}=0$$

Ejercicio 3.- Calificación máxima: 2 puntos

Hallar **a**, **b** y **c** de modo que la función $\mathbf{f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c}$ alcance en $\mathbf{x = 1}$ un máximo relativo de valor 2, y tenga en x = 3 un punto de inflexión

$$\begin{cases} f'(x)=3x^2+2ax+b \\ f''(x)=6x+2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(1)=2 \Rightarrow 1^3+a\cdot 1^2+b\cdot 1+c=2 \Rightarrow a+b+c=1 \\ f'(1)=0 \Rightarrow 3\cdot 1^2+2a\cdot 1+b=0 \Rightarrow 2a+b=-3 \\ f''(3)=0 \Rightarrow 6\cdot 3+2a=0 \Rightarrow 18+2a=0 \Rightarrow 2a=-18 \Rightarrow a=-\frac{18}{2}=-9 \end{cases} \Rightarrow$$

$$2\cdot(-9)+b=-3 \Rightarrow -18+b=-3 \Rightarrow b=15 \Rightarrow (-9)+15+c=1 \Rightarrow 6+c=1 \Rightarrow c=-5$$

$$f(x)=x^3-9x^2+15x-5$$

Ejercicio 4.- Calificación máxima: 2 puntos

Calcular, razonadamente, las siguientes integrales definidas

$$a)\,(1\ punto)\ \int_0^{\pi} e^{2x}\cos x\, dx \qquad b)\,(1\ punto)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sen\ 2x}{1+\cos^2 2x}\, dx$$

a) Haremos la integral por partes llegando a una recurrencia que nos dará la solución

$$I=\int e^{2x}\cos x\,dx = e^{2x}sen\ x - 2\int e^{2x} sen\ x\,dx = e^{2x}sen\ x - 2\cdot\left[e^{2x}(-\cos x) - \int(-\cos x)\cdot 2e^{2x}dx\right]=$$

$$\begin{cases} u=e^{2x} \Rightarrow du=2e^{2x}dx \\ dv=\cos x\,dx \Rightarrow v=\int \cos x\,dx = sen\ x \end{cases} \qquad \begin{cases} u=e^{2x} \Rightarrow du=2e^{2x}dx \\ dv=sen\ x\,dx \Rightarrow v=\int sen\ x\,dx = -\cos x \end{cases}$$

$$I=\int e^{2x}\cos x\,dx == e^{2x}sen\ x + 2e^{2x}\cos x - 4\int e^{2x}\cos x\,dx \Rightarrow I = e^{2x}sen\ x + 2e^{2x}\cos x - 4I \Rightarrow$$

$$5I = e^{2x}sen\ x + 2e^{2x}\cos x \Rightarrow I=\frac{1}{5}\left(e^{2x}sen\ x + 2e^{2x}\cos x\right) \Rightarrow \int e^{2x}\cos x\,dx = \frac{1}{3}\left(e^{2x}sen\ x + 2e^{2x}\cos x\right)$$

$$\int_0^{\pi} e^{2x}\cos x\,dx = \frac{1}{3}\cdot\left[e^{2x}sen\ x + 2e^{2x}\cos x\right]_0^{\pi} = \frac{1}{3}\cdot\left(e^{2\pi}sen\ \pi + 2e^{2\pi}\cos\pi - e^{2\cdot 0}sen\ 0 - 2e^{2\cdot 0}\cos 0\right)$$

$$\int_0^{\pi} e^{2x}\cos x\,dx = \frac{1}{3}\cdot\left(e^{2\pi}\cdot 0 + 2e^{2\pi}\cdot(-1) - e^{0}\cdot 0 - 2e^{0}\cdot 1\right) = \frac{1}{5}\cdot\left(-2e^{2\pi}-2\right) = -\frac{2}{5}\cdot\left(e^{2\pi}+1\right)$$

b) Haremos la integral por el sistema de cambio de variable

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sen\ 2x}{1+\cos^2 2x}\,dx = \int_1^{-1}\frac{-\frac{dt}{2}}{1+t^2} = -\frac{1}{2}\int_1^{-1}\frac{dt}{1+t^2} = -\frac{1}{2}\cdot\left[arc\ tg\ t\right]_1^{-1} = -\frac{1}{2}\cdot\left[arc\ tg\ (-1) - arc\ tg\ 1\right]$$

$$\cos 2x = t \Rightarrow -2sen\ 2x\,dx = dt \Rightarrow sen\ 2x\,dx = -\frac{dt}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow t=\cos\left[2\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = \cos\pi = -1 \\ x=0 \Rightarrow t=\cos(2\cdot 0) = \cos 0 = 1 \end{cases}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sen\ 2x}{1+\cos^2 2x}\,dx = -\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$$

OPCIÓN B

Ejercicio 1.- Calificación máxima: 3 puntos

Dada las funciónes: $f(x)=\dfrac{3x+\ln(x+1)}{\sqrt{x^2-3}}$, $g(x)=(\ln x)^x$, $h(x)=sen\,(x-\pi)$,

se pide:

a) (1 punto). Hallar el dominio de **f(x)** y el $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$

b) (1 punto). Calcular **g'(e)**

c) (1 punto). Calcular en el intervalo $(0\ ,2\pi)$, las coordenadas de los puntos de corte con el eje de abcisas y las coordenadas de los extremos relativos de **h(x)**

a)

$$x^2-3\ge 0\Rightarrow \left(x+\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)\ge 0\Rightarrow \begin{cases} x+\sqrt{3}\ge 0\Rightarrow x\ge -\sqrt{3}\\ x-\sqrt{3}\ge 0\Rightarrow x\ge \sqrt{3}\end{cases}$$

	$-\infty$ a $-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$ a $\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$ a ∞
$x\ge -\sqrt{3}$	(-)	(+)	(+)
$x\ge \sqrt{3}$	(-)	(-)	(+)
Solución	(+)	(-)	(+)

Dom (f) = $\forall x\in\Re\,/\left(x\le -\sqrt{3}\right)\cup\left(x\ge\sqrt{3}\right)$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{3x+\ln(x+1)}{\sqrt{x^2-3}}=\frac{\infty}{\infty}=\xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-3}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{3x+3+1}{x+1}}{\dfrac{x}{\sqrt{x^2-3}}}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{3x+4}{x+1}}{\dfrac{x}{\sqrt{x^2-3}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{(3x+4)\sqrt{x^2-3}}{x(x+1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{(3x+4)\sqrt{x^2-3}}{x^2+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\dfrac{3x+4}{x}\right)\dfrac{1}{x}\sqrt{x^2-3}}{\dfrac{x^2+x}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\dfrac{3x}{x}+\dfrac{4}{x}\right)\sqrt{\dfrac{x^2-3}{x^2}}}{\dfrac{x^2}{x^2}+\dfrac{x}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(3+\dfrac{4}{x}\right)\sqrt{\dfrac{x^2}{x^2}-\dfrac{3}{x^2}}}{1+\dfrac{x}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(3+\dfrac{4}{x}\right)\sqrt{1-\dfrac{3}{x^2}}}{1+\dfrac{1}{x}}=\frac{\left(3+\dfrac{4}{\infty}\right)\sqrt{1-\dfrac{3}{\infty^2}}}{1+\dfrac{1}{\infty}}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\frac{(3+0)\cdot\sqrt{1-0}}{1+0}=\frac{3\cdot 1}{1}=3$$

Continuación de la Ejercicio 1 de la Opción B

b)

$$\ln g(x)=\ln(\ln x)^x \Rightarrow \ln g(x)=x\ln(\ln x)\Rightarrow \frac{g'(x)}{g(x)}=1\cdot\ln(\ln x)+\frac{1}{\ln(x)}\cdot\frac{1}{x}\cdot x=\ln(\ln x)+\frac{1}{\ln(x)}$$

$$\frac{g'(x)}{g(x)}=1\cdot\ln(\ln x)+\frac{1}{\ln(x)}\cdot\frac{1}{x}\cdot x=\ln(\ln x)+\frac{1}{\ln(x)}\Rightarrow g'(x)=g(x)\left[\ln(\ln x)+\frac{1}{\ln(x)}\right]\Rightarrow$$

$$g'(x)=[\ln(x)]^x\left[\ln(\ln x)+\frac{1}{\ln(x)}\right]\Rightarrow g'(e)=[\ln(e)]^e\left[\ln(\ln e)+\frac{1}{\ln(e)}\right]=1^e\cdot\left(\ln 1+\frac{1}{1}\right)=(0+1)=1$$

c)

$$h(x)=sen\,(x-\pi)\Rightarrow Si\ h(x)=0\Rightarrow sen\,(x-\pi)=0\Rightarrow\begin{cases}x-\pi=0\Rightarrow x=\pi+2k\pi\\ x-\pi=\pi\Rightarrow x=2\pi+2k\pi\end{cases}\Rightarrow$$

$$Puntos\ de\ corte\begin{cases}k=-1\Rightarrow x=2\pi+2\cdot(-1)\pi=0(0\ ,0)\\ k=0\Rightarrow\pi+2\cdot 0\cdot\pi\Rightarrow(\pi\ ,0)\\ k=0\Rightarrow 2\pi+2\cdot 0\cdot\pi\Rightarrow(2\pi\ ,0)\end{cases}$$

$$h'(x)=\cos(x-\pi)\Rightarrow Si\ h'(x)=0\Rightarrow\cos(x-\pi)=0\Rightarrow\begin{cases}x-\pi=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow x=\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi\\ x-\pi=\dfrac{3\pi}{2}\Rightarrow x=\dfrac{5\pi}{2}+2k\pi\end{cases}$$

$$\begin{cases}k=-1\Rightarrow x=\dfrac{5\pi}{2}+2\cdot(-1)\pi=\dfrac{5\pi}{2}-2\pi=\dfrac{\pi}{2}\\ k=0\Rightarrow x=\dfrac{3\pi}{2}+2\cdot 0\cdot\pi=\dfrac{3\pi}{2}-0=\dfrac{3\pi}{2}\end{cases}$$

$$h''(x)=-sen\,(x-\pi)\Rightarrow$$

$$h''\left(\frac{\pi}{2}\right)=-sen\left(\frac{\pi}{2}-\pi\right)=-sen\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-sen\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-(-1)=1>0\Rightarrow Mínimo\Rightarrow$$

$$x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow h\left(\frac{\pi}{2}\right)=sen\left(\frac{\pi}{2}-\pi\right)=sen\left(-\frac{\pi}{2}\right)=sen\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-1\Rightarrow Mínimo\ relativo\ en\left(\frac{3\pi}{2}\ ,-1\right)$$

$$h''\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-sen\left(\frac{3\pi}{2}-\pi\right)=-sen\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1<0\Rightarrow Máximo\Rightarrow$$

$$x=\frac{3\pi}{2}\Rightarrow h\left(\frac{3\pi}{2}\right)=sen\left(\frac{3\pi}{2}-\pi\right)=sen\left(\frac{\pi}{2}\right)=1\Rightarrow Máximo\ relativo\ en\left(\frac{3\pi}{2}\ ,1\right)$$

Ejercicio 2.- Calificación máxima: 3 puntos

Dada las rectas $r_1 \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-5} = \frac{z}{2} \quad y \quad r_2 \equiv \begin{cases} x = -1-\lambda \\ y = 3+\lambda \\ z = 5 \end{cases}$, se pide

a) (1 punto).Estudiar su posición relativa

b) (2 puntos).Hallar la mínima distancia de **r_1** y **r_2**

a) Se estudiara si los vectores directores de las rectas son iguales o proporcionales, de serlo las rectas son paralelas y si se da ese caso se analizará si tienen algún punto común con lo que la recta serán coincidentes.
De no ser paralelas se estudiara si tienen un punto común y de haberlo son rectas que se cortan o son secantes. En el caso de que no haya punto común las rectas se cruzan.

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_{r_1}} = (3, -5, 2) \\ \overrightarrow{v_{r_2}} = (-1, 1, 0) \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{-1} \neq \frac{-5}{1} \Rightarrow No\ son\ coincidentes\ ni\ paralelos$$

Veamos si tiene un punto común

$$\begin{cases} r_1 \equiv \begin{cases} x = 2+3\mu \\ y = 1-5\mu \\ x = 2\mu \end{cases} \\ r_2 \equiv \begin{cases} x = -1-\lambda \\ y = 3+\lambda \\ z = 5 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2+3\mu = -1-\lambda \\ 1-5\mu = 3+\lambda \\ 2\mu = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\mu = 5 \Rightarrow \mu = \frac{5}{2} \\ 2+3\cdot\frac{5}{2} = -1-\lambda \Rightarrow \lambda = -1-2-\frac{15}{2} = -\frac{21}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$1-5\cdot\frac{5}{2} \neq 3+\left(-\frac{21}{2}\right) \Rightarrow \frac{2-25}{2} \neq \frac{6-21}{2} \Rightarrow -\frac{23}{2} \neq -\frac{15}{2} \Rightarrow Sistema\ Incompatible \Rightarrow No\ hay\ punto$$

Las rectas r_1 y r_2 se cruzan en el espacio

b) Para hallar la mínima distancia calcularemos un plano π que contenga a **r_2** y que sea paralelo a **r_1.** Después hallaremos la distancia entre un punto cualquiera **R_1** de la recta r_1 (podemos tomar el punto indicado en la ecuación de la recta) y el plano π que es la distancia pedida.
Para hallar el plano π utilizaremos los vectores directores de **r_2** y **r_1** y el vector que forma un punto **R_2** de la recta **r_2** (podemos tomar el punto indicado en la ecuación de la recta) con el punto genérico **G,** los tres vectores son coplanarios (están en el mismo plano) y el determinante de la matriz que forma es nulo y la ecuación del plano buscado

$$Si \begin{cases} R_1(2, 1, 0) \\ R_2(-1, 3, 5) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_{r_1}} = (3, -5, 2) \\ \overrightarrow{v_{r_2}} = (-1, 1, 0) \\ \overrightarrow{R_2G} = (x, y, z) - (-1, 3, 5) = (x+1, y-3, z-5) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y-3 & z-5 \\ 3 & -5 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$-2(y-3)+3(z-5)-5(z-5)-2(x+1) = 0 \Rightarrow 2(x+1)+2(y-3)+2(z-5) = 0 \Rightarrow x+1+y-3+z-5 = 0$$

$$\pi \equiv x+y+z-7 = 0 \Rightarrow d(r_1, r_2) = d(R_1, \pi) = \frac{|2+1+0-7|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{|-4|}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}\ u$$

Ejercicio 3.- Calificación máxima: 2 puntos

Dadas las matrices : $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & -7 & -8 \\ 3 & 2-a & 3+a & 3 \end{pmatrix}$, se pide:

a) (1 punto). Estudiar el rango de la matriz B en función de **a**

b) (1punto).Para **a = 0** , calcular la matriz **X** que verifique **AX = B**

a)

$$B \equiv \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & -2 \\ -4 & -6 & -14 & -16 \\ -12 & -8+4a & -12-4a & -12 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -7 & -13 & -18 \\ 0 & -11+4a & -9-4a & -18 \end{pmatrix} \equiv$$

$$\equiv \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -18 & -13 & -7 \\ 0 & -18 & -9-4a & -11+4a \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -18 & -13 & -7 \\ 0 & 0 & 4-4a & -4+4a \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4-4a=0 \Rightarrow 4a=4 \Rightarrow a=1 \\ +4+4a=0 \Rightarrow 4a=4 \Rightarrow a=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\forall a \in \Re - \{1\} \Rightarrow rang(B)=3$$

$$Si\, a=1 \Rightarrow B \equiv \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -18 & -13 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rang(B)=2$$

b)

$$AX=B \Rightarrow A^{-1}AX=A^{-1}B \Rightarrow IX=A^{-1}B \Rightarrow X=A^{-1}B$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot\left(adj\ A^t\right) \Rightarrow |A|=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=2+2=4 \Rightarrow A^t=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow adj\ A^t=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A^{-1}=\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X=\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & -7 & -8 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}=\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 & 16 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4.- Calificación máxima: 2 puntos

Calcular el valor del determinante $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & y & 1 & 1 \\ 1 & 1 & z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & y & 1 & 1 \\ 1 & 1 & z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1-x & y-1 & 0 & 0 \\ 1-x & 0 & z-1 & 0 \\ 1-x & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1-x & y-1 & 0 \\ 1-x & 0 & z-1 \\ 1-x & 0 & 0 \end{vmatrix} = (1-x) \cdot \begin{vmatrix} 1 & y-1 & 0 \\ 1 & 0 & z-1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (1-x) \cdot \begin{vmatrix} 1 & y-1 & 0 \\ 0 & 1-y & z-1 \\ 0 & 1-y & 0 \end{vmatrix} = (1-x) \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1-y & z-1 \\ 1-y & 0 \end{vmatrix} = -(1-x) \cdot (1-y) \cdot (z-1) = (1-x) \cdot (1-y) \cdot (1-z)$$