OPCIÓN A

Ejercicio 1.- Calificación máxima: 3 puntos

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2a & -2 & a^2 \\ -1 & a & -1 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix}$

a) (1 puntos). Calcular el rango de **A** en función de los valores de **a**

b) (1 punto). En el caso **a = 2**, discutir el sistema $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$ en función de los valores de **b,** y resolverlo cuando sea posible

c) (1 punto). En el caso **a = 1**, resolver el sistema $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$a)$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2a & -2 & a^2 \\ -1 & a & -1 \\ 2 & 1 & a \end{vmatrix} = 2a^3 + 4 - a^2 - 2a^3 + 2a - 2a = 4 - a^2 \Rightarrow Si\ |A| = 0 \Rightarrow 4 - a^2 = 0 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow$$

$$a = \pm\sqrt{4} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ a = 2 \end{cases} \Rightarrow \forall a \in \Re - \{-2, 2\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 3$$

$Si\ a = -2$

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 4 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & -4 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rang(A) = 2$$

$Si\ a = 2$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rang(A) = 2$$

$b)$

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & b \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 4 & 2 \\ -4 & 8 & -4 & 4 \\ -4 & -2 & -4 & -2b \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & 0 & 6 \\ 0 & -4 & 0 & -2b \end{array}\right) \equiv$$

$$\equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{b}{2} \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{b}{2} - 1 \end{array}\right) \Rightarrow Compatible\ Indeterminado \Rightarrow \frac{b}{2} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{b}{2} = 1 \Rightarrow b = 2$$

$$Cuando\ b = 2 \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Indeterminado \Rightarrow y = 1 \Rightarrow 4x - 2 + 4z = 2 \Rightarrow 4x = -4z + 4$$

$$Solución(1 - \lambda, 1, \lambda)$$

$$Cuando\ b \neq 2 \Rightarrow Sistema\ Incompatible$$

Continuación del Ejercicio 1 de la Opción A

$c)$

$El\ sistema\ es\ compatible\ determinado \Rightarrow Utilizando\ Cramer$

$|A| = 4 - 1^2 = 3 \Rightarrow$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{-1+4+2-2-1+4}{3} = \frac{6}{3} = 2 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{4+2-2-4+4-1}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{3} = \frac{4-8+1+2-4-4}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

Ejercicio 2.- Calificación máxima: 3 puntos

a) (1’5 puntos). Hallar el volumen del tetraedro que tiene un vértice en el origen y los otros tres vértices en las intersecciones de las rectas $r_1 \equiv x = y = z$, $r_2 \equiv \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$, $r_3 \equiv \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ con el plano $\pi \equiv 2x + 3y + 7z = 24$

b) (1’5 puntos).Hallar la recta **s** que corta perpendicularmente a las rectas

$r_4 \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z+1}{-2}$ $\quad r_5 \equiv \frac{x}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-1}$

$a)$

$$r_1 \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow Punto\ de\ corte \Rightarrow 2\lambda + 3\lambda + 7\lambda = 24 \Rightarrow 12\lambda = 24 \Rightarrow \lambda = 2 \Rightarrow A\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow A(2, 2, 2)$$

$$r_2 \equiv \begin{cases} x = \alpha \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow Punto\ de\ corte \Rightarrow 2\alpha + 3\cdot 0 + 7\cdot 0 = 24 \Rightarrow 2\alpha = 24 \Rightarrow \alpha = 12 \Rightarrow B\begin{cases} x = 12 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow B(12, 0, 0)$$

$$r_3 \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = \beta \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow Punto\ de\ corte \Rightarrow 2\cdot 0 + 3\beta + 7\cdot 0 = 24 \Rightarrow 3\beta = 24 \Rightarrow \beta = 8 \Rightarrow C\begin{cases} x = 0 \\ y = 8 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow C(0, 8, 0)$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{OA} = (2, 2, 2) - (0, 0, 0) = (2, 2, 2) \\ \overrightarrow{OB} = (12, 0, 0) - (0, 0, 0) = (12, 0, 0) \\ \overrightarrow{OC} = (0, 8, 0) - (0, 0, 0) = (0, 8, 0) \end{cases} \Rightarrow V = \frac{1}{6}\cdot\left|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\right|\cdot\overrightarrow{OC} = \frac{1}{6}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 12 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\cdot 192 = 32\ u^3$$

Continuación del Ejercicio 2 de la Opción A

$$\begin{cases} r_4 \equiv \begin{cases} x = -1 + a \\ y = 5 + 2a \Rightarrow \overrightarrow{v_{r_4}} = (1\ ,2\ ,-2) \\ z = -1 - 2a \end{cases} \\ r_5 \equiv \begin{cases} x = 2b \\ y = -1 + 3b \Rightarrow \overrightarrow{v_{r_5}} = (2\ ,3\ ,-1) \\ z = 1 - b \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2} \neq \frac{2}{3} \Rightarrow No\ son\ paralelas\ ni\ coincidentes$$

Veamos si tienen un punto de corte común

$$\begin{cases} -1 + a = 2b \\ 5 + 2a = -1 + 3b \\ -1 - 2a = 1 - b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - 2b = 1 \\ 2a - 3b = -6 \\ 2a - b = -2 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & -6 \\ 2 & -1 & -2 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & 3 & -4 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 20 \end{array}\right) \Rightarrow Incompatible$$

Se cruzan las dos rectas

$$\overrightarrow{v_s} = [-1 + a - 2b\ ,5 + 2a - (-1 + 3b)\ ,-1 - 2a - (1 - b)] = (a - 2b - 1\ ,2a - 3b + 6\ ,-2a + b - 2) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_s} \perp \overrightarrow{v_{r_4}} \Rightarrow \overrightarrow{v_s} \cdot \overrightarrow{v_{r_4}} = 0 \Rightarrow (a - 2b - 1\ ,2a - 3b + 6\ ,-2a + b - 2) \cdot (1\ ,2\ ,-2) = 0 \\ \overrightarrow{v_s} \perp \overrightarrow{v_{r_5}} \Rightarrow \overrightarrow{v_s} \cdot \overrightarrow{v_{r_5}} = 0 \Rightarrow (a - 2b - 1\ ,2a - 3b + 6\ ,-2a + b - 2) \cdot (2\ ,3\ ,-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a - 2b - 1 + 4a - 6b + 12 + 4a - 2b + 4 = 0 \Rightarrow 9a - 10b + 15 = 0 \\ 2a - 4b - 2 + 6a - 9b + 18 + 2a - b + 2 = 0 \Rightarrow 10a - 14b + 18 = 0 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 9 & -10 & -15 \\ 10 & -14 & -18 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{cc|c} 9 & -10 & -15 \\ -90 & 126 & 162 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 9 & -10 & -15 \\ 0 & 26 & 12 \end{array}\right) \Rightarrow 26b = 12 \Rightarrow b = \frac{12}{26} = \frac{6}{13} \Rightarrow 9a - \frac{60}{13} = -15 \Rightarrow 9a = \frac{60}{13} - 15 \Rightarrow 9a = \frac{60 - 195}{13} = -\frac{135}{13}$$

$$a = -\frac{15}{13} \Rightarrow \overrightarrow{v_s} = \left(-\frac{15}{13} - \frac{12}{13} - 1\ ,-\frac{30}{13} - \frac{18}{13} + 6\ ,\frac{30}{13} + \frac{6}{13} - 2\right) \Rightarrow \overrightarrow{v_s} = \left(-\frac{40}{13}\ ,\frac{30}{13}\ ,\frac{10}{13}\right) \equiv (-4\ ,3\ ,1)$$

$$Punto\ de\ la\ recta\ s \Rightarrow S \begin{cases} x = 2 \cdot \frac{6}{13} = \frac{12}{13} \\ y = -1 + 3 \cdot \frac{6}{13} = \frac{5}{13} \\ z = 1 - \frac{6}{13} = \frac{7}{13} \end{cases} \Rightarrow Ecuación\ de\ la\ recta\ pedida\ s \begin{cases} x = \frac{12}{13} - 4c \\ y = \frac{5}{13} + 3c \\ x = \frac{7}{13} + c \end{cases}$$

Ejercicio 3.- Calificación máxima: 2 puntos

a) (1 punto).Calcular la integral $\int_1^3 x\sqrt{4+5x^2}\,dx$

b) (1 punto).Hallar los valores máximo y mínimo absoluto de la función $f(x)=\sqrt{12-3x^2}$

$a)$

$$\int_1^3 x\sqrt{4+5x^2}\,dx=\int_3^7 t\cdot\frac{1}{5}t\;dt=\frac{1}{5}\int_3^7 t^2\;dt=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left[t^3\right]_3^7=\frac{1}{15}\cdot\left(7^3-3^3\right)=\frac{1}{15}\cdot(343-27)=\frac{316}{15}$$

$$4+5x^2=t^2\Rightarrow t=\sqrt{4+5x^2}\Rightarrow\begin{cases}x=1\Rightarrow t=3\\x=3\Rightarrow t=7\end{cases}\Rightarrow 10x\;dx=2t\;dt\Rightarrow x\;dx=\frac{1}{5}t\;dt$$

$b)$

$$12-3x^2\geq 0\Rightarrow 3\left(4-x^2\right)\geq 0\Rightarrow 3\cdot(2+x)\cdot(2-x)\geq 0\Rightarrow\begin{cases}2+x>0\Rightarrow x>-2\\2-x>0\Rightarrow -x>-2\Rightarrow x<2\end{cases}$$

x < 2	**(+)**	**(+)**	**(-)**
x > -2	**(-)**	**(+)**	**(+)**
Solución	**(-)**	**(+)**	**(-)**

$$Dom(f)=\forall x\in\Re\,/-2\leq x\leq 2$$

$$f'(x)=\frac{-6x}{2\sqrt{12-3x^2}}=-\frac{3x}{\sqrt{12-3x^2}}\Rightarrow f'(x)=0\Rightarrow 3x=0\Rightarrow x=0\Rightarrow f(0)=\sqrt{12-3\cdot 0^2}=2\sqrt{3}$$

$$f''(x)=-3\frac{\sqrt{12-3x^2}-\frac{-3x}{\sqrt{12-3x^2}}\cdot x}{12-3x^2}=-3\frac{\frac{12-3x^2+3x^2}{\sqrt{12-3x^2}}}{12-3x^2}=-\frac{36}{\left(12-3x^2\right)\sqrt{12-3x^2}}$$

$$f''(0)=-\frac{36}{\left(12-3\cdot 0^2\right)\sqrt{12-3\cdot 0^2}}=-\frac{36}{12\sqrt{12}}=-\frac{3}{2\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow \text{Máximo relativo}$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to -2}\sqrt{12-3x^2}=\sqrt{12-3(-2)^2}=\sqrt{12-12}=0\\\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{12-3x^2}=\sqrt{12-3\cdot 2^2}=\sqrt{12-12}=0\end{cases}\Rightarrow 0<2\sqrt{3}\Rightarrow\begin{cases}\text{Máximo absoluto}\Rightarrow\left(0\;,2\sqrt{3}\right)\\\text{Mínimo absoluto}\Rightarrow\begin{cases}(-2\;,0)\\(2\;,0)\end{cases}\end{cases}$$

Ejercicio 4.- Calificación máxima: 2 puntos

a) (1 punto).Calcular el siguiente límite $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$

b) (1 punto).Demostrar que la ecuación **$4x^5$ + 3x + m = 0**, sólo tiene una raíz real, cualquiera que sea el número **m**. Justificar la respuesta indicando qué teorema se usan.

a)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{x}{x}+\frac{\sqrt{x}}{x}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\infty}}} = \frac{1}{\sqrt{1+0}} = 1$$

b)

$$Dom(f) = (Toda)\forall x \in \Re \Rightarrow Es\ continua\ en\ todo\ su\ recorrido\ de -\infty\ a +\infty$$

$$Estudiemos\ los\ valores\ en\ los\ extremos\ del\ intervalo\ (-\infty\ , +\infty)$$

$$f(x) = 4x^5 + 3x + m = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to\infty} f(x) = 4\cdot\infty^5 + 3\cdot\infty + m = \infty \\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = 4\cdot(-\infty)^5 + 3\cdot(-\infty) + m = -\infty \\ f'(x) = 5x^4 + 3 \end{cases}$$

$$f'(x) = 20x^4 + 3 \Rightarrow Crciente \Rightarrow 20x^4 + 3 > 0 \Rightarrow 20x^4 > -3 \Rightarrow x^4 > \frac{-3}{20} \Rightarrow x > \sqrt{-\frac{3}{20}} \Rightarrow Sin\ solución \Rightarrow$$

$$Es\ creciente\ para\ toda\ x\ real$$

Teoremas de Rolle y Bolzano

Esta función es continua en toda la recta real, siéndolo, por lo tanto, en el intervalo $(-\infty\ , +\infty)$; como además toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo, aplicando el teorema de Bolzano sabemos que existe, al menos un punto $c \in (-\infty\ , +\infty)$ tal que **f(c) = 0**, y ese punto es único cuando hemos demostrado que es creciente en ese intervalo y por lo tanto no hay extremos relativos

OPCIÓN B

Ejercicio 1.- Calificación máxima: 3 puntos

Dada la función: $f(x)=\dfrac{ax^4+1}{x^3}$, se pide:

a) (1 punto). Determinar el valor de ***a*** para el que la función posee un mínimo relativo en **x = 1.** Para ese valor de **a** obtener los otros puntos en que **f** tiene extremos relativos

b) (1 punto). Obtener las asíntotas de la gráfica **y = f(x)** para **a = 1**

c) (1 punto). Esbozar la gráfica de la función para **a = 1**

a)

$$f'(x)=\frac{4ax^3-3x^2\left(ax^4+1\right)}{x^6}=\frac{4ax^4-3\left(ax^4+1\right)}{x^4}=\frac{4ax^4-3ax^4-3}{x^4}=\frac{ax^4-3}{x^4}\Rightarrow$$

$$f'(1)=0\Rightarrow a\cdot 1^4-3=0\Rightarrow a-3=0$$

$$f'(x)=\frac{3x^4-3}{x^4}=3\cdot\frac{x^4-1}{x^4}=3\cdot\frac{\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)}{x^4}=3\cdot\frac{(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)}{x^4}\Rightarrow f'(x)=0\Rightarrow$$

$$(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)=0\Rightarrow\begin{cases}x-1=0\Rightarrow x=1\\ x+1=0\Rightarrow x=-1\\ x^2+1\neq 0\Rightarrow \forall x\in\Re\end{cases}$$

b)

$$f(x)=\frac{x^4+1}{x^3}\Rightarrow x^3=0\Rightarrow x=0\Rightarrow Dom(f)=\forall x\in\Re-\{0\}\Rightarrow f(x)=\frac{0^4+1}{0^3}=\frac{1}{0}\Rightarrow$$

$$En\ x=0\Rightarrow Asíntota\ vertical\ en\ x=0\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\dfrac{1}{0^-}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\dfrac{1}{0^+}=+\infty\end{cases}$$

Asíntotas horizontales

$$y=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+1}{x^3}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^4}{x^4}+\frac{1}{x^4}}{\frac{x^3}{x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^4}}{\frac{1}{x}}=\frac{1+\frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty}}=\frac{1+0}{0}=\frac{1}{0}\Rightarrow No\ existe\Rightarrow x\to\infty$$

$$y=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4+1}{x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+1}{-x^3}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^4}{x^4}+\frac{1}{x^4}}{-\frac{x^3}{x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^4}}{-\frac{1}{x}}=\frac{1+\frac{1}{\infty}}{-\frac{1}{\infty}}=-\frac{1}{0}\Rightarrow No\ existe\Rightarrow x\to-\infty$$

Continuación de la Ejercicio 1 de la Opción B

b)Continuación

Asíntotas oblicuas

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^4+1}{x^3}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4+1}{x^4} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^4}{x^4}+\frac{1}{x^4}}{\frac{x^4}{x^4}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{1}{x^4}}{1} = \frac{1+\frac{1}{\infty}}{1} = \frac{1+0}{1} = 1$$

$$n = \lim_{x\to\infty}[f(x)-mx] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^4+1}{x^3} - 1\cdot x\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4+1-x^4}{x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^3} = \frac{1}{\infty} = 0$$

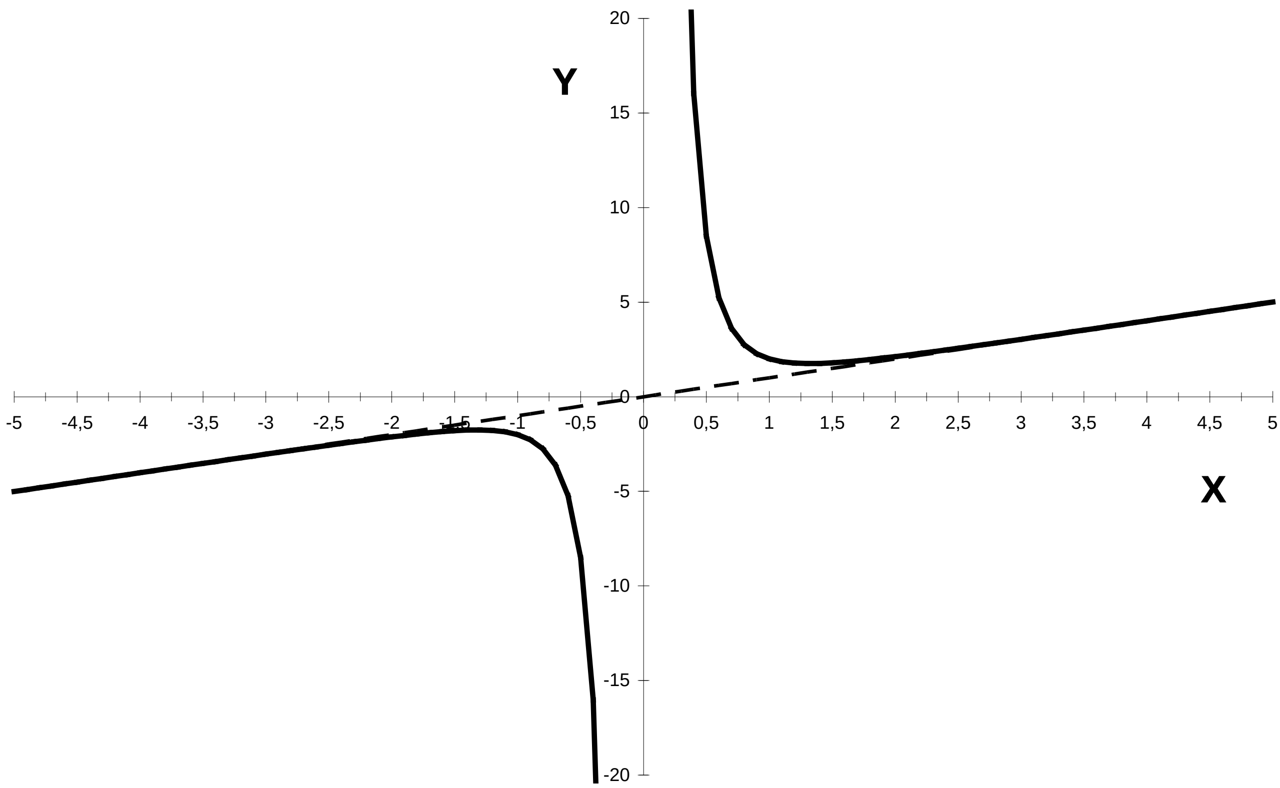
$Asíntota\ oblicua \Rightarrow y = x\ cuando\ x \to \infty$

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x^4+1}{x^3}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4+1}{x^4} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^4}{x^4}+\frac{1}{x^4}}{\frac{x^4}{x^4}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{1}{x^4}}{1} = \frac{1+\frac{1}{\infty}}{1} = \frac{1+0}{1} = 1$$

$$n = \lim_{x\to-\infty}[f(x)-mx] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^4+1}{x^3} - 1\cdot x\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4+1-x^4}{-x^3} = \lim_{x\to\infty} -\frac{1}{x^3} = -\frac{1}{\infty} = 0$$

$Asíntota\ oblicua \Rightarrow y = x\ cuando\ x \to -\infty$

c)



Ejercicio 2.- Calificación máxima: 3 puntos

a) (2 puntos). Discutir el sistema de ecuaciones AX = B, donde:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & m-1 \\ 0 & m-1 & 1 \\ m-2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad , \quad B=\begin{pmatrix} m \\ m \\ m+2 \end{pmatrix}$$

, según los valores de **m**

b) (1 punto).Resolver los sistemas en los casos **m = 0** y **m = 1**

$$|A|=\begin{vmatrix} 0 & 1 & m-1 \\ 0 & m-1 & 1 \\ m-2 & 0 & 0 \end{vmatrix}=(m-2)-(m-1)^2(m-2)=\left[1-(m-1)^2\right](m-2)=\left[1-\left(m^2-2m+1\right)\right](m-2)$$

$$|A|=\left(1-m^2+2m-1\right)(m-2)=\left(-m^2+2m\right)(m-2)=m(2-m)(m-2)=-m(m-2)(m-2)=-m(m-2)^2$$

$$Si\ |A|=0\Rightarrow -m(m-2)^2=0\Rightarrow \begin{cases} m=0 \\ m-2=0\Rightarrow m=2 \end{cases}$$

$$\forall m\in\Re-\{0\ ,2\}\Rightarrow |A|\neq 0\Rightarrow rang(A)=3=Número\ de\ incógnitas\Rightarrow Sistema\ Compatible\ Determinado$$

$$Si\ m=2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)\Rightarrow 0z=4\Rightarrow z=\frac{4}{0}\Rightarrow Sistema\ Incompatible$$

$$Si\ m=0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)\Rightarrow 0z=0\Rightarrow z=\frac{0}{0}\Rightarrow Sistema\ Compatible\ Indeterminado$$

$b)$

$$Si\ m=0$$

$$-2x=2\Rightarrow x=-1\Rightarrow y-z=0\Rightarrow y=z\Rightarrow Solución\ (-1\ ,\lambda\ ,\lambda)$$

$$Si\ m=1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)\Rightarrow -x=3\Rightarrow x=-3\Rightarrow y=1\Rightarrow z=1\Rightarrow Solución\ (-3\ ,1\ ,1)$$

Ejercicio 3.- Calificación máxima: 2 puntos

Dado los planos : $\pi_1 \equiv 2x+y-2z=1 \quad , \quad \pi_2 \equiv x-y+2z=1$, se pide:

a) (0’5 puntos). Estudiar su posición relativa

b) (1´5 puntos).En caso de que sean paralelos hallar la distancia entre ellos; en caso de que se corten, hallar un punto y un vector de dirección de la recta que determinan.

a) **O son paralelos o se cortan según una recta intersección de ambos. Si son paralelos sus vectores directores son iguales o proporcionales**

$$\begin{cases} v_{\pi_1} = (2\ ,1-2) \\ v_{\pi_2} = (1\ ,-1\ 2) \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{1} \neq \frac{1}{-1} \Rightarrow Se\ cor\tan \Rightarrow r \equiv \begin{cases} 2x+y-2z=1 \\ x-y+2z=1 \end{cases} \Rightarrow 3x=2 \Rightarrow x=\frac{2}{3} \Rightarrow$$

$Re cta\ de\ encuentro$

$$\frac{2}{3}-y+2z=1 \Rightarrow y=\frac{2}{3}-1+2z \Rightarrow y=-\frac{1}{3}+2z \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=\frac{2}{3} \\ y=-\frac{1}{3}+2\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Punto\ R\left(\frac{2}{3}\ ,-\frac{1}{3}\ ,0\right) \\ \overrightarrow{v_r}=(0\ ,2\ ,1) \end{cases}$$

Ejercicio 4.- Calificación máxima: 2 puntos

a)(0’75 puntos).Hallar la ecuación del plano π_1 que pasa por los puntos **A(1 , 0 , 0)**, **B(0 , 2 , 0)** y **C(0 , 0 , 1)**,

b)(0’75 puntos).Hallar la ecuación del plano π_2 que contiene al punto **P(1 , 2 , 3)** y es perpendicular al vector $\vec{v}(-2\ ,1\ ,1)$

c) (0’5 puntos).Hallar el volumen del tetraedro de vértices **A**, **B** , **C** y **P**

$a)$

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (0\ ,\ 2\ ,\ 0)-(1\ ,\ 0\ ,\ 0) = (-1\ ,\ 2\ ,\ 0) \\ \overrightarrow{AC} = (0\ ,\ 0\ ,\ 1)-(1\ ,\ 0\ ,\ 0) = (-1\ ,\ 0\ ,\ 1) \\ \overrightarrow{AG} = (x\ ,\ y\ ,\ z)-(1\ ,\ 0\ ,\ 0) = (x-1\ ,\ y\ ,\ z) \end{cases} \Rightarrow \pi_1 \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2(x-1)+2z+y = 0 \Rightarrow$$

$$\pi_1 \equiv 2x+y+2z-2 = 0$$

$b)$

$$\begin{cases} \vec{v} = (-2\ ,\ 1\ ,\ 1) \\ \overrightarrow{PG} = (x\ ,\ y\ ,\ z)-(1\ ,\ 2\ ,\ 3) = (x-1\ ,\ y-2\ ,\ z-3) \end{cases} \Rightarrow \vec{v} \perp \overrightarrow{PG} \Rightarrow \vec{v}\cdot\overrightarrow{PG} = 0 \Rightarrow$$

$$(x-1\ ,\ y-2\ ,\ z-3)\cdot(-2\ ,\ 1\ ,\ 1) = 0 \Rightarrow -2(x-1)+y-2+z-3 = 0 \Rightarrow \pi_2 \equiv 2x-y-z+3 = 0$$

Continuación de la Ejercicio 4 de la Opción B

a)

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (0\ ,2\ ,0) - (1\ ,0\ ,0) = (-1\ ,2\ ,0) \\ \overrightarrow{AC} = (0\ ,0\ ,1) - (1\ ,0\ ,0) = (-1\ ,0\ ,1) \\ \overrightarrow{AP} = (1\ ,2\ ,3) - (1\ ,0\ ,0) = (0\ ,2\ ,3) \end{cases} \Rightarrow V = \frac{1}{6} \cdot \left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right| \cdot \overrightarrow{AP} \Rightarrow$$

$$V = \frac{1}{6} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot (2+6) = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}\ u^3$$