

OPCIÓN A

Ejercicio 1.- Dado el plano $\pi \equiv x + 3y + z = 4$, se pide:

- a) Calcular el punto simétrico **P** del punto **O(0, 0, 0)** respecto del plano π
 b) Calcular el coseno del ángulo α que forman el plano π y el plano $x = 0$
 c) Calcular el volumen del tetraedro **T** determinado por el plano π y los planos $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$.

a) Por el punto O trazamos una recta r perpendicular al plano π , utilizando el vector director de este, hallando el punto **P** de corte de la recta con el plano, que es el punto medio entre **O** y su simétrico **O'**

$$\pi \equiv x + 3y + z = 4 \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 0 + \lambda \\ y = 0 + 3\lambda \\ z = 0 + \lambda \end{cases} \Rightarrow \lambda + 3 \cdot 3\lambda + \lambda = 4 \Rightarrow 11\lambda = 4 \Rightarrow \lambda = \frac{4}{11} \Rightarrow P \begin{cases} x = \frac{4}{11} \\ y = 3 \cdot \frac{4}{11} \\ z = \frac{4}{11} \end{cases} \Rightarrow$$

$$P\left(\frac{4}{11}, \frac{12}{11}, \frac{4}{11}\right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{4}{11} = \frac{0 + x_{O'}}{2} \Rightarrow x_{O'} = \frac{8}{11} \\ \frac{12}{11} = \frac{0 + y_{O'}}{2} \Rightarrow y_{O'} = \frac{24}{11} \\ \frac{4}{11} = \frac{0 + z_{O'}}{2} \Rightarrow z_{O'} = \frac{8}{11} \end{cases} \Rightarrow O'\left(\frac{8}{11}, \frac{24}{11}, \frac{8}{11}\right)$$

b)

$$\begin{cases} \vec{v}_{\pi} = (1, 3, 1) \\ \vec{v}_{x=0} = (1, 0, 0) \end{cases} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{|\vec{v}_{\pi} \cdot \vec{v}_{x=0}|}{\|\vec{v}_{\pi}\| \|\vec{v}_{x=0}\|} = \frac{|(1, 3, 1) \cdot (1, 0, 0)|}{\sqrt{1^2 + 3^2 + 1^2} \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2}} = \frac{1}{\sqrt{11}\sqrt{1}} = \frac{\sqrt{11}}{11} = 0'3015113445$$

c)

$$\text{Puntos de corte} \begin{cases} \text{Con el eje OX} \begin{cases} x = \alpha \\ y = 0 \Rightarrow \alpha + 3 \cdot 0 + 0 = 4 \Rightarrow \alpha = 4 \Rightarrow A(4, 0, 0) \\ z = 0 \end{cases} \\ \text{Con el eje OY} \begin{cases} x = 0 \\ y = \mu \Rightarrow 0 + 3 \cdot \mu + 0 = 4 \Rightarrow \mu = \frac{4}{3} \Rightarrow B\left(0, \frac{4}{3}, 0\right) \\ z = 0 \end{cases} \\ \text{Con el eje OZ} \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \Rightarrow 0 + 3 \cdot 0 + \beta = 4 \Rightarrow \beta = 4 \Rightarrow C(0, 0, 4) \\ z = \beta \end{cases} \end{cases}$$

$$V = \frac{1}{6} \cdot [\vec{OA} \cdot (\vec{OB} \wedge \vec{OC})] = \frac{1}{6} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot 4 \cdot \frac{4}{3} \cdot 4 = \frac{64}{18} = \frac{32}{9} u^3$$

2.A.- Dado el sistema:
$$\begin{cases} 4x + 4\lambda y + 2z = 2\lambda \\ \lambda x + y - \lambda z = \lambda \\ 4\lambda x + 4\lambda y + \lambda z = 9 \end{cases}, \text{ se pide:}$$

a) Discutir el sistema según los valores del parámetro λ

b) Resolver el sistema para $\lambda = -1$

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 4\lambda & 2 \\ \lambda & 1 & -\lambda \\ 4\lambda & 4\lambda & \lambda \end{vmatrix} = 2\lambda \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2\lambda & 1 \\ \lambda & 1 & -\lambda \\ 4 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 2\lambda \cdot (2 - 8\lambda^2 + 4\lambda - 4 + 8\lambda - 2\lambda^2) = 2\lambda \cdot (-10\lambda^2 + 12\lambda - 2)$$

$$|A| = (-4) \cdot \lambda \cdot (5\lambda^2 - 6\lambda + 1) \Rightarrow \text{Si } |A| = 0 \Rightarrow (-4) \cdot \lambda \cdot (5\lambda^2 - 6\lambda + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ 5\lambda^2 - 6\lambda + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$5\lambda^2 - 6\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 36 - 20 = 16 > 0 \Rightarrow \lambda = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{10} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{6+4}{10} = 1 \\ \lambda = \frac{6-4}{10} = \frac{1}{5} \end{cases}$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} - \left\{0, \frac{1}{5}, 1\right\} \Rightarrow \text{Rang}(A) = 3 = N^\circ \text{ de incógnitas} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado}$$

Si $\lambda = 0$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow 0z = 9 \Rightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

Si $\lambda = \frac{1}{5}$

$$\begin{pmatrix} 4 & \frac{4}{5} & 2 & \frac{4}{5} \\ \frac{1}{5} & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{9}{5} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 20 & 4 & 10 & 4 \\ 20 & 100 & -20 & 20 \\ 20 & 20 & 5 & 225 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 20 & 4 & 10 & 4 \\ 0 & 96 & -30 & 16 \\ 0 & 16 & -5 & 221 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 20 & 4 & 10 & 4 \\ 0 & 96 & -30 & 16 \\ 0 & 96 & -30 & 1326 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 20 & 4 & 10 & 4 \\ 0 & 96 & -30 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 1310 \end{pmatrix}$$

Sistema Incompatible

Si $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 4 & 1 & 9 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & -4 & 4 \\ 4 & 4 & 1 & 9 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 7 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & 42 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 44 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

Sistema Incompatible

Continuación Problema 2ª.-

b)

Si $\lambda = -1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -4 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -4 & -4 & -1 & 9 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -4 & 2 & -2 \\ -4 & 4 & 4 & -4 \\ -4 & -4 & -1 & 9 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & -6 \\ 0 & -8 & 1 & 7 \end{array} \right) \Rightarrow 6z = -6 \Rightarrow z = -1 \Rightarrow -8y - 1 = 7 \Rightarrow$$

$$y = -1 \Rightarrow 4x + 4 - 2 = -2 \Rightarrow 4x = -4 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow \text{Solución}(-1, -1, -1)$$

3.A.- Estudiar el siguientes límite $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha x^2 + 4x + 8}\right)^{(x+1)}$ según los valores del parámetro α

$$L = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha x^2 + 4x + 8}\right)^{(x+1)} = 1^\infty = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\alpha x^2 + 4x + 8}\right)^{(\alpha x^2 + 4x + 8)} \right]^{(x+1) \frac{1}{\alpha x^2 + 4x + 8}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{\alpha x^2 + 4x + 8}}$$

$$N = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{\alpha x^2 + 4x + 8} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{\alpha \frac{x^2}{x^2} + 4 \frac{x}{x^2} + \frac{8}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{\alpha + 4 \frac{1}{x} + \frac{8}{x^2}} = \frac{\frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty}}{\alpha + 4 \frac{1}{\infty} + \frac{8}{\infty}} = \frac{0+0}{\alpha + 4 \cdot 0 + 0} = \frac{0}{\alpha}$$

$$\text{Cuando} \begin{cases} \alpha \neq 0 \Rightarrow N = 0 \Rightarrow L = e^0 = 1 \\ \alpha = 0 \Rightarrow N = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{4x+8} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{4} + \frac{1}{4}}{\frac{x}{x} + \frac{8}{x}} = \frac{1 + \frac{1}{\infty}}{4 + \frac{8}{\infty}} = \frac{1}{4} \Rightarrow L = e^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{e} \end{cases}$$

4.A.- Calcular la integral $F(x) = \int_0^x t^2 e^{-t} dt$

$$F(x) = \int_0^x t^2 e^{-t} dt = -[t^2 e^{-t}]_0^x + 2 \int t e^{-t} dt = -(x^2 e^{-x} - 0^2 e^{-0}) + 2 \left\{ -[t e^{-t}]_0^x + \int e^{-t} dt \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t^2 = u \Rightarrow 2t dt = du \\ dv = e^{-t} dt \Rightarrow \int e^{-t} dt = -\int e^s ds = -e^s = -e^{-t} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} t = u \Rightarrow dt = du \\ dv = e^{-t} dt \Rightarrow \int e^{-t} dt = -e^{-t} \end{array} \right.$$

$$-t = s \Rightarrow dt = -ds$$

$$F(x) = -(x^2 e^{-x} - 0 \cdot e^0) + 2 \left\{ -(x e^{-x} - 0 \cdot e^0) + \int e^{-t} dt \right\} = -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} - 2[e^{-t}]_0^x$$

$$F(x) = -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} - 2 \cdot (e^{-x} - e^0) = -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} - 2 \cdot e^{-x} + 2$$

OPCIÓN B

1.B.- Dada las rectas: $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{1}$, $s \equiv \frac{x+2}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}$ se pide:

- a) Hallar la ecuación del plano π que contiene a r y es paralelo a s
 b) Determinar la distancia entre r y s
 c) Estudiar si la recta t paralela a r y que pasa por $O(0, 0, 0)$ corta a la recta s

a) Los vectores generadores del plano π son los de la recta r y s y el formado por el punto genérico del plano y el indicado en la recta r que son coplanarios, por lo tanto el determinante, por ellos formado, es nulo y la ecuación del plano pedido

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_r = (2, 3, 1) \\ \vec{v}_s = (2, 1, 1) \\ \vec{AG} = (x, y, z) - (1, 2, 0) = (x-1, y-2, z) \end{array} \right. \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$3(x-1) + 2(y-2) + 2z - 6z - (x-1) - 2(y-2) = 0 \Rightarrow 2(x-1) - 4z = 0 \Rightarrow 2x - 2 - 4z = 0 \Rightarrow$$

$$\pi \equiv x - 2z - 1 = 0$$

b) Por r trazaremos un plano paralelo a s (el plano π hallado) y hallaremos la distancia de el punto B dado en la recta s al plano que es el que existe entre las rectas.

$$\left\{ \begin{array}{l} B = (-2, 0, 2) \\ \pi \equiv x - 2z - 1 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow d_{rs} = d_{B\pi} = \frac{|-2 - 2 \cdot 2 - 1|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + (-2)^2}} = \frac{|-7|}{\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{5} u$$

c)

$$\vec{v}_r = \vec{v}_t = (2, 3, 1) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} t \equiv \begin{cases} x = 0 + 2\lambda \\ y = 0 + 3\lambda \\ z = 0 + \lambda \end{cases} \\ s \equiv \begin{cases} x = -2 + 2\mu \\ y = \mu \\ z = 2 + \mu \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2\lambda = -2 + 2\mu \\ 3\lambda = \mu \\ \lambda = 2 + \mu \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda - \mu = -1 \\ 3\lambda - \mu = 0 \\ \lambda - \mu = 2 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda - \mu = -1 \\ \lambda - \mu = 2 \end{array} \right. \Rightarrow 0 \neq -3 \Rightarrow$$

Sistema Incompatible \Rightarrow No se cortan t y s

2.B.- Si la derivada de la función $f(x)$ es $f'(x) = (x-1)^3(x+5)$ obtener:

- a) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f
 b) Los valores de x en los cuales f tiene máximos relativos, mínimos relativos, o puntos de inflexión
 c) La función f sabiendo que $f(0) = 0$

a)

$$f'(x) > 0 \Rightarrow (x-1)^3(x+5) > 0 \Rightarrow \begin{cases} (x-1)^2 > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \\ x-1 > 0 \Rightarrow x > 1 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} / x > 1 \\ x+5 > 0 \Rightarrow x > -5 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} / x > -5 \end{cases}$$

	$-\infty$	-5	1	∞
$x > -5$		(-)	(+)	(+)
$x > 1$		(-)	(-)	(+)
Resultado		(+) $f'(x) > 0$	(-) $f'(x) < 0$	(+) $f'(x) > 0$

$$f''(x) = 3(x-1)^2(x+5) + (x-1)^3 = (x-1)^2(3x+15+x-1) = (x-1)^2(4x+14) = 2(x-1)^2(2x+7)$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 2(x-1)^2(2x+7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-1 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ 2x+7 = 0 \Rightarrow x = -\frac{7}{2} \Rightarrow \text{Posibles puntos de inflexión} \end{cases}$$

$$f''(-5) = 2[(-5)-1]^2[2(-5)+7] = 2 \cdot 36 \cdot (-3) = -216 < 0 \Rightarrow \text{Máximo}$$

$$f'''(x) = 2 \cdot [2(x-1)(2x+7) + 2(x-1)^2] = 4(x-1)(2x+7+x-1) = 4(x-1)(3x+6) = 12(x-1)(x+2)$$

$$\begin{cases} f'''(1) = 12(1-1)(1+2) = 0 \Rightarrow \text{Dudoso} \\ f'''(-\frac{7}{2}) = 12\left[\left(-\frac{7}{2}\right)-1\right]\left[\left(-\frac{7}{2}\right)+2\right] = 12 \cdot \left(-\frac{9}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right) = 3 \cdot 27 = 81 \neq 0 \Rightarrow \text{Punto de inflexión} \end{cases}$$

$$f^{IV}(x) = 12(x+2+x-1) = 12(2x+1) \Rightarrow f^{IV}(1) = 12 \cdot (2 \cdot 1 + 1) = 36 > 0 \Rightarrow \text{Mínimo}$$

Es creciente para $\forall x \in \mathbb{R} / (x < -5) \cup (x > 1)$

Es decreciente para $\forall x \in \mathbb{R} / -5 < x < 1$

b)

Máximo en $x = -5$ Mínimo en $x = 1$ Punto de inflexión de tangente oblicua $x = -\frac{7}{2}$

c)

$$f(x) = \int (x-1)^3(x+5) dx = \int t^3(t+6) dt = \int t^4 dt + 6 \int t^3 dt = \frac{1}{5} \cdot t^5 + \frac{6}{4} \cdot t^4 = \frac{1}{5} \cdot (x-1)^5 + \frac{3}{2} \cdot (x-1)^4 + K$$

$$x-1 = t \Rightarrow dx = dt \Rightarrow x = t+1 \Rightarrow x+5 = t+6$$

$$f(0) = 0 \Rightarrow \frac{1}{5} \cdot (0-1)^5 + \frac{3}{2} \cdot (0-1)^4 + K = 0 \Rightarrow +\frac{1}{5} + \frac{3}{2} + K = 0 \Rightarrow K = -\frac{1}{5} - \frac{3}{2} = -\frac{13}{10}$$

$$f(x) = \frac{1}{5} \cdot (x-1)^5 + \frac{3}{2} \cdot (x-1)^4 - \frac{13}{10}$$

3.B.- Dado el sistema:
$$\begin{cases} 2x - y = \lambda \\ \lambda x - 2y = 4 \\ 3x - y = 2 \end{cases}, \text{ se pide:}$$

a) Discutir el sistema según los valores del parámetro λ

b) Resolver el sistema cuando sea posible

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 3 = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 2 \Rightarrow \text{Para ser Sistema Compatible Deter min ado} \Rightarrow$$

$$\text{rang}(A/B) = 2 \Rightarrow |A/B| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 & \lambda \\ \lambda & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -8 - 12 - \lambda^2 + 6\lambda + 8 + 2\lambda = 0 \Rightarrow -\lambda^2 + 8\lambda - 12 = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda^2 - 8\lambda + 12 = 0 \Rightarrow \Delta = 64 - 48 = 16 > 0 \Rightarrow \lambda = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{8+4}{2} = 6 \\ \lambda = \frac{8-4}{2} = 2 \end{cases}$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} - \{2, 6\} \Rightarrow |A/B| \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 2 \neq \text{rang}(A/B) = 3 \Rightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

$$\lambda = 2 \Rightarrow |A/B| = 0 \Rightarrow |A/B| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(A/B) = 2 = N^\circ \text{ de incognitas} \Rightarrow$$

Sistema Compatible Deter min ado

$$\lambda = 6 \Rightarrow |A/B| = 0 \Rightarrow |A/B| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(A/B) = 2 = N^\circ \text{ de incognitas} \Rightarrow$$

Sistema Compatible Deter min ado

b)

Si $\lambda = 2$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 6 & -2 & 4 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -y = 2 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow 2x + 2 = 2 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow$$

Solución(0, 2)

Continuación del problema 3B

c) *Continuación*

Si $\lambda = 6$

$$\begin{cases} 2x - y = 6 \\ 6x - 2y = 4 \\ 3x - y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 6 \\ -3x + y = -2 \end{cases} \Rightarrow -x = 4 \Rightarrow x = -4 \Rightarrow 2 \cdot (-4) - y = 6 \Rightarrow -y = 6 + 8 \Rightarrow y = -14$$

$$6(-4) - 2(-14) = 4 \Rightarrow -24 + 28 = 4 \Rightarrow \text{Solución}(-4, -14)$$

