JUNIO 2007- 08

OPCIÓN A

1.A.- Dado el sistema de ecuaciones lineales : $\begin{cases} x - ay = 2 \\ ax - y = a + 1 \end{cases}$, se pide

a) Discutir el sistema según los valores del parámetro **a**. Resolverlo cuando la solución sea única

b) Determinar para que valor o valores de **a** el sistema tiene una solución en la que **y = 2**

$a)$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -a \\ a & -1 \end{vmatrix} = -1 + a^2 \Rightarrow Si\ |A| = 0 \Rightarrow a^2 - 1 = 0 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm\sqrt{1} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -1 \end{cases}$$

$$\forall a \in \Re - \{-1, 1\} \Rightarrow rang(A) = 3 = Número\ de\ incognitas \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$$

Solución en función de a

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -a \\ a+1 & -1 \end{vmatrix}}{a^2 - 1} = \frac{-2 + a(a+1)}{a^2 - 1} = \frac{a^2 + a - 2}{a^2 - 1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ a & a+1 \end{vmatrix}}{a^2 - 1} = \frac{a + 1 - 2a}{a^2 - 1} = \frac{1 - a}{(a-1)(a+1)} = -\frac{a - 1}{(a-1)(a+1)} = -\frac{1}{a+1}$$

Cuando $a = -1$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow Sistema\ Incompatible$$

Cuando $a = 1$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow Sistema\ Compatible\ In\det er\min ado$$

$$x - y = 2 \Rightarrow x = y + 2 \Rightarrow Solución(\lambda + 2, \lambda)$$

$b)$

$$Caundo\ a = 1 \Rightarrow y = \lambda = 2 \Rightarrow Solución(2 + 2, 2) \Rightarrow Solución(4, 2)$$

$$2 = -\frac{1}{a+1} \Rightarrow 2a + 2 = -1 \Rightarrow 2a = -3 \Rightarrow a = -\frac{3}{2} \Rightarrow x = \frac{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right) - 2}{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 1} = \frac{\frac{9}{4} - \frac{3}{2} - 2}{\frac{9}{4} - 1} = \frac{-\frac{5}{4}}{\frac{5}{4}} = -1$$

2.A.- Dada las rectas: $r \equiv \begin{cases} x - ay = 2 \\ ay + z = 1 \end{cases}$ $\quad y \quad$ $r \equiv \begin{cases} x - z = 1 \\ y + z = 3 \end{cases}$, se pide

a) Discutir la posición relativa de las dos rectas **r, s** según los valores del parámetro **a**

b) Si a = 1, calcular la distancia mínima entre las dos rectas **r, s**

a)

$$\begin{cases} r : \begin{cases} x = 2 + a\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 - a\lambda \end{cases} \\ s : \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 3 - \mu \\ z = \mu \end{cases} \end{cases} \Rightarrow r \| s \Rightarrow \frac{a}{1} = \frac{1}{-1} = \frac{-a}{1} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{1} = \frac{1}{-1} \Rightarrow a = -1 \\ \frac{1}{-1} = \frac{-a}{1} \Rightarrow a = 1 \end{cases} \Rightarrow No \ pueden \ ser \ paralelas$$

Se cortaran

$$\begin{cases} 2 + a\lambda = 1 + \mu \\ \lambda = 3 - \mu \\ 1 - a\lambda = \mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\lambda - \mu = -1 \\ \lambda + \mu = 3 \\ a\lambda + \mu = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\lambda - \mu = -1 \\ a\lambda + \mu = 1 \end{cases} \Rightarrow 2\mu = 2 \Rightarrow \mu = 1 \Rightarrow \lambda = -2 \Rightarrow -2a + 1 = 1 \Rightarrow a = 0$$

$$Punto \ de \ corte \Rightarrow P \begin{cases} x = 2 + 0.1 = 2 \\ y = 1 \\ z = 1 - 0.1 \end{cases} \Rightarrow P(2\,,0\,,1)$$

$$\forall a \in \Re - \{0\} \Rightarrow las \ rectas \ r \ y \ s \ se \ cruzan$$

b)

$$\begin{cases} r : \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} = (2\,,0\,,1) \\ s : \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 3 - \mu \\ z = \mu \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_s} = (1\,,-1\,,1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_{rs}} = (2 + \lambda - 1 - \mu\,,\lambda - 3 + \mu\,,1 - \lambda - \mu)$$

$$\overrightarrow{v_{rs}} = (\lambda - \mu + 1\,,\lambda + \mu - 3\,,-\lambda - \mu + 1) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_{rs}} \perp \overrightarrow{v_r} \Rightarrow \overrightarrow{v_{rs}}.\overrightarrow{v_r} = 0 \\ \overrightarrow{v_{rs}} \perp \overrightarrow{v_s} \Rightarrow \overrightarrow{v_{rs}}.\overrightarrow{v_s} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\lambda - \mu + 1\,,\lambda + \mu - 3\,,-\lambda - \mu + 1)\cdot(2\,,0\,,1) = 0 \\ (\lambda - \mu + 1\,,\lambda + \mu - 3\,,-\lambda - \mu + 1)\cdot(1\,,-1\,,1) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2\lambda - 2\mu + 2 - \lambda - \mu + 1 = 0 \\ \lambda - \mu + 1 - \lambda - \mu + 3 - \lambda - \mu + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda - 3\mu + 3 = 0 \\ -\lambda - 3\mu + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow -6\mu + 8 = 0 \Rightarrow \mu = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \Rightarrow$$

$$\lambda - 3\cdot\frac{4}{3} + 3 = 0 \Rightarrow \lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$$

Continuación Problema 2.A.-

$b)$ *Continuación*

$$\begin{cases} A\begin{cases} x = 2+1 = 3 \\ y = 1 \\ z = 1-1 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(3\,,1\,,0) \\ B\begin{cases} x = 1+\dfrac{4}{3} = \dfrac{7}{3} \\ y = 3-\dfrac{4}{3} = \dfrac{5}{3} \Rightarrow B\left(\dfrac{7}{3}\,,\dfrac{5}{3}\,,\dfrac{4}{3}\right) \\ z = \dfrac{4}{3} \end{cases} \end{cases} \Rightarrow d_{rs} = d_{AB} = \sqrt{\left(3-\frac{7}{3}\right)^2+\left(1-\frac{5}{3}\right)^2+\left(0-\frac{4}{3}\right)^2}$$

$$d_{AB} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(-\frac{2}{3}\right)^2+\left(-\frac{4}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{4+4+16}{9}} = \frac{\sqrt{24}}{3} = \frac{2\sqrt{6}}{3}\ u$$

3.A Estudiar los siguientes límites:

$$a)\ (1\ punto)\quad \lim_{x\to\infty}\left(e^x - x^2\right)$$

$$b)\ (1\ punto)\quad \lim_{x\to\infty}\frac{4^x + 5^x}{3^x + 6^x}$$

$a)$

$$\lim_{x\to\infty}\left(e^x - x^2\right) = \infty - \infty = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(e^x - x^2\right)\left(e^x + x^2\right)}{e^x + x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^{2x} - x^4}{e^x + x^2} = \frac{\infty}{\infty} = \xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{2e^{2x} - 4x^3}{e^x + 2x} = \frac{\infty}{\infty} = \xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital} = \lim_{x\to\infty}\frac{4e^{2x} - 12x^2}{e^x + 2} = \frac{\infty}{\infty} = \xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{8.e^{2x} - 24x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} = \xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital} = \lim_{x\to\infty}\frac{16.e^{2x} - 24}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} = \xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{32.e^{2x}}{e^x} = \lim_{x\to\infty}32.e^x = \infty$$

$b)$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4^x + 5^x}{3^x + 6^x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{4}{6}\right)^x + \left(\frac{5}{6}\right)^x}{\left(\frac{3}{6}\right)^x + \left(\frac{6}{6}\right)^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{5}{6}\right)^x}{\left(\frac{1}{2}\right)^x + 1^x} = \left(Sabiendo\ que\ cuando\ x \to \infty \begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^x \to 0 \\ \left(\frac{5}{6}\right)^x \to 0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^x \to 0 \\ 1^x \to 1 \end{cases}\right) =$$

$$= \frac{0+0}{0+1} = \frac{0}{1} = 0$$

4.A.- Obtener los máximos y mínimos relativos, y los puntos de inflexión de la función:
$f(x) = x[\ln(x)]^2$, siendo **ln (x)** el logaritmo neperiano de x

$$\begin{cases} f'(x) = [\ln(x)]^2 + 2\ln(x)\cdot\dfrac{1}{x}\cdot x = [\ln(x)+2]\ln(x) \\ f''(x) = \dfrac{1}{x}\cdot\ln(x) + \dfrac{1}{x}\cdot[\ln(x)+2] = \dfrac{1}{x}\cdot[\ln(x)+\ln(x)+2] = \dfrac{2}{x}\cdot[\ln(x)+1] \end{cases} \Rightarrow$$

Máximos o mínimos relativos

$$f'(x) = 0 \Rightarrow [\ln(x)+2]\ln(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \ln(x) = 0 \Rightarrow x = e^0 = 1 \Rightarrow f(1) = 1[\ln(1)]^2 = 0 \\ \ln(x)+2 = 0 \Rightarrow \ln(x) = -2 \Rightarrow x = e^{-2} \Rightarrow f(e^{-2}) = e^{-2}[\ln(e^{-2})]^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f''(1) = \dfrac{2}{1}\cdot[\ln(1)+1] = 2\cdot(0+1) = 2 > 0 \Rightarrow \textit{Mínimo relativo en } (1\,,\,0) \\ f''(e^{-2}) = \dfrac{2}{e^{-2}}\cdot[\ln(e^{-2})+1] = 2e^2\cdot[-2\ln(e)+1] = 2e^2\cdot[-2.1+1] = -2e^2 < 0 \Rightarrow \textit{Máximo relativo} \end{cases} \Rightarrow$$

$$x = e^{-2} = \frac{1}{e^2} \Rightarrow f(e^{-2}) = \frac{1}{e^2}\cdot[\ln(e^{-2})]^2 = \frac{1}{e^2}\cdot[(-2)\ln(e)]^2 = \frac{1}{e^2}\cdot[(-2)]^2 = \frac{4}{e^2} \Rightarrow$$

$$\textit{Máximo relativo}\left(\frac{1}{e^2}\,,\,\frac{4}{e}\right)$$

Puntos de inflexión

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{2}{x}\cdot[\ln(x)+1] = 0 \Rightarrow \ln(x)+1 = 0 \Rightarrow \ln(x) = -1 \Rightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e} \Rightarrow f(e^{-1}) = e^{-1}[\ln(e^{-1})]^2$$

$$f(e^{-1}) = e^{-1}(-1\cdot\ln e)^2 = \frac{1}{e}\cdot(-1)^2 = \frac{1}{e} \Rightarrow \textit{Punto de inflexión}\left(\frac{1}{e}\,,\,\frac{1}{e}\right)$$

OPCIÓN B

1.B.- Dada la siguiente matriz de orden **n**: $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 9 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 9 & \dots & 1 & 1 \\ . & . & . & \dots & . & . \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 9 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Calcular el determinante de la matriz $\mathbf{A_2}$

b) Calcular el determinante de la matriz $\mathbf{A_3}$

c) Calcular el determinante de la matriz $\mathbf{A_5}$

$a)$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 10 \end{vmatrix} = 10$$

$b)$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 9 & 1 \\ -1 & -1 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 100 = 10^2$$

$c)$

$\text{Pr}\,evisblemente\ será\ 10^4$

$$|A_5| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 9 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 9 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 9 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 10 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 10 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 10000 = 10^4$$

$$|A_n| = 10^{n-1}$$

2.B.- a) Para cada valor de **c > 0**, calcular el área de la región acotada comprendida entre la gráfica de la función $f(x)=cx^4+\frac{1}{c}\cdot x^2+1$ el eje **OX** y las rectas **x = 0** y **x = 1**

b) Hallar el valor de **c** para el cual el área obtenida en el apartado a) es mínima.

$a)$

$$A=\int_0^1\left(cx^4+\frac{1}{c}\cdot x^2+1\right)dx=\frac{1}{5}\cdot c\cdot\left[x^5\right]_0^1+\frac{1}{c}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_0^1+\cdot\left[x\right]_0^1$$

$$A=\frac{1}{5}\cdot c\cdot\left(1^5-0^5\right)+\frac{1}{3c}\cdot\left(1^3-0^3\right)+\left(1-0\right)=\frac{1}{5}\cdot c+\frac{1}{3c}+1$$

$b)$

$$A'=\frac{dA}{dc}=\frac{1}{5}-\frac{1}{3c^2}=\frac{3c^2-5}{15c^2}\Rightarrow A'=0\Rightarrow 3c^2-5=0\Rightarrow 3c^2=5\Rightarrow c^2=\frac{5}{3}\Rightarrow$$

$$c=\pm\sqrt{\frac{5}{3}}\Rightarrow Como\ c>0\Rightarrow c=\sqrt{\frac{5}{3}}=\frac{\sqrt{15}}{3}$$

3.B.- Dado los puntos **A(0 , 0 , 1), B(1 , 0 , - 1), C(0 , 1 , - 2)** y **D(1 , 2 , 0)**, se pide:

a) Demostrar que los cuatro puntos no son coplanarios
b) Hallar la ecuación del plano **p** determinado por los puntos **A, B** y **C**
c) Hallar la distancia del punto **D** al plano **p**

a) Si fuesen coplanarios (estar en el mismo plano) el determinante formado por los vectores **AB, AC** y **AD** tendrá valor nulo, en caso contrario no lo son

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1\,,0\,,-1) - (0\,,0\,,1) = (1\,,0\,,-2) \\ \overrightarrow{AC} = (0\,,1\,,-2) - (0\,,0\,,1) = (0\,,1\,,-3) \\ \overrightarrow{AD} = (1\,,2\,,0) - (0\,,0\,,1) = (1\,,2\,,-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 2 + 6 = 7 \neq 0 \Rightarrow \textit{No son coplanarios}$$

$b)$

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1\,,0\,,-2) \\ \overrightarrow{AC} = (0\,,1\,,-3) \\ \overrightarrow{AG} = (x\,,y\,,z) - (0\,,0\,,1) = (x\,,y\,,z-1) \end{cases} \Rightarrow \pi : \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (z-1) + 2x + 3y = 0 \Rightarrow$$

$$\pi : 2x + 3y + z - 1 = 0$$

$c)$

$$d_{D\pi} = \frac{|2.1 + 3.2 + 1.0 - 1|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{|2 + 6 + 1|}{\sqrt{14}} = \frac{8}{\sqrt{14}} = \frac{8\sqrt{14}}{14} = \frac{4\sqrt{14}}{7}\ u$$

4.B.- Dado el plano $\pi \equiv 3x + 2y - z + 10 = 0$ y el punto **P(1 , 2 , 3),** se pide:

a) Hallar la ecuación de la recta **r** perpendicular al plano **p** que pasa por el punto **P**

b) Hallar el punto **Q** intersección de **p** y **r**

c) Hallar el punto **R** intersección de **p** con el eje **OY**

d) Hallar el área del triángulo **PQR**

a) La recta pedida **r** esta determinada por el punto **P** y como vector director el del plano **p** ya que al ser perpendicular a él es paralelo a ella.

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = 3 - \lambda \end{cases}$$

$b)$

$$3.(1+3\lambda) + 2.(2+2\lambda) - (3-\lambda) + 10 = 0 \Rightarrow 3 + 9\lambda + 4 + 4\lambda - 3 + \lambda + 10 = 0 \Rightarrow 14\lambda + 14 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$$

$$Q \begin{cases} x = 1 + 3.(-1) = -2 \\ y = 2 + 2.(-1) = 0 \Rightarrow Q(-2\ ,\ 0\ ,\ 4) \\ z = 3 - (-1) = 4 \end{cases}$$

$c)$

$$OY \equiv \begin{cases} x = 0 + 0\mu = 0 \\ y = 0 + \mu = \mu \Rightarrow 3.0 + 2.\mu - 0 + 10 = 0 \Rightarrow 2.\mu + 10 = 0 \Rightarrow \mu = -5 \\ z = 0 + 0\mu = 0 \end{cases}$$

$$R \begin{cases} x = 0 \\ y = -5 \Rightarrow R(0\ ,\ -5\ ,\ 0) \\ z = 0 \end{cases}$$

$d)$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \left| \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} \right| \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{PQ} = (-2\ ,\ 0\ ,\ 4) - (1\ ,\ 2\ ,\ 3) = (-3\ ,\ -2\ ,\ 1) \\ \overrightarrow{PR} = (0\ ,\ -5\ ,\ 0) - (1\ ,\ 2\ ,\ 3) = (-1\ ,\ -7\ ,\ -3) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & -2 & 1 \\ -1 & -7 & -3 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = 6\vec{i} - \vec{j} + 21\vec{k} - 2\vec{k} + 7\vec{i} - 9\vec{j} = 13\vec{i} + 6\vec{j} + 19\vec{k} \Rightarrow \left| \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} \right| = \sqrt{13^2 + 6^2 + 19^2} \Rightarrow$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{566}\ u^2$$