Junio de 2007

Soluciones de la Opción A

1.A.-Estudia el rango de la matriz: $A=\begin{pmatrix} m & m-1 & m(m-1) \\ m & 1 & m \\ m & 1 & m-1 \end{pmatrix}$

$$|A|=\begin{vmatrix} m & m-1 & m(m-1) \\ m & 1 & m \\ m & 1 & m-1 \end{vmatrix}=m\begin{vmatrix} 1 & m-1 & m(m-1) \\ 1 & 1 & m \\ 1 & 1 & m-1 \end{vmatrix}\Rightarrow$$

$$|A|=m\left[(m-1)+m(m-1)+m(m-1)-m(m-1)-m-(m-1)^2\right]=m\left[(m-1)+m(m-1)-m-(m-1)^2\right]$$

$$|A|=m\left(m-1+m^2-m-m-m^2+2m-1\right)=m(m-2)\Rightarrow Si\ |A|=0\Rightarrow m(m-2)=0\Rightarrow\begin{cases} m=0 \\ m-2=0\Rightarrow m=2\end{cases}$$

$$Si\begin{cases} m\neq 0 \\ m\neq 2\end{cases}\Rightarrow |A|\neq 0\Rightarrow rang(A)=3$$

$$Si\ m=0\Rightarrow\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-1\neq 0\Rightarrow rang(A)=2$$

$$Si\ m=2\Rightarrow\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-1\neq 0\Rightarrow rang(A)=2$$

2.A.-Sean las matrices: $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\quad y\quad B=\begin{pmatrix}8 & -9\\ 6 & -7\end{pmatrix}$

Hallar la matriz **X** tal que **XAX^{-1}= B**

$$XAX^{-1}X = BX \Rightarrow XAI = BX \xrightarrow{I\ matriz\ identidad\ de\ orden\ 2} XA = BX$$

$$Siendo\ X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & -9\\ 6 & -7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}2a & -b\\ 2c & -d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8a-9c & 8b-9d\\ 6a-7c & 6b-7d\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}2a=8a-9c\\ -b=8b-9d\\ 2c=6a-7c\\ -d=6b-7d\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}9c=6a\\ -9b=-9d\\ 6b=6d\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{3}{2}c\\ b=d\end{cases}\Rightarrow X=\begin{pmatrix}\dfrac{3}{2}\lambda & \mu\\ \lambda & \mu\end{pmatrix}\Rightarrow Comprobemos\ con\begin{cases}\lambda=2\\ \mu=1\end{cases}$$

$$|X|=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1\Rightarrow X^t=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow adj(X^t)=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}\Rightarrow X^{-1}=\frac{1}{1}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & -1\\ 4 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & -9\\ 6 & -7\end{pmatrix}\Rightarrow Comprobado$$

3.A.-Dado el punto **A(1, -2, -3)**, la recta $r \equiv \begin{cases} x+y+1=0 \\ z=0 \end{cases}$, el plano $\pi \equiv x-2y-3z+1=0$, se pide:

a) Ecuación del plano que pasa por A, es paralelo a r y perpendicular a p

b) Ecuación de la recta que pasa por A, corta a r y es paralela a p

a) Si es paralelo a r, el vector director de esta, está contenido en el plano, lo mismo que el del plano p que es perpendicular al pedido. Nos falta un tercer vector coplanario con ellos que es el formado por el punto genérico (x,y,z) y el punto A

$$r \equiv \begin{cases} x=-1-\lambda \\ y=\lambda \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_r}=(-1,1,0) \\ \overrightarrow{v_\pi}=(1,-2,-3) \\ \overrightarrow{v_{genérico}}=(x,y,z)-(1,-2,-3)=(x-1,y+2,z+3) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z+3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -3(x-1)+2(z+3)-(z+3)-3(y+2)=0 \Rightarrow -3x+z-3y=0 \Rightarrow$$

$$\pi \equiv 3x+3y-z=0$$

$b)$

$$s \equiv \begin{cases} x=1+a\mu \\ y=-2+b\mu \\ z=-3+\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} -1-\lambda=1+a\mu \\ \lambda=-2+b\mu \\ 0=-3+\mu \end{cases} \\ \begin{cases} \overrightarrow{v_s}=(a,b,1) \\ \overrightarrow{v_\pi}=(1,-2,-3) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_s} \perp \overrightarrow{v_\pi} \Rightarrow \overrightarrow{v_s}.\overrightarrow{v_\pi}=0 \Rightarrow (a,b,1).(1,-2,-3)=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \lambda+a\mu=-2 \\ \lambda-b\mu=-2 \\ \mu=3 \\ a-2b-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda+3a=-2 \\ \lambda-3b=-2 \\ a-2b=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda=-2-3a \\ \lambda=-2+3b \\ a-2b=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2-3a=-2+3b \\ a-2b=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ a-2b=3 \end{cases} \Rightarrow -3b=3 \Rightarrow$$

$$b=-1 \Rightarrow a=1 \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x=1+\mu \\ y=-2-\mu \\ z=-3+\mu \end{cases}$$

4.A.-Se considera la función ***f(x) = x²+ m***, donde ***m > 0*** es una constante

a) Para cada valor de ***m*** hallar el valor de ***a > 0*** tal que la recta tangente a la grafica de ***f*** en el punto **[*a* , *f(a)*]** pase por el origen de coordenadas

b)Hallar el valor de ***m*** para que la recta ***y = x*** sea tangente a la grafica de ***f (x)***

a) La recta pedida es de la forma y = f'(a) x

$$f'(x) = 2x \Rightarrow \begin{cases} f(x) = a^2 + m \\ f'(a) = 2a \end{cases} \Rightarrow a^2 + m = 2a.a \Rightarrow a^2 + m = 2a^2 \Rightarrow a^2 = m \Rightarrow a = \pm\sqrt{m} \Rightarrow$$

$$Como\ a > 0 \Rightarrow a = \sqrt{m}$$

$b)$

$$\begin{cases} f(x) = a^2 + m \\ f'(a) = 2a = 1 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow f(a) = 1.a \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 + m = \frac{1}{2} \Rightarrow m = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

Soluciones de la Opción B

1.B.-Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2-12}{x^2+4}$ calcular el área de la región acotada encerrada por su gráfica y el eje OX

Es una función simétrica respecto al eje OY ya que $f(-x)=\dfrac{(-x)^2-12}{(-x)^2+4}=\dfrac{x^2-12}{x^2+4}=f(x)$

por lo tanto es el doble de la integral definida entre el origen de coordenadas y uno de los puntos de corte que tenga con el eje OX (tomaremos el positivo)

$$Cuando\ y=f(x)=0 \Rightarrow x^2-12=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{12}=\pm 2\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$A=2.\left|\int_0^{2\sqrt{3}}\frac{x^2-12}{x^2+4}\,dx\right|=2.\left|\int_0^{2\sqrt{3}}\left(1-\frac{16}{x^2+4}\right)dx\right|=\left|2.\int_0^{2\sqrt{3}}dx-2.\int_0^{2\sqrt{3}}\frac{16}{x^2+4}\,dx\right|=\left|2\cdot[x]_0^{2\sqrt{3}}-\frac{32}{4}\int_0^{2\sqrt{3}}\frac{1}{\frac{x^2}{4}+1}\,dx\right|$$

$$\begin{array}{r|l} x^2-12 & x^2+4 \\ \cline{2-2} -x^2-4 & 1 \\ \hline -16 & \end{array}$$

$$A=\left|2\cdot\left(2\sqrt{3}-0\right)-8\int_0^{2\sqrt{3}}\frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}\,dx\right|=\left|4\sqrt{3}-8\int_0^{\sqrt{3}}\frac{1}{t^2+1}\,2dt\right|=\left|4\sqrt{3}-16\cdot[arc\ tg\ x]_0^{\sqrt{3}}\right|$$

$$\frac{x}{2}=t \Rightarrow \begin{cases} x=2\sqrt{3}\Rightarrow t=\sqrt{3} \\ x=0\Rightarrow t=0 \end{cases} \Rightarrow dx=2\,dt \qquad A=4\sqrt{3}-16\cdot\left(arc\ tg\ \sqrt{3}-arc\ tg\ 0\right)$$

$$A=\left|4\sqrt{3}-16\cdot arc\ tg\ \sqrt{3}\right|=\left(16\cdot\frac{\pi}{3}-4\sqrt{3}\right)u^2$$

2.B.- Dibujar la grafica de la función $f(x)=\dfrac{|x|}{2-x}$ indicando su dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento y asíntotas

$$2-x=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow D(f)=\forall x \in \Re - \{2\}$$

$$x>0 \Rightarrow f(x)=\begin{cases} -\dfrac{x}{2-x} & si \quad x<0 \\ \dfrac{x}{2-x} & si \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Asíntotas verticales

$$x=2 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x}{2-x}=\dfrac{2}{0^+}=\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x}{2-x}=\dfrac{2}{0^-}=-\infty \end{cases}$$

Asíntotas horizontales

$$y=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{2-x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x}}{\frac{2}{x}-\frac{x}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{2}{x}-1}=\frac{1}{0-1}=-1 \Rightarrow y=-1\ cuando\ x\to\infty$$

$$y=\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{x}{2-x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{(-x)}{2-(-x)}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{2+x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x}}{\frac{2}{x}+\frac{x}{x}}=\frac{1}{0+1}=1 \Rightarrow$$

$$y=1\ cuando\ x\to-\infty$$

Asíntotas oblicuas ó inclinadas

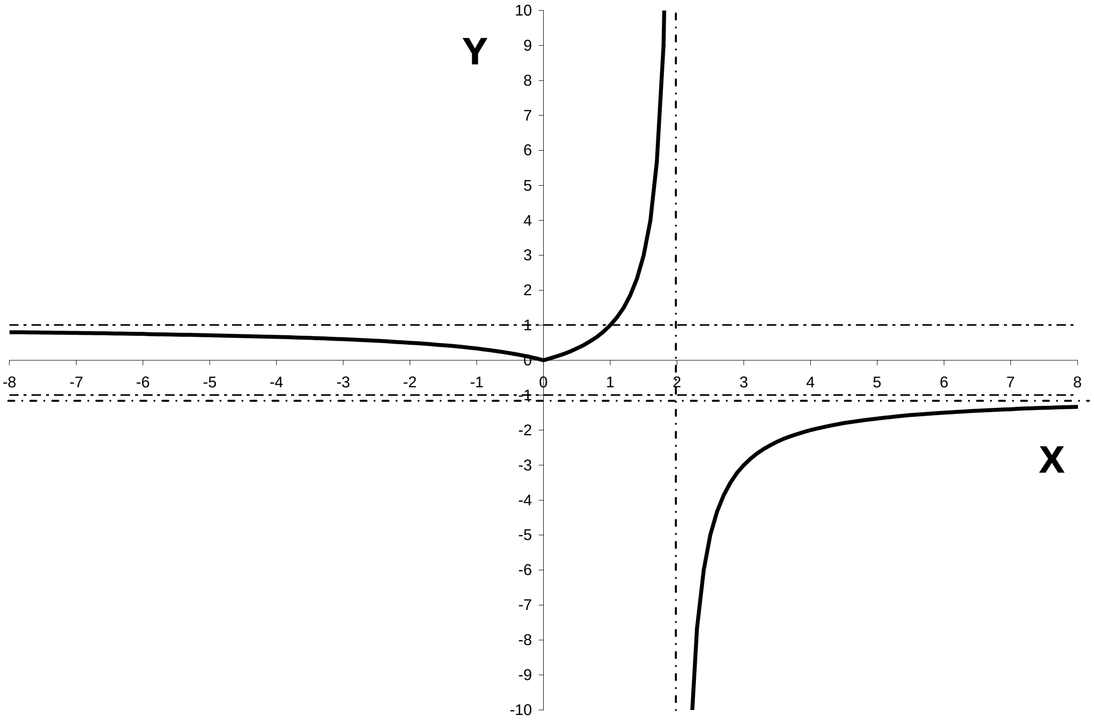
$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{2-x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x(2-x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2-x}=\frac{1}{-\infty}=0 \Rightarrow \nexists \Rightarrow x\to\infty$$

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\frac{x}{2-x}}{x}=\lim_{x\to-\infty}-\frac{x}{x(2-x)}=\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{2-x}\right)=-\frac{1}{\infty}=0 \Rightarrow \nexists \Rightarrow x\to-\infty$$

$$f'(x)=\begin{cases} -\dfrac{(2-x)-x}{(2-x)^2}=-\dfrac{2}{(2-x)^2} & si \quad x<0 \\ \dfrac{(2-x)-x}{(2-x)^2}=\dfrac{2}{(2-x)^2} & si \quad x\geq 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x)>0 \Rightarrow \begin{cases} x<0 \begin{cases} -2<0 \Rightarrow \forall x\in\Re \\ (x-2)^2>0 \Rightarrow \forall x\in\Re \end{cases} \Rightarrow Dereciente \\ x>0 \begin{cases} 2>0 \Rightarrow \nexists x\in\Re \\ (x-2)^2>0 \Rightarrow \forall x\in\Re \end{cases} \Rightarrow Creciente \end{cases}$$

Continúa el problema 2.B.-

Gráfica de la función



3.B.- Dada las matrices $A=\begin{pmatrix}5&2&0\\2&5&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}a&b&0\\c&c&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, se pide:

a) Encontrar las condiciones que deben de cumplir ***a, b*** y ***c*** para que se verifique ***AB = BA***

b) Para a = b = c = 1, calcular B^{10}

$a)$

$$\begin{cases} AB=\begin{pmatrix}5&2&0\\2&5&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a&b&0\\c&c&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5a+2c&5b+2c&0\\2a+5c&2b+5c&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\ BA=\begin{pmatrix}a&b&0\\c&c&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5&2&0\\2&5&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5a+2b&2a+5b&0\\5c+2c&2c+5c&0\\0&0&1\end{pmatrix}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}5a+2c=5a+2b\\5b+2c=2a+5b\\2a+5c=7c\\2b+5c=7c\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2c=2b\\2c=2a\\2a=2c\\2b=2c\end{cases}\Rightarrow a=b=c$$

$Tambien$

$$AB=BA\Rightarrow A^{-1}AB=BA^{-1}A\Rightarrow B=B\Rightarrow a=b=c$$

$b)$

$$B^2=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2&0\\2&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow B^3=\begin{pmatrix}2&2&0\\2&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&4&0\\4&4&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$B^4=\begin{pmatrix}4&4&0\\4&4&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&8&0\\8&8&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow B^5=\begin{pmatrix}8&8&0\\8&8&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16&16&0\\16&16&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\text{Pr}\,ogresión\ geométrica\Rightarrow 1,2,4,8,16,\cdots\Rightarrow\begin{cases}a_1=1\\r=2\end{cases}\Rightarrow a_n=a_1.r^{n-1}\Rightarrow a_{10}=1.2^{10-1}=2^9=512$$

$$B^5=\begin{pmatrix}512&512&0\\512&512&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

4.B.- Sean los puntos $A(\lambda , 2 , \lambda) ; B(2 , -\lambda , 0)\ y\ C(\lambda , 0 , \lambda + 2)$.

a) ¿Existe un valor de l para el que los puntos A, B y C están alineados?

b) Comprobar que si A, B y C no están alineados el triángulo que forman es isósceles

c) Calcular la ecuación del plano que contiene al triángulo ABC para el valor l= 0 y hallar la distancia de este plano al origen de coordenadas

a) Si estuviesen alineados los vectores AB y AC serian proporcionales.

$$A(\lambda , 2 , \lambda) ; B(2 , -\lambda , 0)\ y\ C(\lambda , 0 , \lambda + 2) \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (2 , -\lambda , 0) - (\lambda , 2 , \lambda) = (2-\lambda , -\lambda - 2 , -\lambda) \\ \overrightarrow{AC} = (\lambda , 0 , \lambda + 2) - (\lambda , 2 , \lambda) = (0 , -2 , 2) \equiv (0 , -1 , 1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$Si\ \overrightarrow{AB} \| \overrightarrow{AC} \Rightarrow \frac{2-\lambda}{0} = \frac{-\lambda - 2}{-1} = \frac{-\lambda}{1} \Rightarrow \begin{cases} -2 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 2 \\ -\lambda - 2 = \lambda \Rightarrow -2 = 2\lambda \Rightarrow \lambda = -1 \end{cases} \Rightarrow Incompatible$$

No estarán nunca alineados

b)Veamos si $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right|$ *ya que* $\overrightarrow{AC}$ *permanece invariable*

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (2-\lambda , -\lambda - 2 , -\lambda) \\ \overrightarrow{AC} = (0 , -2 , 2) \Rightarrow \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}\ u \Rightarrow \\ \overrightarrow{BC} = (\lambda , 0 , \lambda + 2) - (2 , -\lambda , 0) = (\lambda - 2 , \lambda , \lambda + 2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(2-\lambda)^2 + (-2-\lambda)^2 + (-\lambda)^2} = \sqrt{4 - 2\lambda + \lambda^2 + 4 + 2\lambda + \lambda^2 + \lambda^2} = \sqrt{3\lambda^2 + 8} \\ \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{(\lambda - 2)^2 + \lambda +^2 (2+\lambda)^2 +} = \sqrt{\lambda^2 - 2\lambda + 4 + \lambda^2 + 4 + 2\lambda + \lambda^2} = \sqrt{3\lambda^2 + 8} \end{cases} \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right|$$

c)

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (2-0 , -0-2 , -0) = (2 , -2 , 0) \equiv (1 , -1 , 0) \\ \overrightarrow{AC} = (0 , -1 , 1) \\ \overrightarrow{AG} = (x , y , z) - (0 , 2 , 0) = (x , y-2 , z) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x & y-2 & z \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$-x - z - (y-2) = 0 \Rightarrow -x - y - z + 2 = 0 \Rightarrow \pi \equiv x + y + z - 2 = 0$$

$$d_{P,\pi} = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \Rightarrow d_{O,\pi} = \frac{|0+0+0-2|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{|-2|}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\ u$$