OPCIÓN A

1.A.- Dadas las matrices: $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&2\\0&2&3\end{pmatrix}\quad y\quad B=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&1&-1\\0&1&3\end{pmatrix}$

a) Determinar la matriz inversa de **B**

b) Determinar una matriz **X** tal que **A = BX**

$a)$

$$\exists B^{-1}\Rightarrow |B|\neq 0\Rightarrow |B|=\begin{vmatrix}1&1&2\\1&1&-1\\0&1&3\end{vmatrix}=3+2+1-3=3\neq 0\Rightarrow B^{-1}=\frac{1}{|B|}\cdot adj\left(B^t\right)\Rightarrow B^t=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&1\\2&-1&3\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$adj\left(B^t\right)=\begin{pmatrix}4&-1&-3\\-3&3&3\\1&-1&0\end{pmatrix}\Rightarrow B^{-1}=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}4&-1&-3\\-3&3&3\\1&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{3}&-\frac{1}{3}&-1\\-1&1&1\\\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&0\end{pmatrix}$$

$$B^{-1}A=B^{-1}BX\Rightarrow X=B^{-1}A\Rightarrow X=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}4&-1&-3\\-3&3&3\\1&-1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&2\\0&2&3\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}4&1&-11\\-3&3&15\\1&1&-2\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}\frac{4}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{11}{3}\\-1&1&5\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

2.A.- a) Si **A** es una matriz tal que $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, ¿cual es el valor del determinante de **A**?

b) Calcular un número **k** tal que: $\left[\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - k\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right]^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$a)$

$$\left|A^2\right| = 0 \Rightarrow \left|A^2\right| = |A|^2 = |A| \cdot |A| = 0 \Rightarrow Como\ |A| = |A| \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow \det(A) = 0$$

$b)$

$$\left[\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\right]^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3-k & -4 \\ 1 & -1-k \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Utilizando\ la\ propieadad\ del\ a)$$

$$\begin{vmatrix} 3-k & -4 \\ 1 & -1-k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -(3-k)(1+k) + 4 = 0 \Rightarrow -\left(3 + 3k - k - k^2\right) + 4 = 0 \Rightarrow k^2 - 2k + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Delta = 4 - 4 = 0 \Rightarrow k = \frac{2}{2} = 1$$

Comprobación

$$\begin{pmatrix} 3-k & -4 \\ 1 & -1-k \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3-k & -4 \\ 1 & -1-k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3-k & -4 \\ 1 & -1-k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} (3-k)^2 - 4 & -4(3-k) - 4(-1-k) \\ (3-k) + (-1-k) & -4 + (-1-k)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 9 - 6k + k^2 - 4 = 0 \Rightarrow k^2 - 6k + 5 = 0 \\ -12 + 4k + 4 + 4k = 0 \Rightarrow 8k - 8 = 0 \\ 3 - k - 1 - k = 0 \Rightarrow -2k + 2 = 0 \\ -4 + 1 + 2k + k^2 = 0 \Rightarrow k^2 + 2k - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} k^2 - 6k + 5 = 0 \Rightarrow \Delta = 36 - 20 = 16 > 0 \Rightarrow k = \dfrac{6 \pm 4}{2} \Rightarrow \begin{cases} k = 1 \\ k = 5 \end{cases} \\ 8k - 8 = 0 \Rightarrow k = 1 \\ -2k + 2 = 0 \Rightarrow k = 1 \\ k^2 + 2k - 3 = 0 \Rightarrow \Delta = 4 + 12 = 16 > 0 \Rightarrow k = \dfrac{-2 \pm 4}{2} \Rightarrow \begin{cases} k = 1 \\ k = -3 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow k = 1\ (Comprobado)$$

3.A.- Sea el plano **p : x + 2y +3z = 6**

a) Hallar el punto simétrico del **(0 , 0, 0)** respecto de **p**

b) Hallar el plano perpendicular a **p** que contiene el eje **OZ**

c) Hallar el volumen del tetraedro cuyos vértices son el origen y los puntos de intersección de **p** con los ejes coordenados.

a) Se trazará por el punto dado una recta **r** perpendicular al plano **p**, para ello se tomará el vector director del plano y su vector generador. Se hallara el punto de corte de la recta hallada y el plano dado que nos da el punto central **A** del simétrico pedido **P**.

$$\overrightarrow{v_\pi} = (1\,,\,2\,,\,3) \Rightarrow r : \begin{cases} x = 0 + \lambda = \lambda \\ y = 0 + 2\lambda = 2\lambda \\ z = 0 + 3\lambda = 3\lambda \end{cases} \Rightarrow \lambda + 2.2\lambda + 3.3\lambda = 6 \Rightarrow 14\lambda = 6 \Rightarrow \lambda = \frac{3}{7} \Rightarrow A \begin{cases} x = \frac{3}{7} \\ y = \frac{6}{7} \\ z = \frac{9}{7} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{3}{7} = \frac{0 + x_p}{2} \Rightarrow 7x_p = 6 \Rightarrow x_p = \frac{6}{7} \\ \frac{6}{7} = \frac{0 + y_p}{2} \Rightarrow 7y_p = 12 \Rightarrow y_p = \frac{12}{7} \\ \frac{9}{7} = \frac{0 + z_p}{2} \Rightarrow 7z_p = 18 \Rightarrow x_p = \frac{18}{7} \end{cases} \Rightarrow P\left(\frac{6}{7}\,,\,\frac{12}{7}\,,\,\frac{18}{7}\right)$$

b) Uno de los vectores directores del plano buscado es el de **p**, el otro es el del eje **OZ** y el último el vector formado por el punto genérico y el origen de coordenadas que es por donde pasa el eje **OZ**

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_\pi} = (1\,,\,2\,,\,3) \\ \overrightarrow{v_{OZ}} = (0\,,\,0\,,\,1) \\ \overrightarrow{v_{generico}} = (x\,,\,y\,,\,z) - (0\,,\,0\,,\,0) = (x\,,\,y\,,\,z) \end{cases} \Rightarrow \sigma \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \sigma \equiv 2x - y = 0$$

Continuación del problema 3.A.-

c) Los puntos de corte, **B, C y D,** serán los del plano **p** con los ejes **OX, OY y OZ .** Con ellos se formaran los vectores BC y BD con los que hallaremos el volumen pedido

$$\begin{cases} OX \equiv \begin{cases} x = 0 + \lambda = \lambda \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda + 2.0 + 3.0 = 6 \Rightarrow \lambda = 6 \Rightarrow B \begin{cases} x = 6 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow B(6\,,\,0\,,\,0) \\ OY \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = \mu \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow 0 + 2.\mu + 3.0 = 6 \Rightarrow 2\mu = 6 \Rightarrow \mu = 3 \Rightarrow C \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow C(0\,,\,3\,,\,0) \\ OZ \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \alpha \end{cases} \Rightarrow 0 + 2.0 + 3.\alpha = 6 \Rightarrow 3.\alpha = 6 \Rightarrow \alpha = 2 \Rightarrow D \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow D(0\,,\,0\,,\,2) \end{cases}$$

$$V = \frac{1}{6} \cdot \left| \overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC} \right| \cdot \overrightarrow{OD} \Rightarrow V = \frac{1}{6} \cdot \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot 36 = 6\, u^3$$

4.A.- Sabiendo que una función **f(x)** tiene como derivada **f'(x) = (x – 4)²(x² – 8x + 7)**

a) Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de **f**

b) Hallar los máximos y mínimos relativos de **f**

c) ¿Es el punto **x = 4** un punto de inflexión de **f**?.Justificar razonadamente la respuesta

$a)$

$$x^2 - 8x + 7 = 0 \Rightarrow \Delta = 64 - 28 = 36 > 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{36}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{8+6}{2} = 7 \\ x_2 = \frac{8-6}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$f'(x) = (x-1)(x-4)^2(x-7) \Rightarrow Crecimiento \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow (x-1)(x-4)^2(x-7) > 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 1 > 0 \Rightarrow \forall x \in \Re / x > 1 \\ (x-4)^2 > 0 \Rightarrow \forall x \in \Re \\ x - 7 > 0 \Rightarrow \forall x \in \Re / x > 7 \end{cases}$$

	$-\infty$ a 1	1 a 7	7 a ∞
x > 1	-	+	+
x > 7	-	-	+
	f'(x) > 0	**f'(x) < 0**	**f'(x) > 0**

Crecimiento $\forall x \in \Re / (x < 1) \cup (x > 7)$ **Decrecimiento** $\forall x \in \Re / 1 < x < 7$

b)

En **x = 1 hay un máximo relativo** (De crecimiento pasa a decrecimiento)

En **x = 7 hay un mínimo relativo** (De decrecimiento pasa a crecimiento)

c)

$$f''(x) = (x-4)^2(x-7) + (x-1).2.(x-4)(x-7) + (x-1)(x-4)^2$$
$$f''(x) = (x-4)[(x-4)(x-7) + 2(x-1)(x-7) + (x-1)(x-4)]$$
$$f''(4) = (4-4)[(4-4)(4-7) + 2(4-1)(4-7) + (4-1)(4-4)] = 0 \Rightarrow$$
$$Existe\ un\ punto\ de\ \inf lexión\ en\ x = 4$$

OPCIÓN B

1.B.- a) Hallar el conjunto formado por los puntos del plano **z = 0** que distan **3** unidades del plano de ecuación **2x – y + 2z = 4**

b) Describir dicho conjunto

a)

$$\text{Los puntos del plano son de la forma } (x\ ,\ y\ ,\ 0) \Rightarrow 3 = \pm\frac{2x - y + 2.0 + 4}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} \Rightarrow 3 = \pm\frac{2x - y + 4}{\sqrt{9}}$$

$$\begin{cases} 9 = 2x - y + 4 \Rightarrow 2x - y + 5 = 0 \\ 9 = -(2x - y + 4) \Rightarrow 9 = -2x + y - 4 \Rightarrow 2x - y + 13 \end{cases}$$

b)

Ambos conjuntos son rectas en el plano **z = 0**

2.B.- El plano **p ≡ 2x - 2y + z = - 2** determina un tetraedro con los tres planos coordenados. Se pide:

a) Calcular la longitud de la altura del tetraedro que parte del origen

b) Determinar las ecuaciones paramétricas de la recta que contiene a dicha altura.

c) Calcular el área de la cara del tetraedro que esta contenida en el plano **p**.

a) Calcularemos los puntos de corte **A, B** y **C** con los tres ejes coordenados que generan el plano **p.** Hallaremos la altura como la distancia del origen al plano generado

$$Con\ OX \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=0 \Rightarrow 2\lambda - 2.0 + 0 = -2 \Rightarrow 2\lambda = -2 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow A \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow A(-1\,,0\,,0) \\ z=0 \end{cases}$$

$$Con\ OY \equiv \begin{cases} x=0 \\ y=\mu \Rightarrow 2.0 - 2.\mu + 0 = -2 \Rightarrow -2\mu = -2 \Rightarrow \mu = 1 \Rightarrow B \begin{cases} x=0 \\ y=1 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow B(0\,,1\,,0) \\ z=0 \end{cases}$$

$$Con\ OZ \equiv \begin{cases} x=0 \\ y=0 \Rightarrow 2.0 - 2.0 + \alpha = -2 \Rightarrow \alpha = -2 \Rightarrow C \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=-2 \end{cases} \Rightarrow C(0\,,0\,,-2) \\ z=\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (0\,,1\,,0) - (-1\,,0\,,0) = (1\,,1\,,0) \\ \overrightarrow{AC} = (0\,,0\,,-2) - (-1\,,0\,,0) = (1\,,0\,,-2) \\ \overrightarrow{AG} = (x\,,y\,,z) - (-1\,,0\,,0) = (x+1\,,y\,,z) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2(x+1) - z + 2y = 0 \Rightarrow$$

$$\pi \equiv 2x - 2y + z + 2 = 0 \Rightarrow h = d_{O\pi} = \frac{|2.0 - 2.0 + 0 + 2|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{|2|}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}\,u$$

b) La recta pedida **r** pasa por el origen y tiene como vector director el del plano **p** que es perpendicular a él y paralelo a la recta.

$$\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{v_\pi} = (2\,,-2\,,1) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 0 + 2\beta = 2\beta \\ y = 0 - 2\beta = -2\beta \\ z = 0 + \beta = \beta \end{cases}$$

$c)$

$$A = \frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| \Rightarrow \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - \vec{k} + 2\vec{j} \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3 \Rightarrow$$

$$A = \frac{1}{2}\cdot 3 = \frac{3}{2}\,u^2$$

3.B.- Sea la función $f(x)=\dfrac{2x+1}{\left(x^2+x+1\right)^2}$

a) Hallar sus máximos y mínimos relativos y sus asíntotas

b) Dibujar la gráfica de la función, utilizando la información obtenida en el apartado anterior, teniendo en cuenta, además, que **f** tiene exactamente tres puntos de inflexión cuyas abscisas son: $x_1=\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$, $x_2=-\dfrac{1}{2}$, $x_3=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$, respectivamente.

c) Calculara el área del recinto limitado por la gráfica de la función **f**, del eje **OX**, la recta **x = 0**, y la recta **x = 2**

$a)$

$$f'(x)=\frac{2\left(x^2+x+1\right)^2-2\left(x^2+x+1\right)(2x+1)(2x+1)}{\left(x^2+x+1\right)^4}=\frac{2\left(x^2+x+1\right)-2(2x+1)^2}{\left(x^2+x+1\right)^3}\Rightarrow$$

$$f'(x)=\frac{2x^2+2x+2-8x^2-8x-2}{\left(x^2+x+1\right)^3}=\frac{-6x^2-6x}{\left(x^2+x+1\right)^3}=(-6)\frac{x^2+x}{\left(x^2+x+1\right)^3}=(-6)\frac{(x+1)x}{\left(x^2+x+1\right)^3}$$

$$x^2+x+1=0\Rightarrow\Delta=1-4=-3<0\Rightarrow\forall x\notin\Re\Rightarrow$$

$$Crecimiento\Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow(-6)\frac{(x+1)x}{\left(x^2+x+1\right)^3}>0\Rightarrow\begin{cases}-6<0\Rightarrow\forall x\in\Re\\ x>0\Rightarrow\forall x\in\Re/x>0\\ x+1>0\Rightarrow x>-1\Rightarrow\forall x\in\Re/x>-1\\ \left(x^2+x+1\right)^3\Rightarrow\forall x\notin\Re\end{cases}$$

	$-\infty$	**-1**	**0** ∞
- 6	**(-)**	**(-)**	**(-)**
x > - 1	**(-)**	**(+)**	**(+)**
x > 0	**(-)**	**(-)**	**(+)**
Valor	**(-)**	**(+)**	**(-)**

Crecimiento $\forall x\in\Re/-1<x<0$ **Decrecimiento** $\forall x\in\Re/(x<-1)\cup(x>0)$

Mínimo en x = -1 $\Rightarrow f(-1)=\dfrac{2(-1)+1}{\left[(-1)^2+(-1)+1\right]^2}=\dfrac{-1}{1}=-1$ **(De decrecimiento pasa a crecimiento)**

Máximo en x = 0 $\Rightarrow f(-1)=\dfrac{2.0+1}{\left[0^2+0+1\right]^2}=\dfrac{1}{1}=1$ **(De crecimiento pasa a decrecimiento)**

Continuación problema 3.B.-

a)Continuación

Asíntotas verticales

Como $x^2+x+1=0 \Rightarrow \Delta = 1-4=-3<0 \Rightarrow \forall x \notin \Re \Rightarrow$ *No hay asíntotas verticales*

Asíntotas horizontales

$$y=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{\left(x^2+x+1\right)^2}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x}{x^4}+\frac{1}{x^4}}{\left(\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^4}}{\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^2}=\frac{\frac{2}{\infty}+\frac{1}{\infty}}{\left(1+\frac{1}{\infty}+\frac{1}{\infty}\right)^2}$$

$$y=\frac{0+0}{(1+0+0)^2}=\frac{0}{1}=0 \Rightarrow \textit{Asíntota horizontal} \Rightarrow y=0 \Rightarrow x\to\infty$$

$$y=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+1}{\left(x^2+x+1\right)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2(-x)+1}{\left[(-x)^2+(-x)+1\right]^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x+1}{\left(x^2-x+1\right)^2}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{2x}{x^4}+\frac{1}{x^4}}{\left(\frac{x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)^2}$$

$$y=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^4}}{\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^2}=\frac{-\frac{2}{\infty}+\frac{1}{\infty}}{\left(1-\frac{1}{\infty}+\frac{1}{\infty}\right)^2}=\frac{-0+0}{(1-0+0)^2}=\frac{0}{1}=0\Rightarrow$$

Asíntota horizontal $\Rightarrow y=0 \Rightarrow x\to-\infty$

Asíntotas oblícuas

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x+1}{\left(x^2+x+1\right)^2}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+1}{x\left(x^2+x+1\right)^2}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x}{x^5}+\frac{1}{x^5}}{\frac{x}{x}\left(\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x^4}+\frac{1}{x^5}}{1.\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^2}$$

$$m=\frac{\frac{2}{\infty}+\frac{1}{\infty}}{1.\left(1+\frac{1}{\infty}+\frac{1}{\infty}\right)^2}=\frac{0+0}{1.(1+0+0)^2}=\frac{0}{1}=0\Rightarrow \textit{No hay asíntota oblicua cuando } x\to\infty$$

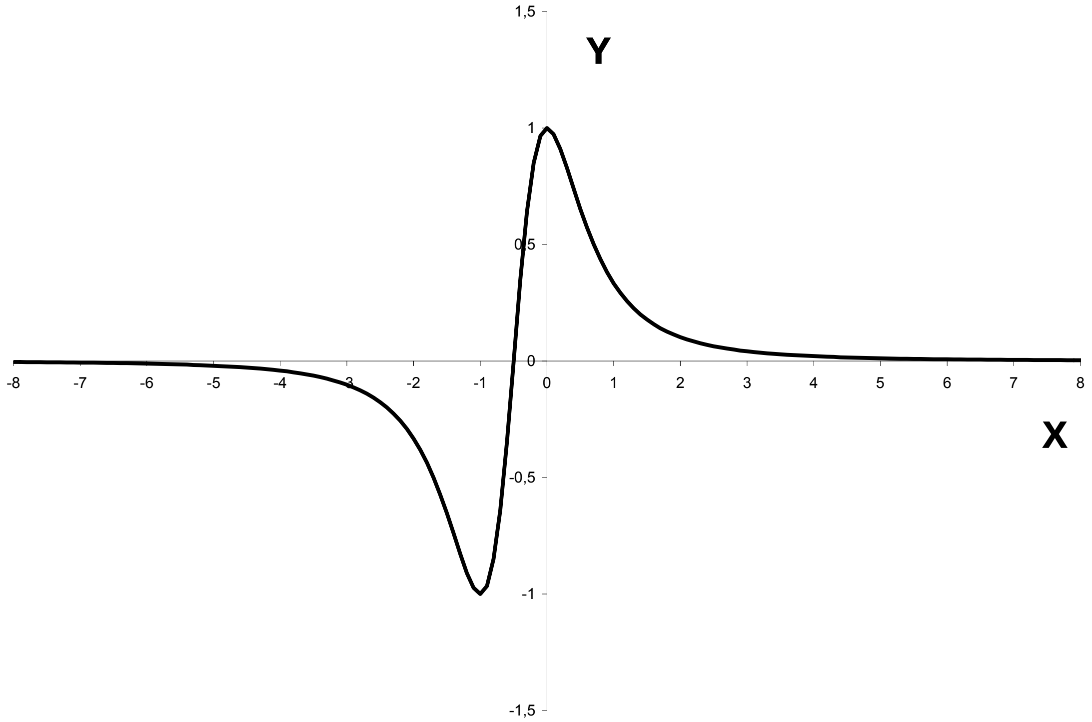
$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{2x+1}{\left(x^2+x+1\right)^2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2(-x)+1}{(-x)\left[(-x)^2+(-x)+1\right]^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x+1}{(-x)\left(x^2-x+1\right)^2}=\frac{\infty}{\infty}=$$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{2x}{x^5}+\frac{1}{x^5}}{-\frac{x}{x}\left(\frac{x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{2}{x^4}+\frac{1}{x^5}}{(-1).\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^2}\frac{-\frac{2}{\infty}+\frac{1}{\infty}}{(-1).\left(1-\frac{1}{\infty}+\frac{1}{\infty}\right)^2}=\frac{0+0}{(-1).(1+0+0)^2}=\frac{0}{-1}=0$$

$\Rightarrow$ *No hay asíntota oblicua cuando* $x\to-\infty$

Continuación del problema 3.B.-

b)



$c)$

$$A = \int_0^2 \frac{2x+1}{\left(x^2+x+1\right)^2}\,dx = \int_1^7 \frac{1}{t^2}\,dt = \int_1^7 t^{-2}\,dt = \frac{1}{(-1)} \cdot \left[t^{-1}\right]_1^7 = -\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{1}\right) = 1 - \frac{1}{7} = \frac{6}{7}\,u^2$$

$$x^2 + x + 1 = t \Rightarrow (2x+1)\,dx = dt \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \Rightarrow t = 2^2 + 2 + 1 = 7 \\ x = 0 \Rightarrow t = 0^2 + 0 + 1 = 1 \end{cases}$$

4.B.- a) Discutir según los valores del parámetro real **l** el sistema

$$\begin{cases} \lambda x + 3y + z = \lambda \\ x + \lambda y + \lambda z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

b) Resolver el sistema anterior en el caso **l = 2**

$a)$

$$\begin{cases} \lambda x + 3y + z = \lambda \\ x + \lambda y + \lambda z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 3 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\lambda^2 + 3\lambda + 1 - \lambda - \lambda^2 + 3 = -2\lambda^2 + 2\lambda + 4 \Rightarrow Si\ |A| = 0 \Rightarrow -2\lambda^2 + 2\lambda + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 + 8 = 9 > 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{1+3}{2} = 2 \\ \lambda_2 = \frac{1-3}{2} = -1 \end{cases}$$

$$\forall \lambda \in \Re - \{-1\ ,\ 2\} \Rightarrow rang(A) = 3 = Número\ de\ incognitas \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$$

$$Cuando\ \lambda = -1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow Sistema\ Compatible\ In\det er\min ado$$

$$Cuando\ \lambda = 2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 2 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow Sist.\ Comp.\ In\det er\min ado$$

$b)$

$$y + 3z = 0 \Rightarrow y = -3z \Rightarrow 2x + 3.(-3z) + z = 2 \Rightarrow 2x - 8z = 2 \Rightarrow 2x = 8z + 2 \Rightarrow x = 4z + 1$$

$$Solución(4\alpha + 1\ ,\ -3\alpha\ ,\ \alpha)$$