OPCIÓN A

Ejercicio 1.- Calificación máxima: 3 puntos

Dada la función: $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x^2+3x}{x-1} & si \quad x<0 \\ a & si \quad x=0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & si \quad x>0 \end{cases}$, se pide:

a) (1 punto). Determinar el valor de a para que **f** sea continua

b) (1 punto).Para ese valor de **a** estudiar la derivabilidad de **f**, en **x = 0**

b) (1 punto).Hallar, si las tiene, las asíntotas de la gráfica de **y = f(x)**

$a)$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\dfrac{2\cdot 0^2+3\cdot 0}{0-1}=\dfrac{0}{-1}=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=e^{-\frac{1}{0}}=e^{-\infty}=\dfrac{1}{e^{\infty}}=\dfrac{1}{\infty}=0 \end{cases} \Rightarrow a=\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=0$$

$b)$

$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{(4x+3)\cdot(x-1)-(2x^2+3x)}{(x-1)^2}=\dfrac{4x^2-4x+3x-3-2x^2-3x}{(x-1)^2}=\dfrac{2x^2-4x-3}{(x-1)^2} & si \quad x<0 \\ \dfrac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} & si \quad x>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=\dfrac{2\cdot 0^2-4\cdot 0-3}{(0-1)^2}=\dfrac{-3}{1}=-3 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0 \quad De\ (1) \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f'(x)=-3\neq \lim_{x\to 0^+} f(x)=0$$

$$(1)\ \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x^2}}{e^{\frac{1}{x}}}=\frac{\frac{1}{0^2}}{e^{\frac{1}{0}}}=\frac{\infty}{\infty}=\xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{-2x}{x^4}}{-\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{-2x}{x^4}}{-\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{2}{x}}{e^{\frac{1}{x}}}=\frac{\frac{2}{0}}{e^{\frac{1}{0}}}=\frac{\infty}{\infty}=$$

$$=\xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{-2}{x^2}}{-\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2}{e^{\frac{1}{x}}}=\frac{2}{e^{\frac{1}{0}}}=\frac{2}{\infty}=0$$

No es derivable en x = 0

Continuación del Ejercicio 1 de la Opción A

$c)$

Asíntotas verticales

$x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow x=1 \in (-\infty\ ,\ 0) \Rightarrow$ *No existe*

Asíntotas horizontales

$$y=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+3x}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\cdot(-x)^2+3\cdot(-x)}{(-x)-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x}{-x-1}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\frac{x^2}{x^2}-3\frac{x}{x^2}}{-\frac{x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x}}{-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}=$$

$$=\frac{2-\frac{3}{x}}{-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}=\frac{2-\frac{3}{\infty}}{-\frac{1}{\infty}-\frac{1}{\infty}}=\frac{2-0}{-0-0}=\frac{2}{0}=\infty \Rightarrow \textit{No existe asíntota horizontal cuando } x\to-\infty$$

$$y=\lim_{x\to\infty}e^{-\frac{1}{x}}=e^{-\frac{1}{\infty}}=e^0=1 \Rightarrow \textit{Existe asíntota horizontal}, y=1, \textit{ cuando } x\to\infty$$

Asíntotas oblicuas

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{2x^2+3x}{x-1}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+3x}{x^2-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\cdot(-x)^2+3\cdot(-x)}{(-x)^2-(-x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x}{x^2-x}=\frac{\infty}{\infty}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2\frac{x^2}{x^2}-3\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x}}{1-\frac{1}{x}}=\frac{2-\frac{3}{\infty}}{1-\frac{1}{\infty}}=\frac{2-0}{1-0}=2$$

$$n=\lim_{x\to-\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^2+3x}{x-1}-2\cdot x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+3x-2x^2+2}{x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x+2}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{3\cdot(-x)+2}{(-x)-1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-3x+2}{-x-1}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{-3\frac{x}{x}+\frac{2}{x}}{-\frac{x}{x}-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-3+\frac{2}{x}}{-1-\frac{1}{x}}=\frac{-3+\frac{2}{\infty}}{-1-\frac{1}{\infty}}=\frac{-3+0}{-1-0}=3$$

Existe asíntota oblicua, $y=2x+3$, *cuando* $x\to-\infty$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}=\frac{e^{-\frac{1}{\infty}}}{\infty}=\frac{e^0}{\infty}=\frac{1}{\infty}=0 \Rightarrow \textit{No existe asíntota oblicua cuando } x\to\infty$$

Ejercicio 2.- Calificación máxima: 3 puntos

Dado el sistema $\begin{cases} x+2y+(m+3)z=3 \\ x+y+(4+m-m^2)z=3 \\ 2x+4y+3(m+2)z=8 \end{cases}$ se pide:

a) (2 puntos) Discutirlo el según los valores del parámetro **m**
b) (1 punto). Resolverlo para **m = 2**

$a)$

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & m+3\\ 1 & 1 & 4+m-m^2\\ 2 & 4 & 3m+6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2 & m+3\\ 0 & -1 & 1-m^2\\ 0 & 0 & m\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}-1 & 1-m^2\\ 0 & m\end{vmatrix}=-m \Rightarrow Si\ |A|=0 \Rightarrow -m=0 \Rightarrow m=0 \Rightarrow$$

$$\forall x \in \Re-\{0\} \Rightarrow |A|\neq 0 \Rightarrow rang(A)=3=Número\ de\ incógnitas \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$$

$Si\ m=0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 3\\ 1 & 1 & 4 & 3\\ 2 & 4 & 6 & 8\end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 3\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -2\end{array}\right)\Rightarrow 0z=-2 \Rightarrow z=-\frac{2}{0} \Rightarrow Sin\ solución \Rightarrow Sistema\ Incompatible$$

$b)$

$Si\ m=2 \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 5 & 3\\ 1 & 1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 12 & 8\end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 5 & 3\\ 0 & -1 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 2\end{array}\right)\Rightarrow 2z=2 \Rightarrow z=1 \Rightarrow -y-3\cdot 1=0 \Rightarrow y=-3 \Rightarrow x+2\cdot(-3)+5\cdot 1=3$$

$$\Rightarrow x-6+5=3 \Rightarrow x=4 \Rightarrow Solución \Rightarrow (x\ ,\ y\ ,\ z)=(4\ ,\ -3\ ,\ 1)$$

Ejercicio 3.- Calificación máxima: 2 puntos

a) (1 punto). Hallar el punto de corte del plano $\pi_1 \equiv 6x - y + 3z = -2$ y la recta **r** que pasa por el punto **P(1 , 2 , 0)** y es perpendicular al plano $\pi_2 \equiv 2x + 3y - z = 8$

b) (1 punto). Hallar el punto común de los tres planos $\pi_3 , \pi_4 \; y \; \pi_5$ siguientes:

$\pi_3 \equiv 5x + 2y + 7z = 4$, $\pi_4 \equiv x + 2y - 3z = 10 \; y \; \pi_5$ el plano definido por las rectas

$$r_1 \equiv \frac{x+3}{2} = \frac{y+3}{3} = z + 3 \quad y \quad r_2 \equiv x + 2 = y = \frac{z+7}{2}$$

a) El vector del plano π_2 es el de la recta **r** que queda definida, además, por el punto **P.**
Después de hallar su ecuación parámetrica, hallaremos la intersección de los puntos que la definen con el plano π_1 y de esa forma hallaremos el punto **Q** pedido

$$\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{v_{\pi_2}} = (2\,,3\,,-1) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + 3\lambda \\ z = -\lambda \end{cases} \Rightarrow 6\,(1+2\lambda) - (2+3\lambda) + 3(-\lambda) = -2 \Rightarrow$$

$$6 + 12\lambda - 2 - 3\lambda - 3\lambda = -2 \Rightarrow 6\lambda + 4 = -2 \Rightarrow 6\lambda = -6 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow Q\begin{cases} x = 1 + 2\cdot(-1) \\ y = 2 + 3\cdot(-1) \\ z = -(-1) \end{cases} \Rightarrow Q(-1\,,-1\,,1)$$

b) Para hallar el plano π_5 , analizaremos, inicialmente si las rectas **r₁** y **r₂** se cortan en un punto o son paralelas, en este ultimo caso los vectores directores son iguales o proporcionales, de no serlo se cortarán en un punto **P** que hallaremos

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_{r_1}} = (2\,,3\,,1) \\ \overrightarrow{v_{r_2}} = (1\,,1\,,2) \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{1} \neq \frac{3}{1} \Rightarrow No\ son\ paralelas$$

$$\begin{cases} r_1 \equiv \begin{cases} x = -3 + 2\lambda \\ y = -3 + 3\lambda \\ z = -3 + \lambda \end{cases} \\ r_2 \equiv \begin{cases} x = -2 + \mu \\ y = \mu \\ z = -7 + 2\mu \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3 + 2\lambda = -2 + \mu \\ -3 + 3\lambda = \mu \\ -3 + \lambda = -7 + 2\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda - \mu = 1 \\ 3\lambda - \mu = 3 \\ \lambda - 2\mu = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2\lambda + \mu = -1 \\ 3\lambda - \mu = 3 \end{cases} \Rightarrow \lambda = 2 \Rightarrow 2\cdot 2 - \mu = 1 \Rightarrow$$

$$\mu = 3 \Rightarrow 2 - 2\cdot 3 = -4 \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado \Rightarrow P\begin{cases} x = -3 + 2\cdot 2 \\ y = -3 + 3\cdot 2 \\ z = -3 + 2 \end{cases} \Rightarrow P(1\,,3\,,-1)$$

Conocido el punto **P**, los vectores directores de las dos rectas r_1 y r_2 y el vector **PG**, siendo **G** el punto genérico del plano, pertenecerán al mismo plano.
Como estos tres vectores son coplanarios (pertenecen al mismo plano) y el vector **PG** es combinación lineal de los otros dos, por eso el determinante de la matriz formada por ellos es nulo y la ecuación pedida del plano π_5

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_{r_1}} = (2\,,3\,,1) \\ \overrightarrow{v_{r_2}} = (1\,,1\,,2) \\ \overrightarrow{PG} = (x\,,y\,,z) - (1\,,3\,,-1) = (x-1\,,y-3\,,z+1) \end{cases} \Rightarrow \pi_5 \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z+1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$6\,(x-1) + (y-3) + 2\,(z+1) - 3\,(z+1) - (x-1) - 4\,(y-3) = 0 \Rightarrow 5\,(x-1) - 3\,(y-3) - (z+1) = 0$$

$$\pi_5 \equiv 5x - 3y - z + 3 = 0$$

Continuación del Ejercicio 3 de la Opción A
b) Continuación
Para hallar el punto **R** común de los planos $\pi_3, \pi_4\ y\ \pi_5$ hallaremos la solución **del sistema de** ecuaciones que forman y que tiene que ser compatible determinado

$$\begin{cases} \pi_3 \equiv 5x+2y+7z=4 \\ \pi_4 \equiv x+2y-3z=10 \\ \pi_5 \equiv 5x-3y-z=-3 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 10 \\ 5 & 2 & 7 & 4 \\ 5 & -3 & -1 & -3 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 10 \\ 0 & -8 & 22 & -46 \\ 0 & -13 & 14 & -53 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 10 \\ 0 & 4 & -11 & 23 \\ 0 & -52 & 56 & -212 \end{array}\right)$$

$$\equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 10 \\ 0 & 4 & -11 & 23 \\ 0 & 0 & -87 & 87 \end{array}\right) \Rightarrow -87z=87 \Rightarrow z=-\frac{87}{87}=-1 \Rightarrow 4y-11\cdot(-1)=23 \Rightarrow 4y+11=23 \Rightarrow 4y=12 \Rightarrow$$

$$y=\frac{12}{4}=3 \Rightarrow x+2\cdot 3-3\cdot(-1)=10 \Rightarrow x+6+3=10 \Rightarrow x=1 \Rightarrow R(1\,,3\,,-1)$$

Ejercicio 4.- Calificación máxima: 2 puntos

Dados el plano $\pi \equiv x-y+2z=1$ y la recta $r \equiv \frac{x}{-6}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{2}$, se pide
a) (1 punto) Determinar la posición relativa entre el plano π y la recta **r**
b) (1 punto) Determinar el plano que contiene a **r** y pase por **P(1 ,1 , 1)**

a) El plano y la recta pueden ser paralelos o cortarse en un punto, si son paralelos su vectores directores son perpendiculares y su producto escalar nulo, en este caso estudiaremos si un punto R cualquiera de r pertenece al plano porque entonces la recta estará contenida en el plano, de no ser nulo el producto escalar la recta y el plano se cortan en un punto

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_\pi}=(1\,,-1\,,2) \\ \overrightarrow{v_r}=(-6\,,1\,,2) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi}\cdot\overrightarrow{v_r}=(1\,,-1\,,2)\cdot(-6\,,1\,,2)=-6-1+4=-3\neq 0$$

La recta **r** y el plano π se cortan en un punto
b)
Es un plano que perteneciendo al haz de planos que determina la recta r contiene a P.
Para hallar el haz de planos pondremos a la recta **r** como intersección de dos planos

$$r \equiv \begin{cases} x=-6y-6 \Rightarrow x+6y+6=0 \\ 2x=-6z \Rightarrow 2x+6z=0 \end{cases} \Rightarrow Haz\ de\ planos \Rightarrow x+6y+6+\lambda\cdot(2x+6z)=0 \Rightarrow$$

$$Si\ contiene\ a\ P \Rightarrow 1+6\cdot 1+6+\lambda\cdot(2\cdot 1+6\cdot 1)=0 \Rightarrow 13+8\lambda=0 \Rightarrow 8\lambda=-13 \Rightarrow \lambda=-\frac{13}{8}$$

$$Plano\ buscado \Rightarrow x+6y+6-\frac{13}{8}\cdot(2x+6z)=0 \Rightarrow 8x+48y+48-26x-78z=0 \Rightarrow$$

$$-18x+48y-78z+48=0 \Rightarrow \alpha \equiv 3x-8y+13z-8=0$$

OPCIÓN B

Ejercicio 1.- Calificación máxima: 3 puntos

a) (1 punto). Hallar, si existe, el punto de corte de las rectas $r_1 \equiv \begin{cases} x-y=2 \\ x+y+z=3 \end{cases}$ y $r_2 \equiv \begin{cases} x=-1+2\lambda \\ y=2+\lambda \\ z=-\lambda \end{cases}$

b) (1 punto). Determinar el valor de α para que los planos $\pi_1 \equiv x+2y+z=3$, $\pi_2 \equiv 2x+3y-z=5$, $\pi_3 \equiv 2x+2y+4z=3$ y $\pi_4 \equiv x+3y=\alpha$ tengan un único punto en común

c) (1 punto). Hallar la recta paralela a los planos $\pi_5 \equiv 2x+5y-z=2$ y $\pi_6 \equiv 6x-y+z=8$ que pasa por el punto **P(1 , 5 , -3)**

a) Analizaremos si las rectas tienen un punto común, de tenerlo estudiaremos si los vectores directores son iguales o proporcionales, si este caso se da, las rectas son coincidentes, de no darse este último supuesto las rectas se cortan en un punto, son secantes.
Si no tienen punto común, y hay igualdad o proporcionalidad entre los vectores directores las rectas son paralelas, de no haberlo las rectas se cruzan en el espacio

$$\begin{cases} x=2+y \Rightarrow 2+y+y+z=3 \Rightarrow z=1-2y \Rightarrow r_2 \equiv \begin{cases} x=2+\mu \\ y=\mu \\ z=1-2\mu \end{cases} \\ r_2 \equiv \begin{cases} x=-1+2\lambda \\ y=2+\lambda \\ z=-\lambda \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1+2\lambda=2+\mu \\ 2+\lambda=\mu \\ -\lambda=1-2\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda-\mu=3 \\ \lambda-\mu=-2 \\ \lambda-2\mu=-1 \end{cases}$$

Como el sistema formado tiene que ser compatible determinado el determinante de los coeficientes ampliado tiene que ser nulo

$$|A/B| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 2+2-6+3-8-1=-7 \neq 0 \Rightarrow No\ tienen\ punto\ en\ común$$

b) El determinante formado por los cuatro planos tiene que ser nulo, ya que uno de ellos debe de ser combinación lineal de los otros

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 5 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & \alpha \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & \alpha-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & \alpha-4 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)\begin{vmatrix} 8 & -1 \\ -4 & \alpha-4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$-[8(\alpha-4)-4]=0 \Rightarrow 8\alpha-32-4=0 \Rightarrow 8\alpha-36=0 \Rightarrow 8\alpha=36 \Rightarrow \alpha=\frac{36}{8}=\frac{9}{2}$$

Continuación de la Ejercicio 1 de la Opción B

c) Analizaremos, inicialmente, si los planos son paralelos estudiando si sus vectores directores son iguales o proporcionales. De serlo la recta **r** pedida se hallara teniendo en cuenta que su vector director es paralelos a los de los planos, que son iguales, y el producto escalar de estos con el de la recta buscada es nulo

De no ser iguales o proporcionales el vector director de la recta **r** es perpendicular a los vectores directores de los planos que determinan, en su corte, una recta paralela a la buscada y cuyo vector director es el producto vectorial de los vectores directores de los planos dados

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_{\pi_1}} = (2\,,5\,,-1) \\ \overrightarrow{v_{\pi_2}} = (6\,,-1\,,1) \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{6} \neq \frac{5}{-1} \Rightarrow No\ son\ paralelos\ ni\ coincidentes \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{v_{\pi_1}} \times \overrightarrow{v_{\pi_2}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 5 & -1 \\ 6 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 5\vec{i} - 6\vec{j} - 2\vec{k} - 30\vec{k} - \vec{i} - 2\vec{j} = 4\vec{i} - 8\vec{j} - 32\vec{k} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{v_r} = (4\,,-8\,,-32) \equiv (-1\,,2\,,8) \Rightarrow r \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z+3}{8}$$

Ejercicio 2.- Calificación máxima: 3 puntos

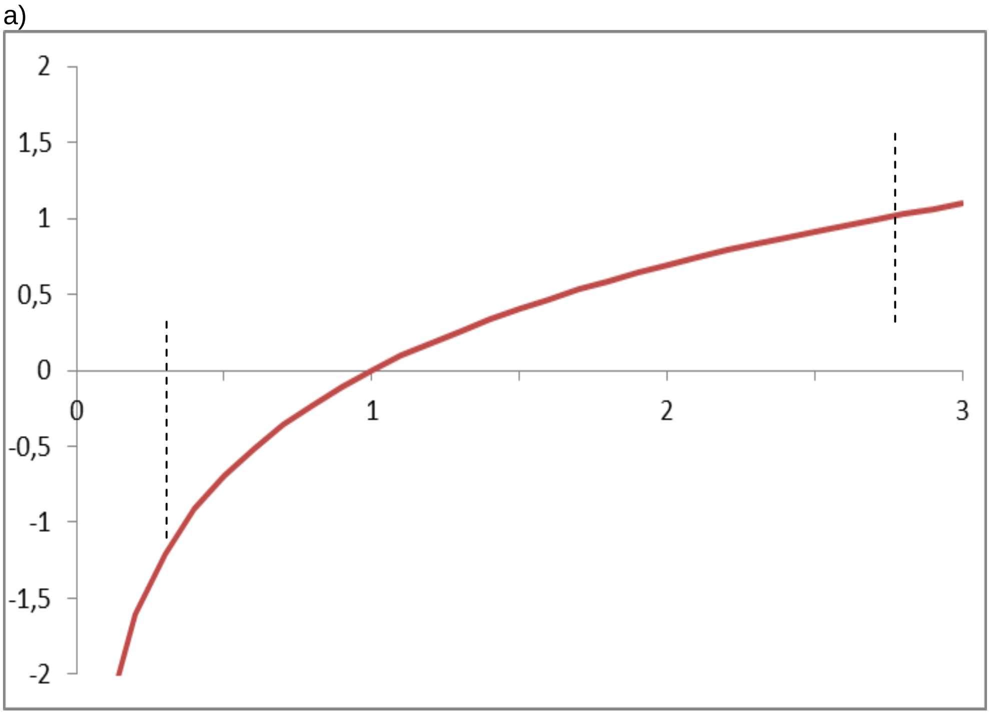
a)(0'5 puntos).Representar gráficamente el recinto limitado por la gráfica de la función

f(x) = ln x y el eje **OX** entre las abcisas $x = \frac{1}{e}$, **x = e**

b) (1'25 puntos). Calcular el área de dicho recinto.

c) (1'25 puntos).Calcular el volumen del sólido de revolución obtenido al girar dicho recinto alrededor del eje **OX**

a)



Continuación del Ejercicio 2 de la Opción B

$b)$

$$I=\int \ln x\,dx = x\ln x-\int x\,\frac{dx}{x}=x\ln x-\int dx = x\ln x - x = x\left(\ln x-1\right)+K$$

$$Por\ \ partes \Rightarrow \begin{cases} \ln x = u \Rightarrow du=\dfrac{dx}{x} \\ dx = dv \Rightarrow v=\int dx = x \end{cases}$$

$$A=\left|\int_{\frac{1}{e}}^{1}\ln x\,dx\right|+\int_{1}^{e}\ln x\,dx=-\int_{\frac{1}{e}}^{1}\ln x\,dx+\left[x\left(\ln x-1\right)\right]_1^e=-\left[x\left(\ln x-1\right)\right]_{\frac{1}{e}}^{1}+\left[e\left(\ln e-1\right)-1\cdot\left(\ln 1-1\right)\right]$$

$$A=-\left[1\left(\ln 1-1\right)-\frac{1}{e}\cdot\left(\ln\frac{1}{e}-1\right)\right]+\left[e\left(1-1\right)-1\cdot\left(0-1\right)\right]=-\left[1\left(0-1\right)-\frac{1}{e}\cdot\left(\ln e^{-1}-1\right)\right]+\left[e\cdot 0-1\cdot\left(-1\right)\right]$$

$$A=-\left[1\left(-1\right)-\frac{1}{e}\cdot\left(\left(-1\right)\ln e-1\right)\right]+\left[e\cdot 0-1\cdot\left(-1\right)\right]=-\left[\left(-1\right)-\frac{1}{e}\cdot\left(\left(-1\right)\cdot 1-1\right)\right]+1$$

$$A=1+\frac{1}{e}\cdot\left(-2\right)+1=2-\frac{2}{e}=\frac{2}{e}\cdot\left(e-1\right)u^2$$

$b)$

$$I=\int \ln^2 x\,dx = x\ln x\left(\ln x-1\right)-\int x\left(\ln x-1\right)\frac{dx}{x}=x\ln x\left(\ln x-1\right)-\int \ln x\,dx+\int dx$$

$$Por\ \ partes \Rightarrow \begin{cases} \ln x = u \Rightarrow du=\dfrac{dx}{x} \\ \ln x\,dx = dv \Rightarrow v=\int \ln x\,dx = x\left(\ln x-1\right) \end{cases}$$

$$I=x\ln x\left(\ln x-1\right)-x\left(\ln x-1\right)+x=x\ln^2 x-x\ln x-x\ln x+2x=x\left(\ln^2 x-2\ln x+2\right)+K$$

$$V=\pi\int_{\frac{1}{e}}^{1}\ln^2\,dx+\pi\int_{1}^{e}\ln^2 x\,dx=\pi\int_{\frac{1}{e}}^{e}\ln^2 x\,dx=\pi\left[x\left(\ln^2 x-2\ln x+2\right)\right]_{e^{-1}}^{e}=$$

$$V=\pi\left[e\left(\ln^2 e-2\ln e+2\right)-\frac{1}{e}\left(\ln^2 e^{-1}-2\ln e^{-1}+2\right)\right]=\pi\left[e\left(1^2-2+2\right)-\frac{1}{e}\left(\left\{\left(-1\right)\ln e\right\}^2-2\left(-1\right)\ln e+2\right)\right]$$

$$V=\pi\left[e-\frac{1}{e}\left(\left\{\left(-1\right)\cdot 1\right\}^2-2\left(-1\right)\cdot 1+2\right)\right]=\pi\left[e-\frac{1}{e}\left(\left\{-1\right\}^2+2+2\right)\right]=\pi\left(e-\frac{5}{e}\right)=\pi\left(\frac{e^2-5}{e}\right)u^2$$

Ejercicio 3.- Calificación máxima: 2 puntos

a) (1 punto) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ obtener las relaciones que deben de cumplir **x**, **y**, **z**, **t** para que la matriz **X** verifique **AX = XA**

b) (0'5 puntos). Dar un ejemplo de matriz **X** distinta de la matriz nula y de la matriz identidad que cumpla la igualdad anterior

c) (0'5 puntos). Calcular la inversa de la matriz **A**

$a)$

$$\left\{\begin{array}{l} AX = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2z & y+2t \\ 2x+z & 2y+t \end{pmatrix} \\ AX = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y & 2x+y \\ z+2t & 2z+t \end{pmatrix} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x+2z = x+2y \Rightarrow 2z = 2y \Rightarrow z = y \\ y+2t = 2x+y \Rightarrow 2x = 2t \Rightarrow x = t \\ 2x+z = z+2t \Rightarrow 2x = 2t \Rightarrow x = t \\ 2y+t = 2z+t \Rightarrow 2z = 2y \Rightarrow z = y \end{array}\right. \Rightarrow X = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix}$$

$b)$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$c)$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1-4 = -3 \neq 0 \Rightarrow Existe\ A^{-1} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \left(adj\ A^t\right) \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow adj\ A^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{(-3)} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4.- Calificación máxima: 2 puntos
Dada las matrices cuadradas A y B se sabe

1ue:que $A+B=\begin{pmatrix}2&1&0\\2&0&0\\-1&0&2\end{pmatrix}$, $A^2-AB+BA-B^2=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&2&0\\2&-1&0\end{pmatrix}$

a) (1 punto) Calcular la matriz **A – B**
b) (1 punto) Calcular las matrices **A** y **B**

$a)$

$$A^2-AB+BA-B^2=A(A-B)+B(A-B)=(A+B)\cdot(A-B)\Rightarrow(A+B)\cdot(A-B)=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&2&0\\2&-1&0\end{pmatrix}$$

$$(A+B)^{-1}(A+B)\cdot(A-B)=(A+B)^{-1}\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&2&0\\2&-1&0\end{pmatrix}\Rightarrow I(A-B)=(A+B)^{-1}\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&2&0\\2&-1&0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$(A-B)=(A+B)^{-1}\cdot\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&2&0\\2&-1&0\end{pmatrix}$$

$$\left|(A+B)^{-1}\right|=\begin{vmatrix}2&1&0\\2&0&0\\-1&0&2\end{vmatrix}=-4\neq0\Rightarrow\exists(A+B)^{-1}\Rightarrow(A+B)^{-1}=\frac{1}{\left|(A+B)^{-1}\right|}\cdot\left[adj\ (A+B)^t\right]\Rightarrow$$

$$(A+B)^t=\begin{pmatrix}2&2&-1\\1&0&0\\0&0&2\end{pmatrix}\Rightarrow adj\ (A+B)^t=\begin{pmatrix}0&-2&0\\-4&4&0\\0&-1&-2\end{pmatrix}\Rightarrow(A+B)^{-1}=\frac{1}{(-4)}\cdot\begin{pmatrix}0&-2&0\\-4&4&0\\0&-1&-2\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$(A-B)=\frac{1}{(-4)}\cdot\begin{pmatrix}0&-2&0\\-4&4&0\\0&-1&-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&2&0\\2&-1&0\end{pmatrix}=\frac{1}{(-4)}\cdot\begin{pmatrix}0&-4&0\\8&8&0\\-4&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\-2&-2&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$b)$

$$\begin{cases}A+B=\begin{pmatrix}2&1&0\\2&0&0\\-1&0&2\end{pmatrix}\\ A-B=\begin{pmatrix}0&1&0\\-2&-2&0\\1&0&0\end{pmatrix}\end{cases}\Rightarrow 2A=\begin{pmatrix}2&1&0\\2&0&0\\-1&0&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&0\\-2&-2&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2&0\\0&-2&0\\0&0&2\end{pmatrix}\Rightarrow A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&2&0\\0&-2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow B=A-\begin{pmatrix}0&1&0\\-2&-2&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&1&0\\-2&-2&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$$