

11.1. Modelo 2010 - Opción A

Problema 11.1.1 (3 puntos) Dada la función:

$$f(x) = e^x + a e^{-x},$$

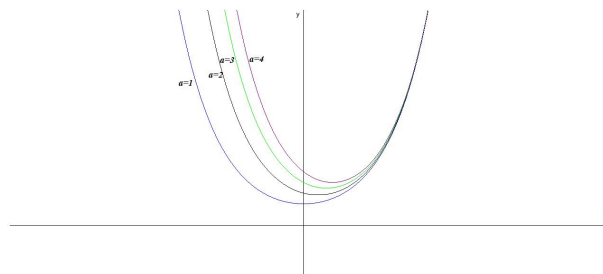
siendo a un número real, estudiar los siguientes apartados en función de a :

- (1,5 puntos) Hallar los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f .
- (1 punto) Estudiar para que valor, o valores, de a la función f tiene alguna asíntota horizontal.
- (0,5 puntos) Para $a \geq 0$, hallar el área de la región acotada comprendida entre la gráfica de f , el eje OX y las rectas $x = 0$, $x = 2$.

Solución:

$$1. f'(x) = e^x - a e^{-x} = 0 \implies x = \frac{\ln a}{2}$$

- Si $a > 0$:

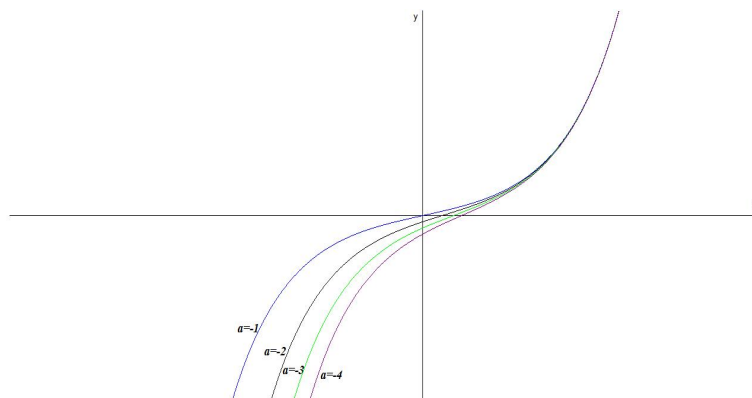


	$(-\infty, \ln a/2)$	$(\ln a, \infty)$
$f'(x)$	-	+
$f(x)$	Decreciente	Creciente

La función es decreciente en el intervalo $(-\infty, \ln a/2)$ y creciente en el $(\ln a/2, \infty)$.

La función tiene un mínimo en el punto $\left(\frac{\ln a}{2}, 2\sqrt{a}\right)$

- Si $a \leq 0 \implies \ln a$ no existe, luego no hay extremos. Por otro lado $f'(x) > 0, \forall x \in R \implies$ la función es siempre creciente.



$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{2x} - a}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2e^{2x}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 2e^x = \infty$$

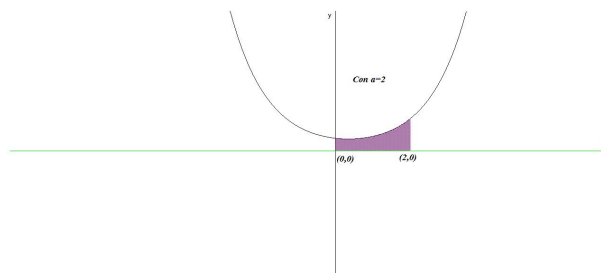
En este caso no hay asíntotas horizontales sea cual sea el valor de a .
 Cuando $x \rightarrow -\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x} - a}{e^x} = \left[\frac{\infty}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{-x} + a e^x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + a e^{2x}}{e^x} = \infty \text{ si } a \neq 0$$

Es decir, no hay asíntotas horizontales en este caso siempre que $a \neq 0$.

Si $a = 0 \implies \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + a e^{2x}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0$. En este caso hay una asíntota horizontal en $y = 0$.

2. Con $a > 0$:



$$S = \int_0^2 (e^x + a e^{-x}) dx = e^x - a e^{-x} \Big|_0^2 = a(1 - e^{-2}) + e^2 - 1$$

Problema 11.1.2 (3 puntos) Se consideran las rectas:

$$r \equiv \frac{x}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-2}$$

$$s \equiv \frac{x-5}{6} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{2}$$

- (1,5 puntos) Determinar la ecuación de la recta t que corta a r y s , y que contiene al origen de coordenadas.
- (1,5 puntos) Determinar la mínima distancia entre las rectas r y s .

Solución:

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (-1, 1, -2) \\ P_r(0, 1, 2) \end{cases} \quad s : \begin{cases} \vec{u}_s = (6, 2, 2) = 2(3, 1, 1) \\ P_s(5, 0, -1) \end{cases}$$

1.

$$\pi_1 : \begin{cases} \vec{u}_r = (-1, 1, -2) \\ \vec{OP}_r = (0, 1, 2) \\ O(0, 0, 0) \end{cases} \implies \begin{vmatrix} -1 & 0 & x \\ 1 & 1 & y \\ -2 & 2 & z \end{vmatrix} = 0 \implies 4x + 2y - z = 0$$

$$\pi_2 : \begin{cases} \vec{u}_s = (3, 1, 1) \\ \vec{OP}_s = (5, 0, -1) \\ O(0, 0, 0) \end{cases} \implies \begin{vmatrix} 3 & 5 & x \\ 1 & 0 & y \\ 1 & -1 & z \end{vmatrix} = 0 \implies -x + 8y - 5z = 0$$

$$t : \begin{cases} 4x + 2y - z = 0 \\ x - 8y + 5z = 0 \end{cases}$$

2. $\vec{P_r P_s} = (5, -1, -3)$

$$|[\vec{u}_r, \vec{u}_s, \vec{P_r P_s}]| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 6 & 2 & 2 \\ 5 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 64 \implies \text{se cruzan}$$

$$|\vec{u}_r \times \vec{u}_s| = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & -2 \\ 6 & 2 & 2 \end{vmatrix} = |(6, -10, -8)| = 2|(3, -5, -4)| = 10\sqrt{2}$$

$$d(r, s) = \frac{|[\vec{u}_r, \vec{u}_s, \vec{P_r P_s}]|}{|\vec{u}_r \times \vec{u}_s|} = \frac{64}{10\sqrt{2}} = \frac{16\sqrt{2}}{5} u$$

Problema 11.1.3 (2 puntos) Obtener, para todo número natural n , el valor de:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^n$$

Solución:

Si $n = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Si $n = 2$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Si $n = 3$

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Si $n = n$

$$\begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2^{n-1} & -2^{n-1} \\ -2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

Problema 11.1.4 (2 puntos) Discutir razonadamente, en función del parámetro k , el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + ky + z = k + 2 \\ kx + y + z = k \\ x + y + kz = -2(k + 1) \end{cases}$$

Solución:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1 & k+2 \\ k & 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & k & -2(k+1) \end{array} \right) \quad |A| = -k^3 + 3k - 2 = 0 \implies k = 1 \quad k = -2$$

■ Si $k \neq 1$ y $k \neq -2 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = \text{Rango}(\bar{A}) = 3 = n^\circ$ de incógnitas, luego en este caso el sistema será compatible determinado.

■ Si $k = 1$

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \end{array} \right) \implies \begin{cases} \text{Rango}(\bar{A}) = 3 \\ \text{Rango}(A) = 2 \end{cases} \implies$$

Sistema es Incompatible.

- Si $k = -2$

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \end{array} \right)$$

Tenemos:

$$F_3 = -(F_1 + F_2) \implies \begin{cases} \text{Rango}(\bar{A}) = 2 \\ \text{Rango}(A) = 2 \end{cases} \implies$$

Sistema Compatible Indeterminado.

11.2. Modelo 2010 - Opción B

Problema 11.2.1 (3 puntos) Dada la función:

$$f(x) = x^3 - x$$

Se pide:

- (1 punto) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(-1, f(-1))$.
- (1 punto) Determinar los puntos de intersección de la recta hallada en el apartado anterior con la gráfica de f .
- (1 punto) Calcular el área de la región acotada que está comprendida entre la gráfica de f y la recta obtenida en el apartado anterior.

Solución:

- $f(-1) = 0$. El punto de tangencia es el $(-1, 0)$. $f'(x) = 3x^2 - 1 \implies m = f'(-1) = 2$. Luego la recta tangente es:

$$y = 2(x + 1) \implies 2x - y + 2 = 0$$

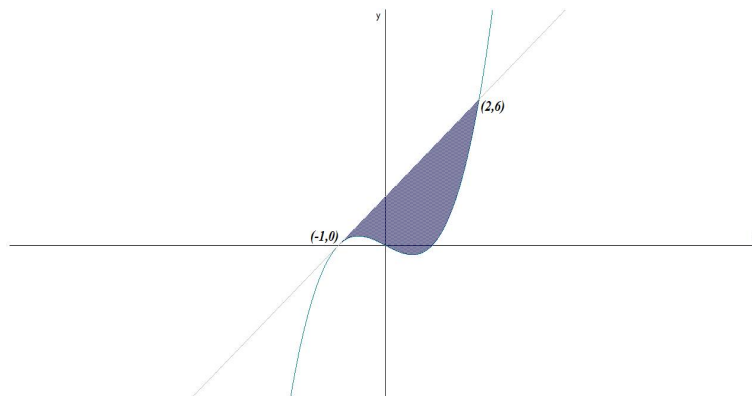
- Para encontrar los puntos de intersección lo hacemos por igualación:

$$x^3 - x = 2x + 2 \implies x = -1, \quad x = 2$$

Los puntos de intersección son: $(-1, 0)$ y $(2, 6)$.

-

$$S = \int_{-1}^2 (2x+2-x^3+x) dx = \int_{-1}^2 (-x^3+3x+2) dx = \left. -\frac{x^4}{4} + 3\frac{x^2}{2} + 2x \right|_{-1}^2 = \frac{27}{4} u^2$$



Problema 11.2.2 (3 puntos) Dado el sistema:

$$\begin{cases} x + z = 2 \\ x + \lambda y - z = 4 \\ -\lambda x - y - z = -5 \end{cases}$$

1. (1 punto) Discutirlo para los distintos valores del parámetro λ
2. (1 punto) Resolverlo cuando el sistema sea compatible indeterminado.
3. (1 punto) Resolverlo para $\lambda = -2$.

Solución:

1.

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & \lambda & -1 & 4 \\ -\lambda & -1 & -1 & -5 \end{array} \right) \quad |A| = \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \implies \lambda = -1 \quad \lambda = 2$$

■ Si $\lambda \neq -1$ y $\lambda \neq 2 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = \text{Rango}(\bar{A}) = 3 = n^\circ$ de incógnitas, luego en este caso el sistema será compatible determinado.

■ Si $\lambda = -1$

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & -5 \end{array} \right) \implies \begin{cases} \text{Rango}(\bar{A}) = 3 \\ \text{Rango}(A) = 2 \end{cases} \implies$$

Sistema es Incompatible.

- Si $\lambda = 2$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ -2 & -1 & -1 & -5 \end{array} \right) \implies \begin{cases} \text{Rango}(\overline{A}) = 2 \\ \text{Rango}(A) = 2 \end{cases} \implies$$

Sistema Compatible Indeterminado.

2. El sistema es compatible indeterminado cuando $\lambda = 2$:

$$\begin{cases} x+ & z = 2 \\ x+ & 2y- & z = 4 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

- 3.

$$\begin{cases} x+ & z = 2 \\ x- & 2y- & z = 4 \\ 2x- & y- & z = -5 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -3 \\ y = -6 \\ z = 5 \end{cases}$$

Problema 11.2.3 (2 puntos) Dados los puntos $A(2, 2, 3)$ y $B(0, -2, 1)$, hallar el punto, o los puntos, de la recta:

$$r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z-4}{2}$$

que equidistan de A y de B .

Solución:

$$r : \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 4 + 2\lambda \end{cases}$$

$$\overline{AP} = (3\lambda, -2 - \lambda, 1 + 2\lambda), \quad \overline{BP} = (2 - 3\lambda, 2 - \lambda, 3 + 2\lambda)$$

$$|\overline{AP}| = |\overline{BP}| \implies$$

$$\sqrt{(3\lambda)^2 + (-2 - \lambda)^2 + (1 + 2\lambda)^2} = \sqrt{(2 - 3\lambda)^2 + (2 - \lambda)^2 + (3 + 2\lambda)^2} \implies$$

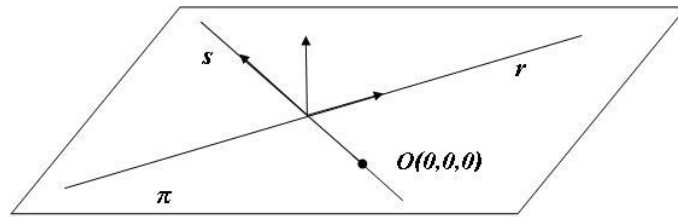
$$\lambda = 1 \implies (5, -1, 6)$$

Problema 11.2.4 (2 puntos) Dados el plano $\pi \equiv 5x - 4y + z = 0$ y la recta:

$$r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$$

contenida en π , obtener la recta s contenida en π que es perpendicular a r , y que pasa por el origen de coordenada $O(0, 0, 0)$.

Solución:



$$s : \begin{cases} \vec{u}_s = \vec{u}_\pi \times \vec{u}_r = (1, 1, -1) \\ O(0, 0, 0) \end{cases}$$

$$\vec{u}_s = \vec{u}_\pi \times \vec{u}_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -14(1, 1, -1)$$

$$s : \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$$