MODELO 2007- 08

OPCIÓN A

1.A.- Se considera la función $f(x)=\dfrac{x}{e^x}$

a) Hallar sus asíntotas y sus extremos locales
b) Calcular los puntos de inflexión de **f(x)** y dibujar su gráfica

$a)$

Asíntotas verticales

$e^x > 0 \Rightarrow \forall x \in \Re \Rightarrow$ *No existen asíntotas verticales*

Asíntotas horizontales

$$y=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=\frac{\infty}{\infty}=\xrightarrow{\text{Utilizando L'Hopital}}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}=\frac{1}{e^\infty}=\frac{1}{\infty}=0\Rightarrow$$

$\exists$*Asíntotas horizontales* $\Rightarrow y=0\Rightarrow x\to\infty$

$$y=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{e^{-x}}=\lim_{x\to\infty}-xe^x=\infty\Rightarrow\nexists \textit{No existen asíntotas horizontales}\Rightarrow x\to-\infty$$

Asíntotas oblícuas

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{e^x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{xe^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}=\frac{1}{e^\infty}=\frac{1}{\infty}=0\Rightarrow\nexists \textit{No existen asíntotas oblícuas}\Rightarrow x\to\infty$$

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x}{e^x}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{xe^x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^{-x}}=\lim_{x\to\infty}e^x=e^\infty=\infty\Rightarrow$$

$\nexists$*No existen asíntotas oblícuas* $\Rightarrow x\to-\infty$

Extremos locales

$$f'(x)=\frac{e^x-e^x x}{e^{2x}}=\frac{e^x(1-x)}{e^{2x}}=\frac{1-x}{e^x}\Rightarrow f'(x)=0\Rightarrow 1-x=0\Rightarrow x=1\Rightarrow f(1)=\frac{1}{e^1}=\frac{1}{e}$$

$$f''(x)=\frac{-e^x-e^x(1-x)}{e^{2x}}=\frac{e^x(-1-1+x)}{e^{2x}}=\frac{x-2}{e^x}\Rightarrow f''(1)=\frac{1-2}{e^1}=-\frac{1}{e}<0\Rightarrow \textit{Máximo}$$

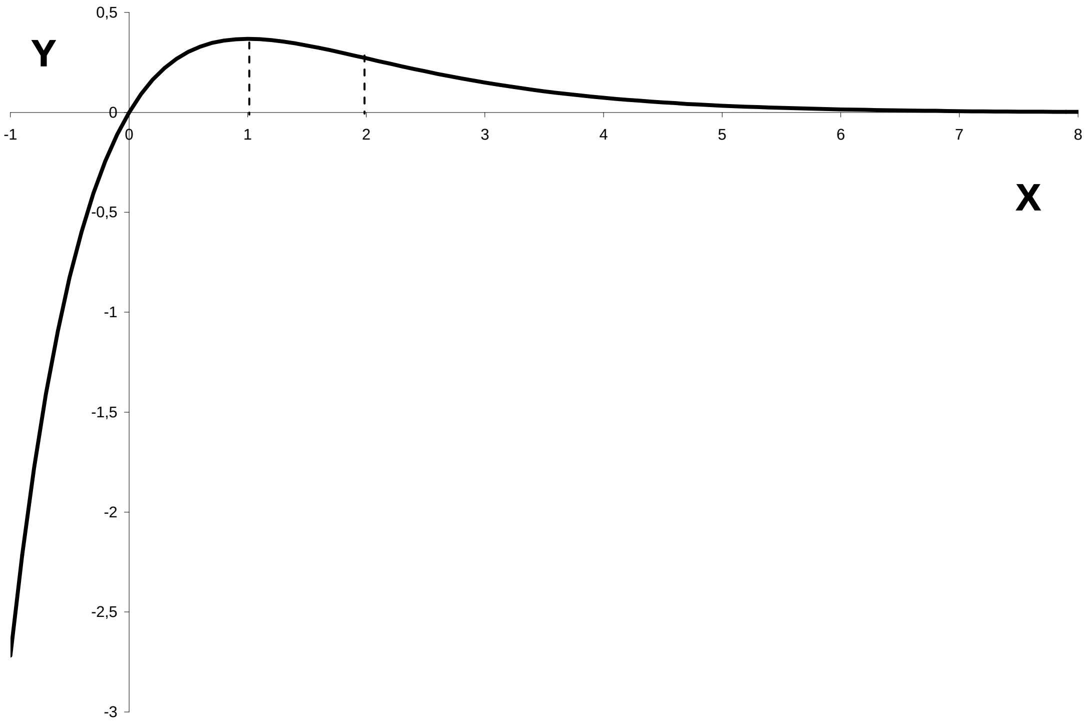
Máximo relativo en el punto $\left(1\,,\,\dfrac{1}{e}\right)$

$b)$

$$\textit{Punto de inflexión}\Rightarrow f''(x)=0\Rightarrow x-2=0\Rightarrow x=2\Rightarrow f(2)=\frac{2}{e^2}\Rightarrow\left(2\,,\,\frac{2}{e^2}\right)$$

Continuación del problema 1.A

b) Continuación



2.A.- Calcular:

$$a)\quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2+n}{1+n}\right)^{1-5n} \qquad\qquad b)\quad \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^4+2n^3-3}-\sqrt{n^4-n}}{n+5}$$

$a)$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2+n}{1+n}\right)^{1-5n}=1^{\infty}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+n+1}{1+n}\right)^{1-5n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+n}{1+n}+\frac{1}{1+n}\right)^{1-5n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1+n}\right)^{1-5n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{1+n}\right)^{1+n}\right]^{\frac{1}{1+n}\cdot(1-5n)}=e^{\lim_{n\to\infty}\frac{1-5n}{1+n}}=e^{-5}=\frac{1}{e^5}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-5n}{1+n}=\frac{-\infty}{\infty}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}-\frac{5n}{n}}{\frac{1}{n}+\frac{n}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}-5}{\frac{1}{n}+1}=\frac{\frac{1}{\infty}-5}{\frac{1}{\infty}+1}=\frac{0-5}{0+1}=-5$$

$$b)\quad \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^4+2n^3-3}-\sqrt{n^4-n}}{n+5}=\frac{\infty-\infty}{\infty}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^4+2n^3-3}-\sqrt{n^4-n}\right)\left(\sqrt{n^4+2n^3-3}+\sqrt{n^4-n}\right)}{(n+5)\left(\sqrt{n^4+2n^3-3}+\sqrt{n^4-n}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^4+2n^3-3-\left(n^4-n\right)}{(n+5)\left(\sqrt{n^4+2n^3-3}+\sqrt{n^4-n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^4+2n^3-3-n^4+n}{(n+5)\left(\sqrt{n^4+2n^3-3}+\sqrt{n^4-n}\right)}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+n-3}{(n+5)\left(\sqrt{n^4+2n^3-3}+\sqrt{n^4-n}\right)}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n^3}{n^3}+\frac{n}{n^3}-\frac{3}{n^3}}{\left(\frac{n}{n}+\frac{5}{n}\right)\left(\sqrt{\frac{n^4}{n^4}+\frac{2n^3}{n^4}-\frac{3}{n^4}}+\sqrt{\frac{n^4}{n^4}-\frac{n}{n^4}}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n^2}-\frac{3}{n^3}}{\left(1+\frac{5}{n}\right)\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}-\frac{3}{n^4}}+\sqrt{1-\frac{1}{n^3}}\right)}=\frac{2+\frac{1}{\infty}-\frac{3}{\infty}}{\left(1+\frac{5}{\infty}\right)\left(\sqrt{1+\frac{2}{\infty}-\frac{3}{\infty}}+\sqrt{1-\frac{1}{\infty}}\right)}=\frac{2+0-0}{(1+0)\left(\sqrt{1+0-0}+\sqrt{1-0}\right)}=$$

$$=\frac{2}{1.\left(\sqrt{1}+\sqrt{1}\right)}=1$$

3.A.- Dado el sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} x+y+mz=m+2 \\ 2x+(m+1)y+(m+1)z=-m \\ (m+2)x+3y+(2m+1)z=3m+4 \end{cases}$

se pide:
a) Discutirlo según los valores del parámetro real **m**
b) Resolverlo cuando tenga infinitas soluciones

$a)$

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 2 & m+1 & m+1 \\ m+2 & 3 & 2m+1 \end{vmatrix}$$

$$|A|=(2m+1)(m+1)+(m+1)(m+2)+6m-m(m+1)(m+2)-3(m+1)-2(2m+1)$$

$$|A|=(2m+1+m+2-m(m+2)-3)(m+1)+6m-4m-2=(3m-m^2-2m)(m+1)+2m-2$$

$$|A|=(m-m^2)(m+1)+2m-2=m^2+m-m^3-m^2+2m-2=-m^3+3m-2$$

$$Si\ |A|=0 \Rightarrow -m^3+3m-2=0 \Rightarrow m^3-3m+2=0 \Rightarrow (m-1)(m^2+m-2)=(m-1)^2(m+2)$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & \boxed{0} \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrr} & 1 & 1 & -2 \\ 1 & & 1 & 2 \\ \hline & 1 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

$$\forall m \in \Re-\{-2\ ,1\} \Rightarrow rang(A)=3=Número\ de\ incognitas \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Determinado$$

$Si\ m=1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 3 & 7 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow Sistema\ Incompatible$$

$Si\ m=-2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -2 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -2 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow rang(A/B)=2<Número\ de\ incognitas \Rightarrow$$

$Sistema\ Compatible\ Indeterminado$

$b)$

$$Del\ anterior \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow -3y+3z=2 \Rightarrow 3y=3z-2 \Rightarrow y=z-\frac{2}{3} \Rightarrow$$

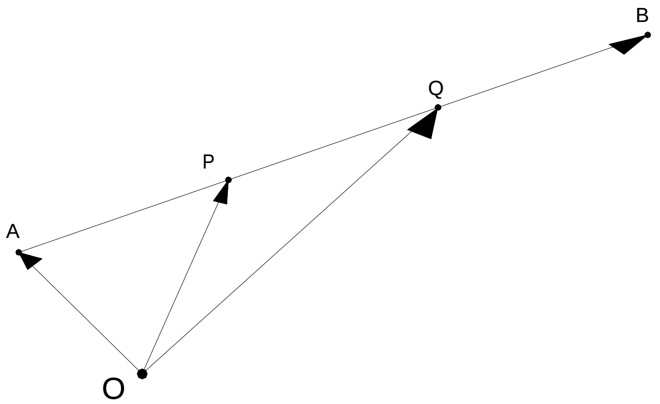
$$x+z-\frac{2}{3}-2z=0 \Rightarrow x=\frac{2}{3}+z \Rightarrow Solución\left(\frac{2}{3}+\lambda\ ,\ \lambda-\frac{2}{3}\ ,\ \lambda\right)$$

4.A.- Sean los puntos **A(1 , 0 , 2)** y **B(1 , 1 , - 4),**

a) Determinar las coordenadas de los puntos **P** y **Q** que dividen al segmento **AB** en tres partes iguales
b) Si **P** es el punto del apartado anterior más próximo al punto **A**, determinar la ecuación del plano **p** que contiene a **P** y es perpendicular a la recta **AB**.

c) Determinar la posición relativa del plano **p** y la recta $r: \dfrac{x-3}{-2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+1}{1}$

a)



$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (1 , 1 , -4) - (1 , 0 , 2) = (0 , 1 , -6)$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} \\ \overrightarrow{AP} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{3} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \dfrac{\overrightarrow{AB}}{3} \Rightarrow (x_P , y_P , z_P) = (1 , 0 , 2) + \dfrac{1}{3}\cdot(0 , 1 , -6) = (1 , 0 , 2) + \left(0 , \dfrac{1}{3} , -2\right)$$

$$(x_P , y_P , z_P) = \left(1 , \dfrac{1}{3} , 0\right)$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AQ} \\ \overrightarrow{AQ} = 2\cdot\dfrac{\overrightarrow{AB}}{3} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + 2\cdot\dfrac{\overrightarrow{AB}}{3} \Rightarrow (x_Q , y_Q , z_Q) = (1 , 0 , 2) + \dfrac{2}{3}\cdot(0 , 1 , -6) = (1 , 0 , 2) + \left(0 , \dfrac{2}{3} , -4\right)$$

$$(x_Q , y_Q , z_Q) = \left(1 , \dfrac{2}{3} , -2\right)$$

b)

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{v_\pi} = (0 , 1 , -6) \\ \overrightarrow{PG} = \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OP} = (x , y , z) - \left(1 , \dfrac{1}{3} , 0\right) = \left(x-1 , y-\dfrac{1}{3} , z\right) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{PG} \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{PG} = 0 \Rightarrow$$

$$(0 , 1 , -6)\cdot\left(x-1 , y-\dfrac{1}{3} , z\right) = 0 \Rightarrow \left(y-\dfrac{1}{3}\right) - 6z = 0 \Rightarrow y - 6z - \dfrac{1}{3} = 0 \Rightarrow \pi : 3y - 18z - 1 = 0$$

c)

$$r\begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases} \Rightarrow 3\lambda - 18\cdot(-1+\lambda) - 1 = 0 \Rightarrow -15\lambda + 17 = 0 \Rightarrow \lambda = \dfrac{17}{15} \Rightarrow Se\ cor\tan\ en \begin{cases} x = 3 - 2\cdot\dfrac{17}{15} \\ y = \dfrac{17}{15} \\ z = -1 + \dfrac{17}{15} \end{cases}$$

1.B.- Hallar los puntos de la recta $r:\begin{cases} 2x+z=0 \\ x-y+z=3 \end{cases}$ cuya distancia al plano

p: 3x + 4y = 4 es igual a $\frac{1}{3}$

Llamando a los puntos P y Q

$$z=-2x \Rightarrow x-y-2x=3 \Rightarrow y=-3-x \Rightarrow r:\begin{cases} x=\lambda \\ y=-3-\lambda \\ z=-2\lambda \end{cases} \Rightarrow$$

$$d_{\pi r}=\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{3}=\pm\frac{3\lambda+4.(-3-\lambda)+0.(-2\lambda)-4}{\sqrt{3^2+4^2+0^2}} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{3}=\frac{3\lambda-12-4\lambda-4}{\sqrt{25}} \\ \frac{1}{3}=-\frac{3\lambda-12-4\lambda-4}{\sqrt{25}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{3}=\frac{-\lambda-16}{5} \\ \frac{1}{3}=\frac{\lambda+16}{5} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 5=-3\lambda-48 \Rightarrow -3\lambda=53 \Rightarrow \lambda=-\frac{53}{3} \Rightarrow P\begin{cases} x=-\frac{53}{3} \\ y=-3-\left(-\frac{53}{3}\right)=\frac{-90+53}{3}=-\frac{37}{3} \\ z=-2\cdot\left(-\frac{53}{3}\right)=\frac{106}{3} \end{cases} \\ 5=3\lambda+48 \Rightarrow 3\lambda=-43 \Rightarrow \lambda=-\frac{43}{3} \Rightarrow Q\begin{cases} x=-\frac{43}{3} \\ y=-3-\left(-\frac{43}{3}\right)=\frac{-90+43}{3}=-4\frac{37}{3} \\ z=-2\cdot\left(-\frac{43}{3}\right)=\frac{86}{3} \end{cases} \end{cases}$$

2.B.- Dado los puntos **A(1 , 3 , - 2)** , **B(2 , 2k + 1 , k)** y **C(k + 1 , 4 , 3)**, se pide:

a) Determinar para que valor de **k** el triángulo **ABC** es rectángulo, con el ángulo recto en el vértice **A**
b) Para el valor de **k = 0** hallar el área del triángulo **ABC**

a) El vector **AB** y **AC** (los catetos del triángulo pedido)son perpendiculares, su producto escalar es nulo

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (2\,,\,2k+1\,,\,k) - (1\,,\,3\,,\,-2) = (1\,,\,2k-2\,,\,k+2) \\ \overrightarrow{AC} = (k+1\,,\,4\,,\,3) - (1\,,\,3\,,\,-2) = (k\,,\,1\,,\,5) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \Rightarrow$$

$$(1\,,\,2k-2\,,\,k-2)\cdot(k\,,\,1\,,\,5) = 0 \Rightarrow 1.k + 1.(2k-2) + 5(k+2) = 0 \Rightarrow k + 2k - 2 + 5k + 10 = 0 \Rightarrow$$

$$8k + 8 = 0 \Rightarrow k = -1$$

$b)$

$$A = \frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (2\,,1\,,\,0) - (1\,,\,3\,,\,-2) = (1\,,\,-2\,,\,2) \\ \overrightarrow{AC} = (1\,,\,4\,,\,3) - (1\,,\,3\,,\,-2) = (0\,,\,1\,,\,5) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$A = \frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (2\,,1\,,\,0) - (1\,,\,3\,,\,-2) = (1\,,\,-2\,,\,2) \\ \overrightarrow{AC} = (1\,,\,4\,,\,3) - (1\,,\,3\,,\,-2) = (0\,,\,1\,,\,5) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = -10\vec{i} + \vec{k} - 2\vec{i} - 5\vec{j} = -12\vec{i} - 5\vec{j} + \vec{k} \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(-12)^2 + (-5)^2 + 1^2} = \sqrt{144 + 25 + 1}$$

$$A = \frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{170}\ u$$

3.B.- Sean las matrices: $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} \quad y \quad B=\begin{pmatrix}7 & -3\\ 8 & -3\end{pmatrix}$

a) Hallar una matriz **X** tal que $\mathbf{AXA^{-1} = B}$
b) Calcular $\mathbf{A^{10}}$
c) Hallar todas las matrices **M** que satisfacen $\mathbf{(A + M).(A - M) = A^2 - M^2}$

a

$$A^{-1}AXA^{-1} = A^{-1}B \Rightarrow IXA^{-1}A = A^{-1}BA \Rightarrow XI = A^{-1}BA \Rightarrow X = A^{-1}BA \Rightarrow$$

$$\exists A^{-1} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot adj\left(A^t\right) \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow adj\left(A^t\right) = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$X = A^{-1}BA = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7 & -3\\ 8 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 8 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & -1\\ 8 & 5\end{pmatrix}$$

b)

$$A^2 = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow A^4 = A^2\cdot A^2 = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \ldots \Rightarrow A^{10} = \begin{pmatrix}1 & 10\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

c)

$$Sea\ M = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} M + A = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+1 & b+1\\ c & d+1\end{pmatrix} \\ M - A = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a-1 & b-1\\ c & d-1\end{pmatrix} \\ M^2 - A^2 = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a^2+bc & ab+bd\\ ac+cd & bc+d^2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow$$

$$(M + A)(M - A) = \begin{pmatrix}a+1 & b+1\\ c & d+1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a-1 & b-1\\ c & d-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a^2 - 1 + c(b+1) & (a+1)(b-1) + (b+1)(d-1)\\ c(a-1) + c(d+1) & c(b-1) + d^2 - 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} (M + A)(M - A) = \begin{pmatrix}a^2 - 1 + bc + c & ab - a + b - 1 + bd - b + d - 1\\ ac - a + cd + c & bc - c + d^2 - 1\end{pmatrix} \\ M^2 - A^2 = \begin{pmatrix}a^2 + bc - 1 & ab + bd - 2\\ ac + cd & bc + d^2 - 1\end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow (M + A)(M - A) = M^2 - A^2$$

$$\begin{cases} a^2 - 1 + bc + c = a^2 + bd - 1 \\ ab - a + b + bd - b + d - 2 = ab + bd - 2 \\ ac - a + cd + c = ac + cd \\ bc - c + d^2 - 1 = bc + d^2 - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} cb + c = bd \\ -a + d = 0 \\ -a + c = 0 \\ -c = 0 \end{cases}$$

4.B.- Se considera la función $f(x)=\begin{cases} ax^2+b & si \quad |x|<2 \\ \dfrac{1}{x^2} & si \quad |x|\ge 2 \end{cases}$. Se pide:

a) Calcular **a** y **b** para que **f** sea continua y derivable en todo **R**
b) Para los valores de **a** y **b** obtenidos en el apartado anterior, calcular el área de la región acotada limitada por la gráfica de **f**, el eje horizontal y las rectas **x = 1** y **x = 3**

a) Una función es continua cuando se cumple $f(x_0)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ en el punto de discontinuidad $\mathbf{x_o}$

Una función es derivable cuando se cumple $f'(x_0^+)=f'(x_0-)$ en el punto de discontinuidad $\mathbf{x_o}$

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & si \quad x\le -2 \\ ax^2+b & si \quad -2<x<2 \\ \dfrac{1}{x^2} & si \quad x\ge 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2\Rightarrow \begin{cases} f(-2)=\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\dfrac{1}{(-2)^2}=\dfrac{1}{4} \\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=a(-2)^2+b \end{cases} \Rightarrow 4a+b=\dfrac{1}{4} \\ x=2\Rightarrow \begin{cases} f(2)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\dfrac{1}{2^2}=\dfrac{1}{4} \\ \lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=a.2^2+b \end{cases} \Rightarrow 4a+b=\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{-2x}{x^4}=-\dfrac{2}{x^3} & si \quad x\le -2 \\ 2ax & si \quad -2<x<2 \\ -\dfrac{2}{x^3} & si \quad x\ge 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2\Rightarrow \begin{cases} f'(-2^-)=-\dfrac{2}{(-2)^3}=-\dfrac{2}{-8}=\dfrac{1}{4} \\ f'(-2^+)=2a(-2)=-4a \end{cases} \Rightarrow -4a=\dfrac{1}{4} \\ x=2\Rightarrow \begin{cases} f(2^+)=-\dfrac{2}{2^3}=-\dfrac{2}{8}=-\dfrac{1}{4} \\ f'(2^-)=a.2^2=4a \end{cases} \Rightarrow 4a=-\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 16a+4b=1 \\ a=-\dfrac{1}{16} \end{cases} \Rightarrow 16\cdot\left(-\frac{1}{16}\right)+4b=1\Rightarrow -1+4b=1\Rightarrow 4b=2\Rightarrow b=\frac{1}{2}$$

$b)$

$$A=\int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx+\int_2^3\left[\left(-\frac{1}{16}\right)x^2+\frac{1}{2}\right]dx=\int_1^2 x^{-2}\,dx-\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_2^3+\frac{1}{2}\cdot\left[x\right]_2^3$$

$$A=\frac{1}{(-1)}\cdot\left[x^{-1}\right]_1^2-\frac{1}{48}\cdot\left(3^3-2^3\right)+\frac{1}{2}\cdot(3-2)=-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{1}\right)-\frac{1}{48}\cdot(27-8)+\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}-\frac{19}{48}+\frac{1}{2}$$

$$A=1-\frac{19}{48}=\frac{29}{48}\,u^2$$