OPCIÓN A

1.A a) Justificar, razonadamente, que la gráfica de la función **$f(x) = x^{15} + x + 1$,** corta al eje **OX** al menos una vez en el intervalo **[- 1 , 1]**.

b) Determinar, razonadamente, el número exacto de puntos de corte con el eje **OX** cuando **x** recorre toda la recta real.

a) **Teorema de conservación del signo.-** Si ***f(x)*** es continua en **x_0** y ***$f(x_0) \neq 0$***, entonces existe un entorno de **x_0 , ($x_0 - \delta$, $x_0 + \delta$)** en el que la función tiene el mismo signo que ***$f(x_0)$***, es decir:

$$\text{sign}\,[f(x)] = \text{sign}\,[f(x_0)],\ \forall x \in (x_0 - \delta \quad x_0 + \delta)$$

Como consecuencia de este teorema tendremos la siguiente proposición:

Si una función f(x) es continua en un punto x_0, y toma valores positivos y negativos en todo entorno de x_0 entonces $f(x_0) = 0$

La función dada es **continua** para todo valor real de **x,** y además en el intervalo **[- 1 , 1]**:

$$\begin{cases} f(-1) = (-1)^{15} + (-1) + 1 = -1 - 1 + 1 = -1 \Rightarrow sign[f(-1)] = - \\ f(1) = 1^{15} + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 = 3 \Rightarrow sign[f(1)] = + \end{cases}$$ por lo tanto existe, al menos un punto **x_0**, perteneciente al intervalo en donde **$f(x_0) = 0$**

b)

Para ver si hay más intervalos, en donde puedan existir puntos de corte con el eje **OX**, estudiaremos los de crecimiento y decrecimiento, y de haberlos lo hallaremos como en el apartado a), de no existir el punto será único y ya determinado

$$f'(x) = 15x^{14} + 1 \Rightarrow Crecimiento \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow 15x^{14} + 1 > 0 \Rightarrow 15x^{14} > -1 \Rightarrow x^{14} > \frac{-1}{15} \Rightarrow$$

$$x > \sqrt[14]{-\frac{1}{15}} \Rightarrow \forall x \notin \Re \Rightarrow No\ se\ puede\ \det er \min ar \Rightarrow \begin{cases} f(-1) = -1 \\ f(1) = 3 \end{cases} \Rightarrow Siempre\ creciente$$

Al ser monótona creciente solo hay un intervalo de crecimiento $(-\infty , \infty)$ y solo existe el punto **x_0** en donde **$f(x_0) = 0$**, ya indicado en el apartado a)

2.A.- a) Determinar el punto **P**, contenido en el primer cuadrante, en el que se corta la gráfica de la función $f(x)=\frac{x^2}{2}$ y la circunferencia **$x^2 + y^2 = 8$**

b) Calcular el área de la región limitada por la recta que une el origen y el punto **P** hallado en el apartado anterior, y el arco de curva $y=\frac{x^2}{2}$ comprendido entre el origen y el punto **P**

a)

$$x^2+\left(\frac{x^2}{2}\right)^2=8\Rightarrow x^2+\frac{x^4}{4}=8\Rightarrow 4x^2+x^4=32\Rightarrow x^4+4x^2-32=0\Rightarrow t=x^2\Rightarrow t^2+4t-32=0\Rightarrow$$

$$\Delta=16+128=144>0\Rightarrow t_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{144}}{2}\Rightarrow\begin{cases} t_1=\frac{-4+12}{2}=4\Rightarrow x^2=4\Rightarrow x=\pm\sqrt{4}\Rightarrow\begin{cases}x=2\\x=-2\end{cases}\\ t_1=\frac{-4-12}{2}=-8\Rightarrow x^2=-8\Rightarrow x=\pm-8\Rightarrow\forall x\notin\Re\end{cases}$$

$$Como\ tiene\ que\ estar\ contenido\ en\ el\ primer\ cuadrante\Rightarrow x=2\Rightarrow f(2)=\frac{2^2}{2}=2\Rightarrow P(2\ ,\ 2)$$

b)

$$Ecuación\ de\ la\ recta\Rightarrow m=\frac{2-0}{2-0}=1\Rightarrow y-2=x-2\Rightarrow x-y=0$$

$$\begin{cases} g(x)=y=x\Rightarrow g(1)=1\\ y^2=8-x^2\Rightarrow y=\pm\sqrt{8-x^2}\Rightarrow h(x)=\sqrt{8-x^2}\Rightarrow h(x)=\sqrt{8-1^2}=\sqrt{7}\end{cases}\Rightarrow\sqrt{7}>1\Rightarrow h(x)>g(x)$$

$$A=\int_0^2\sqrt{8-x^2}\ dx-\int_0^2 x\ dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{8-8.sen^2t}.\sqrt{8}.\cos t\ dt-\frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_0^2=\sqrt{8}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{8}\sqrt{1-sen^2t}.\cos t\ dt-\frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_0^2$$

$$\begin{cases} x=\sqrt{8}.sen\ t\\ t=arc\ sen\left(\frac{x}{\sqrt{8}}\right)\\ dx=\sqrt{8}.\cos t\ dt\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=2\Rightarrow t=arc\ sen\left(\frac{2}{\sqrt{8}}\right)=arc\ sen\left(\frac{2}{2\sqrt{2}}\right)=arc\ sen\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\pi}{4}\\ x=0\Rightarrow t=arc\ sen\left(\frac{0}{\sqrt{8}}\right)=arc\ sen(0)=0\end{cases}$$

$$A=8\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos t.\cos t\ dt-\frac{1}{2}\cdot\left(2^2-0^2\right)=8\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 t\ dt-\frac{4}{2}=8\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\cos 2t}{2}\ dt-2=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2t)\ dt-2$$

$$\begin{cases}\cos^2 t+sen^2t=1\\ \cos^2 t-sen^2t=\cos 2t\end{cases}\Rightarrow\cos^2 t=\frac{1+\cos 2t}{2}$$

$$A=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}dt-4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2t\ dt-2=4[t]_0^{\frac{\pi}{4}}-4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos u\ \frac{du}{2}-2=4\left(\frac{\pi}{4}\right)-2[\cos u]_0^{\frac{\pi}{2}}-2=\pi-2\left(\cos\frac{\pi}{2}-\cos 0\right)-2$$

$$\begin{cases}2t=u\\ dt=\frac{du}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t=\frac{\pi}{4}\Rightarrow u=\frac{\pi}{2}\\ t=0\Rightarrow u=0\end{cases}$$

$$A=\pi-2[0-1]-2=\pi+2-2=\pi\ u^2$$

3.A.- a) Discutir según los valores del parámetro l el sistema: $\begin{cases} 2\lambda x + 2y + \lambda z = 1 \\ x + \lambda y - z = 1 \\ 4x + 3y + z = 2\lambda \end{cases}$

b) Resolver el sistema anterior en los casos en que sea compatible

$$|A| = \begin{vmatrix} 2\lambda & 2 & \lambda \\ 1 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2\lambda^2 - 8 + 3\lambda - 4\lambda^2 + 6\lambda - 2 = -2\lambda^2 + 9\lambda - 10 \Rightarrow Si\ |A| = 0 \Rightarrow -2\lambda^2 + 9\lambda - 10 = 0 \Rightarrow$$

$$2\lambda^2 - 9\lambda + 10 = 0 \Rightarrow \Delta = 81 - 80 = 1 > 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{1}}{4} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{9+1}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \\ \lambda_2 = \frac{9-1}{4} = 2 \end{cases}$$

$$\forall \lambda \in \Re - \left\{ \frac{5}{2}, 2 \right\} \Rightarrow rang(A) = 3 = Número\ de\ incognitas \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\ minado$$

Por Gauss

Con $\lambda = \frac{5}{2}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & \frac{5}{2} & 1 \\ 1 & \frac{5}{2} & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 5 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 10 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & -2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 5 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 10 & 4 & 5 & 2 \\ 10 & 25 & -10 & 10 \\ 20 & 15 & 5 & 25 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 10 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 21 & -15 & 8 \\ 0 & 7 & -5 & 21 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 10 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 21 & -15 & 8 \\ 0 & 21 & -15 & 63 \end{array} \right) \equiv$$

$$\equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 10 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 21 & -15 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 55 \end{array} \right) \Rightarrow Sistema\ Incompatible$$

Con $\lambda = 2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 4 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & -4 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 4 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & -6 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right) \Rightarrow Sist\ Incompatible$$

b)

Por Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & \lambda & -1 \\ 2\lambda & 3 & 1 \end{vmatrix}}{-2\lambda^2 + 9\lambda - 10} = \frac{\lambda - 4\lambda + 3\lambda - 2\lambda^3 + 3 - 2}{-2\lambda^2 + 9\lambda - 10} = \frac{-2\lambda^3 + 1}{-2\lambda^2 + 9\lambda - 10}$$

Continúa el problema 3.A.-

$b)$*Continuación*

$$y=\frac{\begin{vmatrix}2\lambda & 1 & \lambda\\ 1 & 1 & -1\\ 4 & 2\lambda & 1\end{vmatrix}}{-2\lambda^2+9\lambda-10}=\frac{2\lambda-4+2\lambda^2-4\lambda+4\lambda^2-1}{-2\lambda^2+9\lambda-10}=\frac{6\lambda^2-2\lambda-5}{-2\lambda^2+9\lambda-10}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}2\lambda & 2 & 1\\ 1 & \lambda & 1\\ 4 & 3 & 2\lambda\end{vmatrix}}{-2\lambda^2+9\lambda-10}=\frac{4\lambda^3-8-3-4\lambda-6\lambda-4\lambda}{-2\lambda^2+9\lambda-10}=\frac{4\lambda^3-14\lambda-11}{-2\lambda^2+9\lambda-10}$$

Continúa el problema 3.A.-

Otra forma de realizar el apartado a) es utilizando la reducción por Gauss

$$a)\text{Continuación}$$

$$\text{Segundo método.} - \text{Gauss} \Rightarrow$$

$$\text{Con } m = -1$$

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & -6 & 6 \\ 2 & 4 & -6 & 8 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -5 & 9 \\ 0 & 5 & -5 & 11 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -5 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\text{Sistema Incompatible}$$

$$\text{Con } m = 2$$

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

$$\text{Con } m = 4$$

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 3 \\ 12 & 9 & 9 & 21 \\ 3 & 6 & 6 & 12 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 5 & 9 \\ 0 & 5 & 5 & 9 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \text{Sist. Compat. Indeterminado}$$

$$b)$$

$$\text{Por Gauss}$$

$$5y + 5z = 9 \Rightarrow 5y = 9 - 5z \Rightarrow y = \frac{9-5z}{5} \Rightarrow 3x + \frac{9-5z}{5} + z = 3 \Rightarrow 15x + 9 - 5z + 5z = 15 \Rightarrow$$

$$15x = 6 \Rightarrow x = \frac{2}{5} \Rightarrow \text{Solución}\left(\frac{2}{5}, \frac{9}{5} - \lambda, \lambda\right)$$

$$\text{Por Rouche}$$

$$\begin{cases} 3x + y + z = 3 \\ 4x + 3y + 3z = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -9x - 3y - 3z = -9 \\ 4x + 3y + 3z = 7 \end{cases} \Rightarrow -5x = -2 \Rightarrow x = \frac{2}{5} \Rightarrow 3 \cdot \frac{2}{5} + y + z = 3 \Rightarrow$$

$$6 + 5y + 5z = 15 \Rightarrow 5y = 9 - 5z \Rightarrow y = \frac{9-5z}{5} = \frac{9}{5} - z \Rightarrow \text{Solución}\left(\frac{2}{5}, \frac{9}{5} - \lambda, \lambda\right)$$

Evidentemente hay que elegir uno de los dos procedimientos, el segundo valdrá para comprobar

4.A.- Dados los puntos **A(- 1 , 1 , 1), B(1 , - 3 , - 1)** y **C(1 , 0 , 3)**, hallar las coordenadas de un punto **D** perteneciente a la recta: $r \equiv x-1=\frac{y-1}{-1}=z-1$ de manera que el tetraedro **ABCD** tenga un volumen igual a **2**

$$r \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 1-\lambda \\ z = 1+\lambda \end{cases} \Rightarrow D(1+\lambda\ ,1-\lambda\ ,1+\lambda) \Rightarrow V = 2 = \frac{1}{6}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|\cdot\overrightarrow{AD} \Rightarrow 12 = \left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|\cdot\overrightarrow{AD}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1\ ,-3\ ,-1)-(-1\ ,1\ ,1) = (2\ ,-4\ ,-2)(no\ se\ puede\ reducir\ porque\ estamos\ con\ medidas) \\ \overrightarrow{AC} = (1\ ,0\ ,3)-(-1\ ,1\ ,1) = (2\ ,-1\ ,2) \\ \overrightarrow{AD} = (1+\lambda\ ,1-\lambda\ ,1+\lambda)-(-1\ ,1\ ,1) = (2+\lambda\ ,-\lambda\ ,\lambda) \end{cases} \Rightarrow$$

$$12 = \begin{vmatrix} 2+\lambda & -\lambda & \lambda \\ 2 & -4 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow 12 = -8(2+\lambda)+4\lambda-2\lambda+8\lambda-2(2+\lambda)+4\lambda \Rightarrow 12 = -10.(2+\lambda)+14\lambda \Rightarrow$$

$$12 = -20-10\lambda+14\lambda \Rightarrow 32 = 4\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{32}{4} = 8 \Rightarrow D\begin{cases} x = 1+8 = 9 \\ y = 1-8 = -7 \\ z = 1+8 = 9 \end{cases} \Rightarrow D(9\ ,-7\ ,9)$$

OPCIÓN B

1.B.- Considerar el siguiente sistema de ecuaciones, en el que **a** es un parámetro real:

$$\begin{cases} -ax+4y+az=-a \\ 4x+ay-az=a \\ x-y+z=1 \end{cases}$$, se pide:

a) Discutir el sistema

b) Resolver el sistema para **a = 1**

$a)$

$$|A|=\begin{vmatrix} -a & 4 & a \\ 4 & a & -a \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-a^2-4a-4a-a^2+a^2-16=-a^2-8a-16 \Rightarrow Si\ |A|=0 \Rightarrow -a^2-8a-16=0 \Rightarrow$$

$$a^2+8a+16=0 \Rightarrow \Delta=64-64=0 \Rightarrow x=\frac{-8}{2}=-4$$

$$\forall a \in \Re-\{-4\} \Rightarrow rang(A)=3=Número\ de\ incognitas \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$$

$$Si\ a=-4 \Rightarrow \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 4 & -4 \end{vmatrix}=-16-16=-32 \Rightarrow rang(A)=2$$

Método de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 4 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 4 & -4 \\ 4 & -4 & 4 & 4 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & -4 & 4 \\ 0 & -8 & 8 & -8 \\ 0 & -8 & 8 & 8 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & -4 & 4 \\ 0 & -8 & 8 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{array}\right) \Rightarrow Sist\ Incompatible$$

Por Rouche

$$|A/B|=|C_1 \quad C_2 \quad B|=\begin{vmatrix} -a & 4 & -a \\ 4 & a & a \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-a^2+4a+4a+a^2-a^2-16=-a^2+8a-16 \Rightarrow Si\ |A/B|=0 \Rightarrow$$

$$-a^2+8a-16=0 \Rightarrow a^2-8a+16=0 \Rightarrow \Delta=64-64=0 \Rightarrow x=\frac{8}{2}=4$$

$$\forall a \in \Re-\{4\} \Rightarrow rang(A/B)=3 \Rightarrow Si\ a=-4 \Rightarrow rang(A/B)=3$$

Ya n hace falta seguir queda claro que:

Cuando **a = - 4 → rang(A) = 2 ≠ rang(A/B) = 2 → Sistema Incompatible** *b*)

Por Cramer

$$Con\ a = 1 \Rightarrow |A| = -1^2 - 8.1 - 16 = -1 - 8 - 16 = -25 \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\begin{vmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-25} = \dfrac{-1-4-1-1+1-4}{-25} = C \\ y = \dfrac{\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-25} = \dfrac{-1+1+4-1-1+4}{-25} = -\dfrac{6}{25} \\ z = \dfrac{\begin{vmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-25} = \dfrac{-1+4+4+1-1-16}{-25} = \dfrac{9}{25} \end{cases}$$

Método de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 17 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 17 & 3 & -3 \\ 0 & 51 & 34 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 17 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 25 & 9 \end{array}\right) \Rightarrow 25z = 9 \Rightarrow z = \frac{9}{25}$$

$$17y + 3 \cdot \frac{9}{25} = -3 \Rightarrow 17y = -3 - \frac{27}{25} \Rightarrow 17y = -\frac{75+27}{25} = -\frac{102}{25} \Rightarrow y = -\frac{102}{17.25} = -\frac{6}{25} \Rightarrow$$

$$-x + 4 \cdot \left(-\frac{6}{25}\right) + \frac{9}{25} = -1 \Rightarrow x = -\frac{24}{25} + \frac{9}{25} + 1 = \frac{-24+9+25}{25} = \frac{10}{25}$$

Solución $\left(\dfrac{10}{25}, -\dfrac{6}{25}, \dfrac{9}{25}\right)$

2.B.- Sea la matriz: $A=\begin{pmatrix}2 & 2 & -2\\ 2 & 2 & -2\\ 2 & 2 & -2\end{pmatrix}$

a) Comprobar que $\mathbf{A^3 - 2A^2 = 0}$

b) Hallar $\mathbf{A^n}$

$a)$

$$A^3-2A^2=A^2(A-2)=A^2(A-2I)\Rightarrow$$

$$A^2=\begin{pmatrix}2 & 2 & -2\\ 2 & 2 & -2\\ 2 & 2 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 2 & -2\\ 2 & 2 & -2\\ 2 & 2 & -2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\cdot 2\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$A^2=4\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$A-2I=2\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}-2.\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}$$

$$A^2(A-2I)=4\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}.2\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}=8\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}$$

$$A^2(A-2I)=8\cdot\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$b)$

$$A^2=4\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow A^3-2A^2=0\Rightarrow A^3=2A^2\Rightarrow A^3=2.4\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}=8\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$A^4=A^3.A=8\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\cdot 2\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}=16\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\cdots\cdots A^n=2^n\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

3.B.- Se considera la función **f(x) = ln (1 + x²)**, donde *ln* significa *Logaritmo Neperiano*

a) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los intervalos de concavidad y convexidad

b) Dibujar la gráfica de **f**

c) Calcular las ecuaciones de las recta tangentes a la gráfica de **f** en sus puntos de inflexión.

$a)$

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}\cdot 2x \Rightarrow Crecimiento \Rightarrow f'(x)>0 \Rightarrow \frac{2x}{1+x^2}>0 \Rightarrow \begin{cases} 2>0 \Rightarrow \forall x \in \Re \\ x>0 \Rightarrow \forall x \in \Re / x>0 \Rightarrow x>0 \\ 1+x^2>0 \Rightarrow \forall x \in \Re \end{cases}$$

$$\begin{cases} Derecimiento \Rightarrow \forall x \in \Re / x<0 \\ Crecimiento \Rightarrow \forall x \in \Re / x>0 \end{cases}$$

$En\ x=0\ existe\ un\ mínimo\ relativo$

$$f''(x)=\frac{2.\left(1+x^2\right)-2x.2x}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{2+2x^2-4x^2}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{2\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{2(1-x)(1+x)}{\left(1+x^2\right)^2} \Rightarrow \begin{cases} 2>0 \Rightarrow \forall x \in \Re \\ 1-x>0 \Rightarrow -x>-1 \Rightarrow x<1 \\ 1+x>0 \Rightarrow x>-1 \\ \left(1+x^2\right)^2 \Rightarrow \forall x \in \Re \end{cases}$$

	$-\infty$ a -1	-1 a 1	1 a ∞
x > - 1	**(-)**	**(+)**	**(+)**
x < 1	**(+)**	**(+)**	**(-)**
	(-)	**(+)**	**(-)**

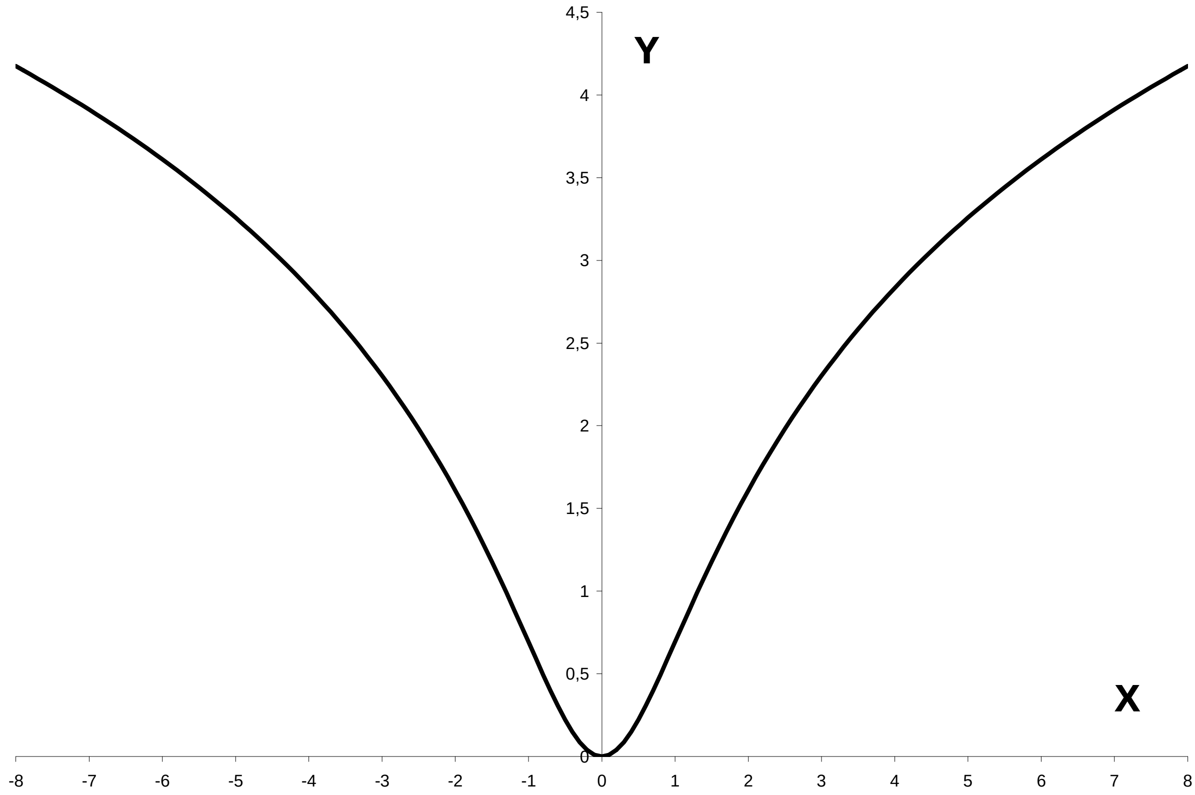
Concavidad $\forall x \in \Re / -1<x<1$

Convexidad $\forall x \in \Re / (x>-1) \cup (x>1)$

En x= -1 y en x = 1 existen Puntos de Inflexión

Continuación de problema 3B.-

b)



$c)$

$$\begin{cases} x=-1 \Rightarrow f(-1)=\ln\left(1+1^2\right)=\ln 2 \Rightarrow f'(-1)=\dfrac{2.(-1)}{1+(-1)^2}=-1 \Rightarrow y-\ln 2=(-1)(x+1) \\ x=1 \Rightarrow f(1)=\ln\left(1+1^2\right)=\ln 2 \Rightarrow f'(1)=\dfrac{2.1}{1+1^2}=-1 \Rightarrow y-\ln 2=1.(x-1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x=-1 \Rightarrow x+y-\ln 2+1=0 \\ x=1 \Rightarrow x-y+\ln 2-1=0 \end{cases}$$

4.B Se considera la recta $r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-5}{2}$, y la familia de rectas dependiente del parámetro **m:** $s \equiv \begin{cases} 3x - y = 8 - 12m \\ y - 3z = 7 - 3m \end{cases}$

a) Determinar el valor de **m** para el que las dos rectas se cortan
b) Para el caso **m = 0**, hallar la distancia entre las rectas **r** y **s**.

$a)$

$$s \equiv 3x - 3z = 15 - 15m \Rightarrow 3(x-z) = 15(1-m) \Rightarrow x - z = 5(1-m) \Rightarrow x = z + 5(1-m) \Rightarrow$$
$$y = 3z + 7 - 3m$$

$$\begin{cases} r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 4 + 3\lambda \\ z = 5 + 2\lambda \end{cases} \\ s \equiv \begin{cases} x = 5(1-m) + \mu \\ y = 7 - 3m + 3\mu \\ z = \mu \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda = 5(1-m) + \mu \\ 4 + 3\lambda = 7 - 3m + 3\mu \\ 5 + 2\lambda = \mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda - \mu + 5m = 5 \\ 3\lambda - 3\mu + 3m = 3 \\ 2\lambda - \mu = -5 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 5 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -5 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 5 & 5 \\ 2 & -1 & 0 & -5 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -7 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & -10 \end{array}\right) \Rightarrow -5m = -10 \Rightarrow m = 2(Aqui\ acabariamos)$$

$$\mu + 3.2 = 3 \Rightarrow \mu = -3 \Rightarrow \lambda + 3 + 2 = 1 \Rightarrow \lambda = -4$$

$$El\ \ punto\ de\ corte\ es\ P \begin{cases} x = 2.(-4) = -8 \\ y = 4 + 3.(-4) = -8 \Rightarrow P(-8\ ,\ -8\ ,\ -3) \\ z = 5 + 2.(-4) = -3 \end{cases}$$

b) Primero comprobaremos si las rectas son paralelas, de no se así se cruzan. En este caso, calcularemos el plano **p** que conteniendo a la recta **s** y que es paralelo a la recta **r.** Después hallaremos la distancia de un punto de **r** al plano hallado que será la distancia pedida.

$$\begin{cases} r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 4 + 3\lambda \\ z = 5 + 2\lambda \end{cases} \\ s \equiv \begin{cases} x = 5 + \mu \\ y = 7 + 3\mu \\ z = \mu \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{1} \neq \frac{3}{3} \Rightarrow No\ son\ paraleas \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (2\ ,3\ ,2) \\ \overrightarrow{v_s} = (1\ ,3\ ,1) \\ \overrightarrow{SG} = (x\ ,\ y\ ,\ z) - (5\ ,\ 7\ ,\ 0) = (x-5\ ,\ y-7\ ,\ z) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-5 & y-7 & z \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3(x-5) + 2(y-7) + 6z - 3z - 6(x-5) - 2(y-7) = 0 \Rightarrow$$

$$-3(x-5) + 3z = 0 \Rightarrow 3x - 3z - 15 = 0 \Rightarrow \pi \equiv x - z - 5 = 0 \Rightarrow d_{R\pi} = d_{rs} = \frac{|1.0 - 1.5 - 5|}{\sqrt{1^2 + 5^2}} = \frac{|-10|}{\sqrt{26}}$$

$$d_{rs} = \frac{10\sqrt{26}}{26} = \frac{5\sqrt{26}}{13}\ u$$