INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

INSTRUCCIONES: El examen presenta dos opciones, A y B. El alumno deberá elegir **UNA Y SÓLO UNA** de ellas, y resolver los cuatro ejercicios de que consta. No se permite el uso de calculadoras con capacidad de representación gráfica.
PUNTUACIÓN: La calificación máxima de cada ejercicio se indica en el encabezamiento del mismo.

Tiempo: 90 minutos

OPCIÓN A

Ejercicio 1. **Calificación máxima**: 2 puntos.
a) Justificar razonadamente que la gráfica de la función
$$f(x) = x^{15} + x + 1$$
corta a eje *OX* al menos una vez en el intervalo [-1, 1].
b) Determinar razonadamente el número exacto de puntos de corte con el eje *OX* cuando *x* recorre toda la recta real.

Ejercicio 2. **Calificación máxima**: 2 puntos.
a) (1 punto) Determinar el punto *P,* contenido en el primer cuadrante, en el que se corta la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x^2}{2}$ y la circunferencia $x^2 + y^2 = 8$
b) (1 punto) Calcular el área de la región limitada por la recta que une el origen y el punto *P* hallado en el apartado anterior, y el arco de la curva $y = \dfrac{x^2}{2}$ comprendido entre el origen y el punto *P*.

Ejercicio 3. **Calificación máxima**: 3 puntos.
a) (2 puntos) Discutir según los valores del parámetro λ el sistema
$$\begin{cases} 2\lambda x + 2y + \lambda z = 1 \\ x + \lambda y - z = 1 \\ 4x + 3y + z = 2\lambda \end{cases}$$

b) (1 punto) Resolver el sistema anterior en los casos en que sea compatible.

Ejercicio 4. **Calificación máxima**: 3 puntos.
Dados los puntos A(-1,1,1), B(1, -3, -1) y C(1, 0, 3), hallar las coordenadas de un punto D perteneciente a la recta:
$$r \equiv x - 1 = \frac{y-1}{-1} = z - 1$$
de manera que el tetraedro ABCD tenga un volumen igual a 2.

OPCIÓN B

Ejercicio 1. **Calificación máxima**: 2 puntos.
Considerar el siguiente sistema de ecuaciones, en el que a es un parámetro real:

$$\begin{cases} -ax+4y+az=-a \\ 4x+ay-az=a \\ -x-y+z=1 \end{cases}$$

Se pide:
a) (1 punto) Discutir el sistema.
b) (1 punto) Resolver el sistema para $a = 1$.

Ejercicio 2. Calificación máxima: 2 puntos.
Sea la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Comprobar que

$$A^3-2A^2=0$$

b) (1 punto) Hallar A^{n}.

Ejercicio 3. **Calificación máxima**: 3 puntos.
Sea la función $f(x)=\ln(1+x^2)$, donde ln significa *Logaritmo Neperiano*.
a) (1 punto) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los intervalos de concavidad y convexidad.
b) (1 punto) Dibujar la gráfica de la f.
c) (1 punto) Calcular las ecauciones de las rectas tangentes a la gráfica de f en sus puntos de inflexión.

Ejercicio 4. **Calificación máxima**: 3 puntos.
Se considera la recta $r\equiv\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-4}{3}=\dfrac{z-5}{2}$, y la familia de rectas dependiente del parámetro m:

$$s\equiv\begin{cases} 3x-y=8-12m \\ y-3z=7-3m \end{cases}$$

a) (2 puntos) Determinar el valor de m para el que las dos rectas r y s se cortan.

b) (1 punto) Para el caso $m = 0$, hallar la distancia entre las dos rectas.

MATEMÁTICAS II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

OPCIÓN A

Ejercicio 1. Apartado a): 1 punto. Apartado b): 1 punto.

Ejercicio 2. Apartado a): 1 punto. Apartado b): 0,5 puntos planteamiento, 0,5 puntos resolución correcta.

Ejercicio 3. Apartado a): 1 punto por el cálculo correcto de los rangos, y 1 punto por la discusión correcta. Apartado b): 1 punto.

Ejercicio 4. 2 puntos por el planteamiento, 1 punto por la resolución correcta. Restar 0,5 puntos si sólo se encuentra una solución.

OPCIÓN B

Ejercicio 1. Apartado a) : 1 punto. Apartado b): 1 punto.

Ejercicio 2. Apartado a): 1 punto. Apartado b): 1 punto.

Ejercicio 3. Apartado a): 0,5 puntos por crecimiento y decrecimiento, 0,5 puntos por concavidad y convexidad. Apartado b): 1 punto. Apartado c): 1 punto.

Ejercicio 4. Apartado a): 1,5 puntos planteamiento; 0,5 puntos resolución correcta. Apartado b): 0,5 puntos planteamiento, 0,5 puntos resolución correcta.