	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO Curso **2019-2020** **MATERIA**: MATEMÁTICAS II	

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

TIEMPO Y CALIFICACIÓN: 90 minutos. Cada pregunta se calificará sobre 2,5 puntos.

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea *A* una matriz de tamaño 3×4 tal que sus dos primeras filas son (1, 1, 1, 1) y (1, 2, 3, 4), y sin ningún cero en la tercera fila. En cada uno de los apartados siguientes, se pide poner un ejemplo de matriz *A* que verifique la condición pedida, **justificándolo apropiadamente**:

a) (0.5 puntos) La tercera fila de *A* es combinación lineal de las dos primeras.
b) (0.5 puntos) Las tres filas de *A* son linealmente independientes.
c) (0.5 puntos) *A* es la matriz ampliada de un sistema compatible determinado.
d) (0.5 puntos) *A* es la matriz ampliada de un sistema compatible indeterminado.
e) (0.5 puntos) *A* es la matriz ampliada de un sistema incompatible.

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-1}{x^2-1} & si \quad x<1, x\neq -1 \\ \dfrac{x^2+1}{4x} & si \quad x\geq 1 \end{cases}$, se pide:

a) (0.5 puntos) Calcular *f(0)* y $\left(f\circ f\right)(0)$.
b) (1.25 puntos) Estudiar la continuidad y derivabilidad de *f(x)* en *x = 1* y determinar si en dicho punto existe un extremo relativo.
c) (0.75 puntos) Estudiar sus asíntotas.

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dados el punto *P(3, 3, 0)* y la recta $r\equiv \dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{0}$, se pide:

a) (0.75 puntos) Escribir la ecuación del plano que contiene al punto *P* y a la recta *r*.
b) (1 punto) Calcular el punto simétrico de *P* respecto de *r*.
c) (0.75 puntos) Hallar dos puntos *A* y *B* de *r* tales que el triángulo *ABP* sea rectángulo, tenga área $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ y el ángulo recto en A.

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se tienen tres urnas A, B y C. La urna A contiene 4 bolas rojas y 2 negras, la urna B contiene 3 bolas de cada color y la urna C contiene 6 bolas negras. Se elige una urna al azar y se extraen de ella dos bolas de manera consecutiva y sin reemplazamiento. Se pide:

a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que la primera bola extraída sea roja.
b) (1 punto) Calcular la probabilidad de que la primera bola extraída sea roja y la segunda sea negra.
c) (0.5 puntos) Sabiendo que la primera bola extraída es roja, calcular la probabilidad de que la segunda sea negra.

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) (1 punto) Calcular, si es posible, la inversa de la matriz *A*.

b) (0.5 puntos) Calcular la matriz $C = A^2 - 2I$.

c) (1 punto) Calcular el determinante de la matriz $D = ABB^t$ (donde B^t denota la matriz traspuesta de *B*).

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

La potencia generada por una pila viene dada por la expresión $P(t) = 25te^{-t^2/4}$, donde $t > 0$ es el tiempo de funcionamiento.

a) (0.5 puntos) Calcular hacia qué valor tiende la potencia generada por la pila si se deja en funcionamiento indefinidamente.

b) (0.75 puntos) Determinar la potencia máxima que genera la pila y el instante en el que se alcanza.

c) (1.25 puntos) La energía total generada por la pila hasta el instante *t*, *E(t)*, se relaciona con la potencia mediante $E´(t) = P(t)$, con $E(0) = 0$. Calcular la energía producida por la pila entre el instante $t = 0$ y el instante $t = 2$.

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Del paralelogramo *ABCD*, se conocen los vértices consecutivos A(1, 0, –1), B(2, 1, 0) y C(4, 3, –2). Se pide:

a) (1 punto) Calcular una ecuación de la recta que pasa por el punto medio del segmento *AC* y es perpendicular a los segmentos *AC* y *BC*.

b) (1 punto) Hallar las coordenadas del vértice *D* y el área del paralelogramo resultante.

c) (0.5 puntos) Calcular el coseno del ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

En un experimento aleatorio hay dos sucesos independientes X, Y. Sabemos que $P(X) = 0.4$ y que $P(X \cap \overline{Y}) = 0.08$ (donde $\overline{Y}$ es el suceso complementario de *Y*). Se pide:

a) (1 punto) Calcular $P(Y)$.

b) (0.5 puntos) Calcular $P(X \cup Y)$.

c) (1 punto) Si *X* es un resultado no deseado, de manera que consideramos que el experimento es un ´ éxito cuando NO sucede *X*, y repetimos el experimento en 8 ocasiones, hallar la probabilidad de haber tenido éxito al menos 2 veces.

SOLUCIONES

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Sea *A* una matriz de tamaño 3×4 tal que sus dos primeras filas son (1, 1, 1, 1) y (1, 2, 3, 4), y sin ningún cero en la tercera fila. En cada uno de los apartados siguientes, se pide poner un ejemplo de matriz *A* que verifique la condición pedida, **justificándolo apropiadamente**:
a) (0.5 puntos) La tercera fila de *A* es combinación lineal de las dos primeras.
b) (0.5 puntos) Las tres filas de *A* son linealmente independientes.
c) (0.5 puntos) *A* es la matriz ampliada de un sistema compatible determinado.
d) (0.5 puntos) *A* es la matriz ampliada de un sistema compatible indeterminado.
e) (0.5 puntos) *A* es la matriz ampliada de un sistema incompatible.

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\a&b&c&d\end{pmatrix} \text{ siendo } a\neq 0, b\neq 0, c\neq 0 \text{ y } d\neq 0.$$

a) $\begin{pmatrix}a & b & c & d\end{pmatrix}=\alpha(1,1,1,1)+\beta(1,2,3,4)$. Por ejemplo ponemos $\alpha=1$ y $\beta=1$.

Quedaría $\begin{pmatrix}a & b & c & d\end{pmatrix}=(1,1,1,1)+(1,2,3,4)=(2,3,4,5)$ y la matriz $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\2&3&4&5\end{pmatrix}$

b) Cambiamos en la matriz del apartado a) un elemento de la 3ª fila y comprobamos que son linealmente independientes viendo que el rango de A es 3.

$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\1&3&4&5\end{pmatrix}$. Tomo el menor formado por 1ª, 2ª y 3ª columnas, veamos si su determinante es no nulo.

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&4\end{vmatrix}=8+3+3-2-4-9=-1\neq 0$$

Por lo que el rango de A es 3 y las filas son linealmente independientes.

c) Para que sea la matriz ampliada de un sistema compatible determinado debe tener rango 3 al igual que la matriz de los coeficientes.

Tomamos la matriz del apartado b) que era $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\1&3&4&5\end{pmatrix}$

La matriz de coeficientes sería $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&4\end{pmatrix}$.

Hemos comprobado en el apartado b) que la matriz A tiene rango 3 y la matriz de coeficientes también, pues su determinante es no nulo (calculado arriba). Por lo que la matriz A es la matriz ampliada de un sistema compatible determinado.

d) Para que sea la matriz ampliada de un sistema compatible indeterminado debe ocurrir lo planteado en el apartado a).

$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\2&3&4&5\end{pmatrix}$ tiene rango 2 pues la 3ª fila es combinación lineal de la 1ª y 2ª. El rango de la matriz de coeficientes también es 2, pues $\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\2&3&4\end{vmatrix}=0$ y el menor $\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}=2-1=1\neq 0$ y el número de incógnitas son 3. Sistema compatible indeterminado.

e) Para que sea incompatible el rango de la matriz ampliada debe ser 3 y la de la matriz de coeficientes 2. Nos sirve $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\1&2&3&5\end{pmatrix}$.

Comprobamos el rango de la matriz de coeficientes.

$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$ tiene la fila 2ª y 3ª iguales, el rango no es 3 y si tomamos el menor que resulta de quitar fila y columna 3ª tiene determinante $\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}=2-1=1\neq 0$, por lo que el rango es 2.

Comprobamos el rango de la matriz ampliada.

$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\1&2&3&5\end{pmatrix}$. Consideramos el menor que resulta al quitar la columna 1ª →

$\begin{vmatrix}1&1&1\\2&3&4\\2&3&5\end{vmatrix}=15-8-6-6-10-12=-27\neq 0$.

El rango de la ampliada es 3 y el de la matriz de coeficientes es 2, por lo que el sistema sería incompatible.

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{x^2-1} & si \quad x<1, x\neq -1\\ \dfrac{x^2+1}{4x} & si \quad x\geq 1\end{cases}$, se pide:

a) (0.5 puntos) Calcular *f(0)* y $(f\circ f)(0)$.

b) (1.25 puntos) Estudiar la continuidad y derivabilidad de *f(x)* en *x = 1* y determinar si en dicho punto existe un extremo relativo.

c) (0.75 puntos) Estudiar sus asíntotas.

a) $f(0)=\dfrac{0-1}{0^2-1}=1$

$$(f\circ f)(0)=f\left(f(0)\right)=f(1)=\frac{1^2+1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

b) Para ser continua en *x = 1* debe cumplirse:

- Existe $f(1)=\dfrac{1^2+1}{4}=\dfrac{1}{2}$
- Existe $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x-1}{x^2-1}=\dfrac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}(x+1)}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{2}\\ \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2+1}{4x}=\dfrac{1}{2}\end{array}\right\}=\dfrac{1}{2}$
- $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)=\dfrac{1}{2}$

La función es continua en *x = 1*.

Para ser derivable en *x = 1* deben coincidir las derivadas laterales.
Antes de derivar simplifico la función

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{x^2-1}=\dfrac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{1}{x+1} & si \quad x<1, x\neq -1\\ \dfrac{x^2+1}{4x} & si \quad x\geq 1\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{-1}{(x+1)^2} & si\ x<1, x\neq -1\\ \dfrac{2x\cdot 4x-4\left(x^2+1\right)}{(4x)^2}=\dfrac{8x^2-4x^2-4}{(4x)^2}=\dfrac{4x^2-4}{(4x)^2} & si \quad x>1\end{cases}$$

Por lo que las derivadas laterales en *x = 1* son:

$$\left.\begin{array}{l}f'(1^-)=\dfrac{-1}{(1+1)^2}=-\dfrac{1}{4}\\ f'(1^+)=\dfrac{4-4}{(4)^2}=0\end{array}\right\}\text{ No coinciden, por lo que no es derivable en } x=1$$

Para ver si hay un extremo en *x = 1* no podemos utilizar la derivada. Veamos cómo evoluciona la función antes y después de *x = 1*.

Antes de 1 la derivada es $f'(x)=\frac{-1}{(x+1)^2}$ que siempre es negativa, por lo que la función decrece antes de *x = 1*.

Después de 1 la derivada es $f'(x)=\frac{4x^2-4}{(4x)^2}=\frac{x^2-1}{4x^2}$ que de 1 en adelante siempre es positiva, por lo que la función crece después de *x = 1*.

La función es continua en *x = 1*, decrece antes y crece después, por lo que en *x = 1* hay un mínimo relativo.

c) Siendo la definición de la función: $f(x)=\begin{cases}\frac{x-1}{x^2-1} & si \quad x<1, x\neq -1\\ \frac{x^2+1}{4x} & si \quad x\geq 1\end{cases}$ estudiamos las asíntotas en las dos ramas de la función.

En x < 1 la función es una fracción cuyo denominador se anula en x = –1 y x = 1.
Comprobamos los límites de la función en esos dos puntos:

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{-2}{0}=\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}(x+1)}=\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$$

En x >1 la definición de la función es una fracción cuyo denominador se anula en x = 0, pero no pertenece al dominio de definición de la función.

Asíntota vertical. $x=a$

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{-2}{0}=\infty$$

La asíntota vertical es $x=-1$

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to -\infty} f(x)=\lim_{x\to -\infty}\frac{x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to -\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to -\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{-\infty}=0$$

$$b=\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2+1}{4x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2}{4x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x}{4}=\frac{+\infty}{4}=+\infty$$

La asíntota horizontal en –∞ es $y=0$

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

En –∞ no existe pues hay asíntota horizontal.
Hagamos los cálculos en +∞.

$$m=\lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{x^2+1}{4x}}{x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2+1}{4x^2}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\cancel{x^2}}{4\cancel{x^2}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

$$n=\lim_{x\to +\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x^2+1}{4x}-\frac{x}{4}\right)=\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2+1-x^2}{4x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{4x}=\frac{1}{\infty}=0$$

La asíntota oblicua en +∞ es $y=\frac{1}{4}x$

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dados el punto *P(3, 3, 0)* y la recta $r \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{0}$, se pide:

a) (0.75 puntos) Escribir la ecuación del plano que contiene al punto *P* y a la recta *r*.

b) (1 punto) Calcular el punto simétrico de *P* respecto de *r*.

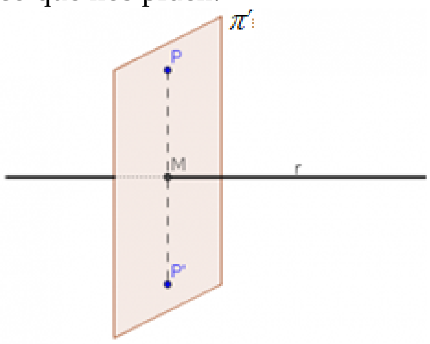
c) (0.75 puntos) Hallar dos puntos *A* y *B* de *r* tales que el triángulo *ABP* sea rectángulo, tenga área $\frac{3}{\sqrt{2}}$ y el ángulo recto en A.

a) La recta *r* tiene como vector director $\vec{v_r} = (-1,1,0)$ y pasa por el punto Q(2, 0, –1).
El plano que nos piden pasa por *P(3, 3, 0)* y al contener a la recta *r* tiene como vectores directores $\vec{v_r}$ y $\overrightarrow{PQ}$.

$$\left.\begin{array}{l} P(3,\ 3,\ 0) \in \pi \\ \vec{u} = \vec{v_r} = (-1,1,0) \\ \vec{v} = \overrightarrow{PQ} = (2,0,-1)-(3,3,0) = (-1,-3,-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-3 & y-3 & z \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$-x+3+3z+z-y+3=0 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv x+y-4z-6=0}$$

b) Llamemos P´ al punto simétrico que nos piden.



Buscamos las coordenadas del punto P´ del dibujo.
Hallamos la ecuación del plano perpendicular a la recta que pasa por el punto P. El punto de corte de recta y plano será el punto M.
El punto P´ (simétrico de P respecto de la recta *r*) tendrá coordenadas tales que M sea el punto medio del segmento PP´.
El plano tiene como vector normal el director de la recta $\vec{v_r} = (-1,1,0)$, por lo que su ecuación es $-x+y+D=0$, como pasa por el punto *P(3, 3, 0)* entonces $-3+3+D=0 \Rightarrow D=0$.
La ecuación del plano es $\pi' \equiv -x+y=0$.
Hallamos el punto M resolviendo el sistema.

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{0} \\ \pi' \equiv -x+y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} x = 2-\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 \end{cases} \\ \pi' \equiv -x+y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow -2+\lambda+\lambda=0 \Rightarrow 2\lambda = 2 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow$$

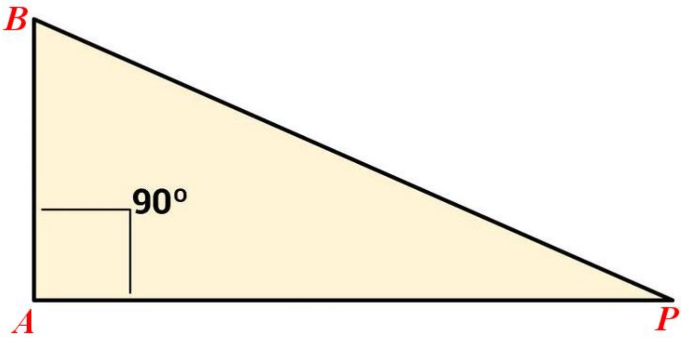
$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2-1 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow M(1,1,-1)$$

El punto M(1,1 ,–1) es el punto medio del segmento P´P.
Si P´(a,b,c) entonces:

$$(1,1,-1)=\frac{(a,b,c)+(3,3,0)}{2}\Rightarrow(2,2,-2)=(a+3,b+3,c)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{matrix}a+3=2\\b+3=2\\c=-2\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}a=-1\\b=-1\\c=-2\end{matrix}\right\}\Rightarrow\boxed{P´(-1,-1,-2)}$$

c) La recta r tiene ecuaciones paramétricas $r\equiv\begin{cases}x=2-\lambda\\y=\lambda\\z=-1\end{cases}$, por lo que los puntos buscados tienen coordenadas $A(2-a,a,-1)$ y $B(2-b,b,-1)$.



El triángulo es rectángulo en el vértice A, entonces los vectores $\overrightarrow{AP}$ y $\overrightarrow{AB}$ forman 90º y su producto escalar es 0.

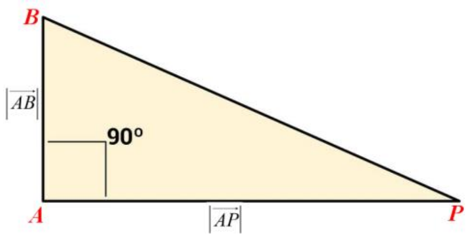
$$\left.\begin{matrix}\overrightarrow{AP}=(3,3,0)-(2-a,a,-1)=(1+a,3-a,1)\\\overrightarrow{AB}=(2-b,b,-1)-(2-a,a,-1)=(a-b,b-a,0)\end{matrix}\right\}\Rightarrow\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(1+a,3-a,1)(a-b,b-a,0)=0\Rightarrow(1+a)(a-b)+(3-a)(b-a)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(1+a)(a-b)-(3-a)(a-b)=0\Rightarrow(a-b)[1+a-3+a]=0\Rightarrow\begin{cases}a-b=0\to a=b\\o\\2a-2=0\to a=1\end{cases}$$

Si $a=b\rightarrow\left.\begin{matrix}\overrightarrow{AP}=(1+a,3-a,1)\\\overrightarrow{AB}=(0,0,0)\end{matrix}\right\}$ no nos sirve esta opción pues si $\overrightarrow{AB}=(0,0,0)$ entonces los puntos A y B serían los mismos y no se formaría triángulo.

Si $a=1\rightarrow\left.\begin{matrix}\overrightarrow{AP}=(2,2,1)\\\overrightarrow{AB}=(1-b,b-1,0)\end{matrix}\right\}$ Como el área del triángulo es $\frac{3}{\sqrt{2}}$ entonces:



$$Área=\frac{Base\cdot Altura}{2}=\frac{\left|\overrightarrow{AP}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|}{2}=\frac{3}{\sqrt{2}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left|\overrightarrow{AP}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|=\frac{6}{\sqrt{2}}\Rightarrow\sqrt{4+4+1}\sqrt{(1-b)^2+(b-1)^2}=\frac{6}{\sqrt{2}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\sqrt{2(1-b)^2} = \frac{6}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sqrt{2(1-b)^2} = \frac{2}{\sqrt{2}} \Rightarrow 2(1-b)^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2 \Rightarrow 2(1-b)^2 = \frac{4}{2} \Rightarrow (1-b)^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1-b = \sqrt{1} \Rightarrow \begin{cases} 1-b = 1 \Rightarrow b = 0 \\ 1-b = -1 \Rightarrow b = 2 \end{cases}$$

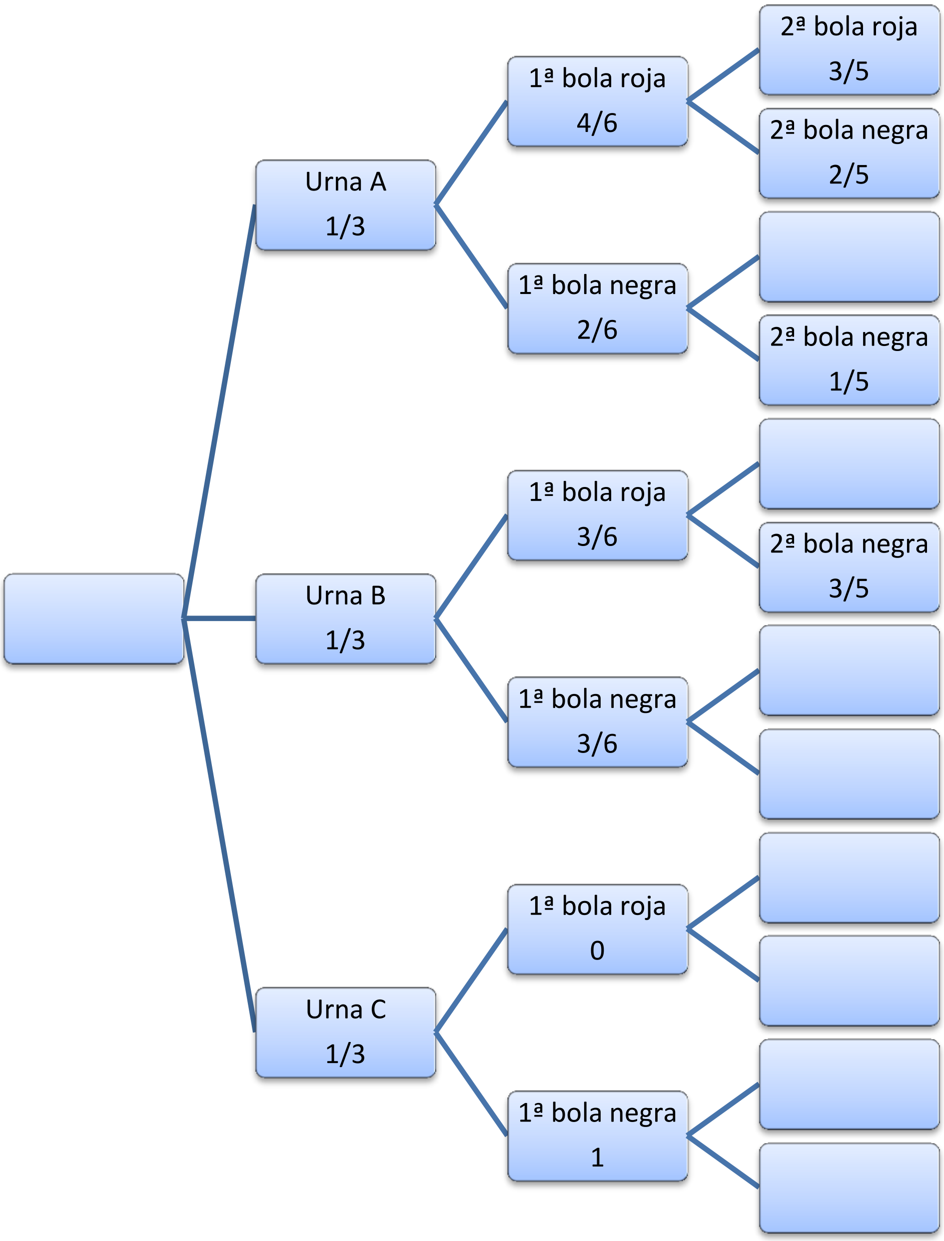
Los puntos son:

Para *a = 1* y *b = 0* → $A(1,1,-1)$ y $B(2,0,-1)$

o bien para *a = 1* y *b = 2* → $A(1,1,-1)$ y $B(0,2,-1)$

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Se tienen tres urnas A, B y C. La urna A contiene 4 bolas rojas y 2 negras, la urna B contiene 3 bolas de cada color y la urna C contiene 6 bolas negras. Se elige una urna al azar y se extraen de ella dos bolas de manera consecutiva y sin reemplazamiento. Se pide:
a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que la primera bola extraída sea roja.
b) (1 punto) Calcular la probabilidad de que la primera bola extraída sea roja y la segunda sea negra.
c) (0.5 puntos) Sabiendo que la primera bola extraída es roja, calcular la probabilidad de que la segunda sea negra.

Realizamos un diagrama de árbol. Aunque en este caso se obtiene un diagrama algo complejo, pero nos ayuda a entender la situación planteada y cómo influye lo ocurrido en la 1ª extracción en la probabilidad de lo que ocurra en la 2ª. Dejamos opciones sin rellenar pues no es necesario para calcular lo pedido en el ejercicio.



a) Ocurre de dos formas diferentes y su probabilidad es:

$$P\left(1^{\text{a}} \text{ bola roja}\right) = P\left(\text{Elegir urna A}\right) P\left(1^{\text{a}} \text{ bola roja / Haber elegido urna A}\right) +$$
$$+P\left(\text{Elegir urna B}\right) P\left(1^{\text{a}} \text{ bola roja / Haber elegido urna B}\right) +$$
$$+P\left(\text{Elegir urna C}\right) P\left(1^{\text{a}} \text{ bola roja / Haber elegido urna C}\right) =$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{6} + 0 = \frac{4+3}{18} = \boxed{\frac{7}{18} = 0,384}$$

b) Puede ocurrir de dos formas distintas.

$$P\left(1^{\text{a}} \text{ bola roja y } 2^{\text{a}} \text{ negra}\right) =$$
$$= P\left(\text{Elegir urna A}\right) P\left(1^{\text{a}} \text{ roja / urna A}\right) P\left(2^{\text{a}} \text{ negra / urna A y sacar } 1^{\text{a}} \text{ roja}\right) +$$
$$+P\left(\text{Elegir urna B}\right) P\left(1^{\text{a}} \text{ roja / urna B}\right) P\left(2^{\text{a}} \text{ negra / urna B y sacar } 1^{\text{a}} \text{ roja}\right) =$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{8+9}{90} = \boxed{\frac{17}{90} = 0,182}$$

c) Utilizamos la fórmula de la probabilidad condicionada.

$$P\left(2^{\text{a}} \text{ sea negra / } 1^{\text{a}} \text{ es roja}\right) = \frac{P\left(1^{\text{a}} \text{ es roja } \cap 2^{\text{a}} \text{ sea negra}\right)}{P\left(1^{\text{a}} \text{ es roja}\right)} = \frac{17/90}{7/18} = \boxed{\frac{17}{35} = 0,486}$$

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $I=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, se pide:

a) (1 punto) Calcular, si es posible, la inversa de la matriz *A*.

b) (0.5 puntos) Calcular la matriz $C=A^2-2I$.

c) (1 punto) Calcular el determinante de la matriz $D=ABB^t$ (donde B^t denota la matriz traspuesta de *B*).

a) $|A|=\begin{vmatrix}0 & -1 & 2\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=0+1+0-2+2+0=1\neq 0$

Existe la inversa y la calculamos.

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}0 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -3 & -2 & 4\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

b)

$$C=A^2-2I=\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$C=\begin{pmatrix}0-2+2 & 0-1+0 & 0+1+2\\ 0+1+0 & -2+1+0 & 4-1-1\\ 0+0+1 & -1+0+0 & 2+0+1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$\boxed{C=\begin{pmatrix}-2 & -1 & 3\\ 1 & -3 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}}$$

c) Calculemos la matriz D y luego su determinante.

$$D=ABB^t=\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix}-2-2 & -1 & 2\\ 10+2+1 & 4+1 & -2-1\\ 5-1 & 2 & -1+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & -1 & 2\\ 13 & 5 & -3\\ 4 & 2 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{|D|=\begin{vmatrix}-4 & -1 & 2\\ 13 & 5 & -3\\ 4 & 2 & 0\end{vmatrix}=0+12+52-40-24=0}$$

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

La potencia generada por una pila viene dada por la expresión $P(t)=25te^{-t^2/4}$, donde *t > 0* es el tiempo de funcionamiento.

a) (0.5 puntos) Calcular hacia qué valor tiende la potencia generada por la pila si se deja en funcionamiento indefinidamente.

b) (0.75 puntos) Determinar la potencia máxima que genera la pila y el instante en el que se alcanza.

c) (1.25 puntos) La energía total generada por la pila hasta el instante *t*, *E(t)*, se relaciona con la potencia mediante $E'(t)=P(t)$, con $E(0)=0$. Calcular la energía producida por la pila entre el instante *t = 0* y el instante *t = 2*.

a) Esto significa calcular el límite de la función cuando *t* tiende a +∞.

$$\lim_{t\to+\infty} P(t)=\lim_{t\to+\infty} 25te^{-t^2/4}=\lim_{t\to+\infty}\frac{25t}{e^{t^2/4}}=\frac{\infty}{\infty}=\text{Indeterminación}(L'Hôpital)=$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{25}{e^{t^2/4}\frac{2t}{4}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{25}{\frac{t}{2}e^{t^2/4}}=\frac{25}{\infty}=0$$

La potencia generada por la pila tiende a cero.

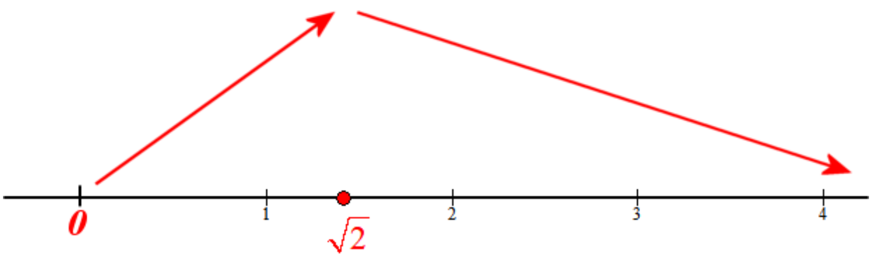
b) Utilizamos la derivada.

$$P'(t)=25e^{-t^2/4}+25t\frac{-2t}{4}e^{-t^2/4}=25e^{-t^2/4}-25\frac{t^2}{2}e^{-t^2/4}=25e^{-t^2/4}\left(1-\frac{t^2}{2}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P'(t)=0\Rightarrow 25e^{-t^2/4}\left(1-\frac{t^2}{2}\right)=0\Rightarrow\begin{cases}1-\dfrac{t^2}{2}=0\rightarrow 1=\dfrac{t^2}{2}\rightarrow t^2=2\rightarrow t=+\sqrt{2}\\ e^{-t^2/4}=0\rightarrow \text{Imposible}\end{cases}$$

Veamos la evolución de la potencia entre 0 y $\sqrt{2}$, y después de $\sqrt{2}$.

- En $\left(0,\sqrt{2}\right)$ tomo *t = 1* y la derivada vale $P'(1)=25e^{-1/4}\left(1-\frac{1^2}{2}\right)=\frac{25e^{-1/4}}{2}>0$. La potencia crece en $\left(0,\sqrt{2}\right)$.
- En $\left(\sqrt{2},+\infty\right)$ tomo *t = 2* y la derivada vale $P'(2)=25e^{-2^2/4}\left(1-\frac{2^2}{2}\right)=-25e^{-1}<0$. La potencia decrece en $\left(\sqrt{2},+\infty\right)$.



La potencia presenta un máximo valor en $t=\sqrt{2}=1,41$. Siendo esta potencia máxima de

$$P(t)=25\sqrt{2}e^{-\left(\sqrt{2}\right)^2/4}=25\sqrt{2}e^{-1/2}=25\sqrt{\frac{2}{e}}=21,44$$

c) Si $E'(t)=P(t)$ entonces la energía es la primitiva de la $P(t)$ con $E(0)=0$.

Calculo la integral de $P(t)$.

$$\int P(t)dt = \int 25te^{-t^2/4}dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ -\dfrac{t^2}{4} = x \Rightarrow -\dfrac{2t}{4}dt = dx \\ -\dfrac{t}{2}dt = dx \\ dt = -\dfrac{2}{t}dx \end{array} \right\} = 25\int te^x\left(-\frac{2}{t}dx\right) = -50\int e^x dx = -50e^x$$

Deshaciendo el cambio de variable $-\dfrac{t^2}{4} = x \Rightarrow E(t) = \int P(t)dt = -50e^{-t^2/4} + K$

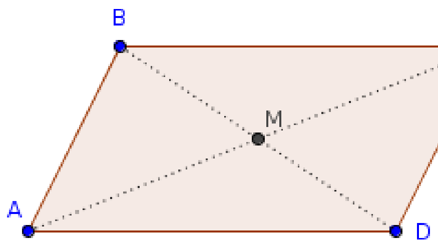
Como $E(0) = 0 \Rightarrow E(0) = -50e^{-0^2/4} + K = 0 \Rightarrow -50 + K = 0 \Rightarrow K = 50$

La función Energía tiene la expresión $E(t) = -50e^{-t^2/4} + 50$

Para calcular la energía producida por la pila entre el instante *t = 0* y el instante *t = 2*, hacemos la integral definida de la potencia entre 0 y 2.

$$\int_0^2 P(t)dt = \int_0^2 25te^{-t^2/4}dt = \left[-50e^{-t^2/4}\right]_0^2 = -50e^{-2^2/4} - \left(-50e^{-0^2/4}\right) = \boxed{\frac{-50}{e} + 50 = 31,6}$$

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Del paralelogramo *ABCD*, se conocen los vértices consecutivos A(1, 0, –1), B(2, 1, 0) y C(4, 3, –2). Se pide:
a) (1 punto) Calcular una ecuación de la recta que pasa por el punto medio del segmento *AC* y es perpendicular a los segmentos *AC* y *BC*.
b) (1 punto) Hallar las coordenadas del vértice *D* y el área del paralelogramo resultante.
c) (0.5 puntos) Calcular el coseno del ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.



a) La recta que nos piden es una recta que pasa por el punto M y es perpendicular al plano que define el paralelogramo y su vector director es el producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{BC}$.
Hallamos las coordenadas del punto M.

$$M = \frac{(1,0,-1)+(4,3,-2)}{2} = \left(\frac{5}{2},\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)$$

Hallamos las coordenadas del vector director de la recta $\overrightarrow{v_r}$.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{BC} = (2,1,0)-(1,0,-1) = (1,1,1)\\ \overrightarrow{AC} = (4,3,-2)-(1,0,-1) = (3,3,-1)\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -i+3j+3k-3k+j-3i = -4i+4j \Rightarrow \overrightarrow{v_r} = (-4,4,0)$$

Tomaremos como vector director el anterior simplificado y la ecuación de la recta será:

$$\left.\begin{array}{l} M = \left(\frac{5}{2},\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right) \in r \\ \overrightarrow{v_r} = (-4,4,0) \to \overrightarrow{u_r} = (-1,1,0)\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{r \equiv \begin{cases} x = \frac{5}{2}-\lambda \\ y = \frac{3}{2}+\lambda \\ z = -\frac{3}{2}\end{cases}}$$

b) Para hallar las coordenadas de D basta sumarle al punto C el vector $\overrightarrow{BA}$.

$$\overrightarrow{BA} = (1,0,-1)-(2,1,0) = (-1,-1,-1) \Rightarrow D = C+\overrightarrow{BA} = (4,3,-2)+(-1,-1,-1) = (3,2,-3)$$

El valor del área se obtiene con el módulo del producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{BC}$, que ya hemos calculado.

$$\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{AC} = (-4,4,0) \Rightarrow \left|\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{16+16} = \sqrt{32}$$

Área del paralelogramo ABCD $= \left|\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{32} = \boxed{5,66\,u^2}$

c) Utilizamos el producto escalar de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(2,1,0)-(1,0,-1)=(1,1,1)\\ \overrightarrow{AC}=(4,3,-2)-(1,0,-1)=(3,3,-1)\end{array}\right\}\Rightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(1,1,1)(3,3,-1)=3+3-1=5$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\Rightarrow 5=\sqrt{1+1+1}\sqrt{9+9+1}\cdot\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{5}{\sqrt{3}\sqrt{19}}=0,66}$$

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.
En un experimento aleatorio hay dos sucesos independientes *X*, *Y*. Sabemos que $P(X)=0.4$ y que $P\left(X\cap\overline{Y}\right)=0.08$ (donde $\overline{Y}$ es el suceso complementario de *Y*). Se pide:

a) (1 punto) Calcular $P(Y)$.

b) (0.5 puntos) Calcular $P(X\cup Y)$.

c) (1 punto) Si *X* es un resultado no deseado, de manera que consideramos que el experimento es un ´ éxito cuando NO sucede *X*, y repetimos el experimento en 8 ocasiones, hallar la probabilidad de haber tenido éxito al menos 2 veces.

a) Si son independientes los sucesos *X* e *Y* se cumple que $P(X\cap Y)=P(X)P(Y)=0.4\cdot P(Y)$.

$$P(X)=P(X\cap Y)+P(X\cap\overline{Y})\Rightarrow 0.4=0.4\cdot P(Y)+0.08\Rightarrow 0.4\cdot P(Y)=0.4-0.08\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{P(Y)=\frac{0.32}{0.4}=0.8}$$

b) $P(X\cup Y)=P(X)+P(Y)-P(X\cap Y)=0.4+0.8-0.4\cdot 0.8=\boxed{0.88}$

c) Es una binomial donde n = Número de repeticiones = 8
$p=P(\acute{e}xito)=P\left(\overline{X}\right)=1-P(X)=1-0.4=0.6$
Sea Z = Número de éxitos en 8 repeticiones.
Z = B(8, 0.6)

$$P(Z\geq 2)=1-P(Z<2)=1-\left[P(Z=0)+P(Z=1)\right]=$$
$$=1-\left[\binom{8}{0}0.6^0\cdot 0.4^8+\binom{8}{1}0.6^1\cdot 0.4^7\right]=1-\left[0.4^8+8\cdot 0.6\cdot 0.4^7\right]=\boxed{0.991}$$

La probabilidad de tener éxito al menos 2 veces es de 0.991.