Septiembre 2017 - Opción A

Problema 18.7.1 *(3 puntos)* Dada la función $f(x)=\begin{cases} xe^{2x} & \text{si} \quad x<0 \\ \\ \dfrac{\ln(x+1)}{x+1} & \text{si} \quad x\geq 0 \end{cases}$

donde ln significa logaritmo neperiano, se pide:

a) (1 punto) Estudiar la continuidad y derivabilidad de $f(x)$ en $x=0$.

b) (1 punto) Calcular $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\longrightarrow \infty} f(x)$.

c) (1 punto) Calcular $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$.

Solución:

a) Continuidad en $x=0$:

$\lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} xe^{2x}=0$, $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow 0^-}\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}=0$ y $f(0)=0 \Longrightarrow f$ es continua en $x=0$.

Derivabilidad en $x=0$:

$f'(x)=\begin{cases} (1+2x)e^{2x} & \text{si} \quad x<0 \\ \\ \dfrac{1-\ln(x+1)}{(x+1)^2} & \text{si} \quad x<0 \end{cases}$; $f'(0^-)=1$ y $f'(0^+)=1 \Longrightarrow f$ es derivable en $x=0$.

b) $\lim\limits_{x\longrightarrow \infty}\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\longrightarrow \infty}\dfrac{\frac{1}{x+1}}{1}=0$

$\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} xe^{2x}=\lim\limits_{t\longrightarrow \infty} -te^{-2t}=\lim\limits_{t\longrightarrow \infty}\dfrac{-t}{e^{2t}}=\left[\dfrac{-\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{t\longrightarrow \infty}\dfrac{-1}{2e^{2t}}=0$

c)

$$\int xe^{2x}\,dx = \left[\begin{array}{lcl} u = x & \Longrightarrow & du = dx \\ dv = e^{2x}dx & \Longrightarrow & v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{array} \right] = \frac{xe^{2x}}{2} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\,dx =$$

$$\frac{xe^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C = \frac{(2x-1)e^{2x}}{4} + C$$

$$\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \frac{3-e^2}{4e^2} = -0,148$$

Problema 18.7.2 *(3 puntos)* Dadas las rectas $r_1 \equiv \left\{ \begin{array}{l} 6x - y - z = 1 \\ 2x - y + z = 1 \end{array} \right.$ y $r_2 \equiv \left\{ \begin{array}{l} 3x - 5y - 2z = 3 \\ 3x + y + 4z = 3 \end{array} \right.$ se pide:

a) (1 punto) Estudiar la posición relativa de r_1 y r_2.

b) (1 punto) Calcular la distancia entre las dos rectas.

c) (1 punto) Hallar la ecuación del plano que contiene a r_1 y al punto $P(1, 2, 3)$.

Solución:

a) $r_1 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_{r_1}} = (1, 4, 2) \\ P_{r_1}(0, -1, 0) \end{array} \right.$, $r_2 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_{r_2}} = (-1, -1, 1) \\ P_{r_2}(1, 0, 0) \end{array} \right.$ $\overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}} = (1, 1, 0)$

$$[\overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}}, \overrightarrow{u_{r_1}}, \overrightarrow{u_{r_2}}] = \left| \begin{array}{rrr} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{array} \right| = 3 \neq 0 \Longrightarrow r_1 \text{ y } r_2 \text{ se cruzan}$$

b)

$$d(r_1, r_2) = \frac{|[\overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}}, \overrightarrow{u_{r_1}}, \overrightarrow{u_{r_2}}]|}{|\overrightarrow{u_{r_1}} \times \overrightarrow{u_{r_2}}|} = \frac{|3|}{3\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}\ u$$

$$|\overrightarrow{u_{r_1}} \times \overrightarrow{u_{r_2}}| = | \left| \begin{array}{rrr} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{array} \right| | = |3(2, -1, 1)| = 3\sqrt{6}$$

c)

$$\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{P_{r_1}P} = (1, 3, 3) \\ \overrightarrow{u_{r_1}} = (1, 4, 2) \\ P_{r_1}(0, -1, 0) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi : \left| \begin{array}{ccc} x & y+1 & z \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow \pi : 6x - y - z - 1 = 0$$

Problema 18.7.3 *(2 puntos)* Se dispone de tres aleaciones A, B y C que contienen, entre otros metales, oro y plata en las proporciones indicadas en la tabla adjunta.

	Oro (%)	Plata (%)
A	100	0
B	75	15
C	60	22

Se quiere obtener un lingote de 25 gramos, con una proporción del 72 % de oro y una proporción del 16 % de plata, tomando x gramos de A, y gramos de B y z gramos de C. Determínense las cantidades x, y, z.

Solución:

$$\left\{\begin{array}{c} x+y+z=25 \\ x+0,75y+0,60z=0,72\cdot 25 \\ 0,15y+0,22z=0,16\cdot 25 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x+y+z=25 \\ 100x+75y+60z=1800 \\ 15y+22z=400 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x=3 \\ y=12 \\ z=10 \end{array}\right.$$

Problema 18.7.4 *(2 puntos)* Dados dos sucesos, A y B, de un experimento aleatorio, con probabilidades tales que $p(A)=\dfrac{4}{9}$, $p(B)=\dfrac{1}{2}$ y $p(A\cup B)=\dfrac{2}{3}$ se pide:

a) (1 punto) Comprobar si los sucesos A y B son independientes o no.

b) (1 punto) Calcular $p(\overline{A}|B)$, donde $\overline{A}$ denota el suceso complementario de A.

Solución:

$$P(A)=\frac{4}{9}\quad P(B)=\frac{1}{2}\quad P(A\cup B)=\frac{2}{3}$$

a) $P(A)\cdot P(B)=\dfrac{4}{9}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{9}$

$$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=\frac{4}{9}+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}=\frac{5}{18}$$

Luego $P(A\cap B)\neq P(A)\cdot P(B)\Longrightarrow$ los sucesos A y B no son independientes.

b) $P(\overline{A}|B)=\dfrac{P(\overline{A}\cap B)}{P(B)}=\dfrac{P(B)-P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{5}{18}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{4}{9}$

18.8. Septiembre 2017 - Opción B

Problema 18.8.1 *(3 puntos)* Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y la matriz identidad $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) (0,5 puntos) Calcular la matriz $B = (A - I)(2I + 2A)$.

b) (1,5 puntos) Determinar el rango de las matrices $A-I$, A^2-I y A^3-I.

c) (1 punto) Calcular la matriz inversa de A^6, en caso de que exista.

Solución:

a) $B = (A-I)(2I+2A) = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $A - I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $|A - I| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Longrightarrow$
Rango$(A - I) = 2$.

$$A^2 - I = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{Rango}(A^2 - I) = 1.$$

$A^3 - I = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $|A^3 - I| = 0$ y $\begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0 \Longrightarrow$
Rango$(A - I) = 2$.

c) $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$:

$$A^n = \begin{cases} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{si } n \text{ es par} \\ \\ \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \Longrightarrow A^6 = \begin{pmatrix} 64 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A^6)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/64 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 18.8.2 *(3 puntos)* Se considera la función $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x^2+1}$ y se pide:

a) (1 punto) Obtener la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

b) (1 punto) Estudiar la existencia de asíntotas horizontales y verticales de la función f y, en su caso, determinarlas.

c) (1 punto) Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y sus extremos relativos en el caso de que existan.

Solución:

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{x^2+1} \Longrightarrow f'(x) = -\frac{e^{-x}(x^2+2x+1)}{(x^2+1)^2}$$

a) $b = f(0) = 1$ y $m = f'(0) = -1 \Longrightarrow y = -x + 1$

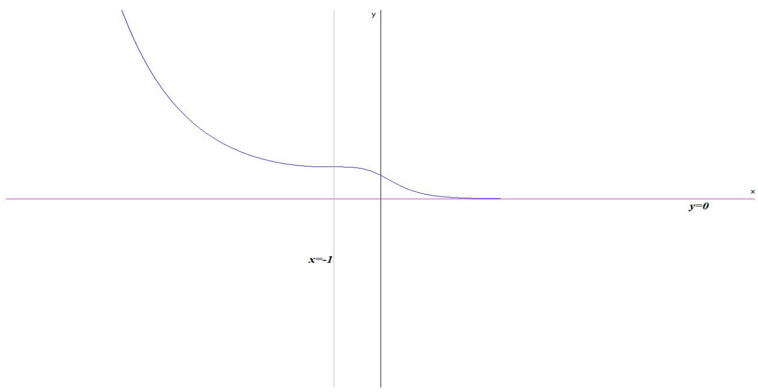
b)
- Verticales: No hay, el denominador $f(x)$ no se anula.
- Horizontales:

$$\lim_{x\longrightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{x^2+1} = 0 \Longrightarrow y = 0$$

$$\lim_{x\longrightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{x^2+1} = \lim_{t\longrightarrow +\infty} \frac{e^{t}}{t^2+1} = \infty$$

Luego no hay asíntota horizontal cuando $x \longrightarrow -\infty$ pero si la hay cuando $x \longrightarrow +\infty$ y es $y = 0$.

c) $f'(x) = -\dfrac{e^{-x}(x^2+2x+1)}{(x^2+1)^2} = 0 \Longrightarrow x = -1$, en este punto la función pasa de decrecer a decrecer y en el resto de puntos la función es siempre decreciente ($f'(x) < 0$ en $\mathbb{R} - \{-1\}$), luego no tiene extremos relativos.



Problema 18.8.3 *(2 puntos)* Sea r la recta que pasa por los puntos $P_1(3,2,0)$ y $P_2(7,0,2)$. Se pide:

a) (1 punto) Hallar la distancia del punto $Q(3,5,-3)$ a la recta r.

b) (1 punto) Hallar el punto de corte de la recta r con el plano perpendicular a r que pasa por el punto Q.

Solución:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2,-1,1) \\ P_r(3,2,0) \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = 3+2\lambda \\ y = 2-\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

a) $\overrightarrow{P_rQ} = (0,3,-3)$

$$d(Q,r) = \frac{|\overrightarrow{P_rQ} \times \overrightarrow{u_r}|}{|\overrightarrow{u_r}|} = \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{3}\ u$$

$$|\overrightarrow{P_rQ} \times \overrightarrow{u_r}| = | \left| \begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 0 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{array} \right| | = |(0,-6,-6)| = 6\sqrt{2}$$

b) Calculamos $\pi \perp r \Longrightarrow \pi : 2x - y + z + \lambda = 0$, imponemos que $Q \in \pi \Longrightarrow 6 - 5 - 3 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 2 \Longrightarrow \pi : 2x - y + z + 2 = 0$.

Calculamos el punto de corte de r con π: $2(3+2\lambda) - (2-\lambda) + \lambda + 2 = 0 \Longrightarrow \lambda = -1 \Longrightarrow$ el punto de corte será: $Q'(1,3,-1)$

Problema 18.8.4 *(2 puntos)* Se considera el triángulo cuyos vértices son los puntos $A(1,3,-1)$, $B(3,1,0)$ y $C(2,5,1)$ y se pide

a) (1 punto) Determinar razonadamente si el triángulo es equilátero, isósceles o escaleno.

b) (1 punto) Obtener las medidas de sus tres ángulos.

Solución:

$$\overrightarrow{AB} = (2,-2,1), \quad \overrightarrow{AC} = (1,2,2), \quad \overrightarrow{BC} = (-1,4,1)$$

a) $|\overrightarrow{AB}| = 3$, $|\overrightarrow{AC}| = 3$ y $|\overrightarrow{BC}| = 3\sqrt{2}$. Como tiene dos lados iguales es un triángulo isósceles.

b) $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \dfrac{2-4+2}{9} = 0 \Longrightarrow \alpha = 90^{\circ}$, luego se trata de un triángulo rectángulo e isósceles y los otros dos ángulos tienen que ser iguales $\beta = \gamma \Longrightarrow \beta = \gamma = 45^{\circ}$.