UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS
UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO
Curso **2020-2021**
MATERIA: MATEMÁTICAS II

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente **cuatro** preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen.

TIEMPO Y CALIFICACIÓN: 90 minutos. Cada pregunta se calificará sobre 2.5 puntos.

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ m & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) (1.25 puntos) Determine los valores del parámetro real m para los que la matriz A es invertible y calcule su inversa en esos casos.

b) (0.75 puntos) Estudie el sistema de ecuaciones $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B$ en función del parámetro m.

c) (0.5 puntos) Resuelva el sistema del apartado anterior para el valor $m = 2$.

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se quiere construir un acuario con forma de paralelepípedo recto, con tapa y base cuadradas. La tapa es de metacrilato, la base es de un material metálico y las caras verticales, de cristal. El metacrilato tiene un precio de 15 euros/m^2, el material metálico, de 90 euros/m^2, y el cristal, de 25 euros/m^2.

a) (0.75 puntos) Exprese la altura del acuario en función del lado de la base, x, y del coste total del material utilizado, C.

b) (1.75 puntos) Con un presupuesto de 1260 euros, ¿cuál es el volumen máximo del acuario que se puede construir con estas características?

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Desde el punto $P_1 = (1, 1, -1)$ se ha trazado una recta, r, perpendicular a un plano, π. El punto de intersección del plano con la recta es $P_2 = (0, 0, 0)$. Se pide:

a) (1 punto) Hallar una ecuación de la recta r.

b) (1 punto) Hallar una ecuación del plano π.

c) (0.5 puntos) Hallar la distancia de P_1 al plano π.

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

En el primer cajón de una mesita de noche hay 6 calcetines rojos y 4 verdes. En el segundo cajón de dicha mesita hay 4 calcetines rojos y 10 verdes. Se extrae aleatoriamente uno de los calcetines del primer cajón para introducirlo en el segundo cajón. Se extraen posteriormente dos calcetines del segundo cajón. Calcule la probabilidad de que estos dos calcetines sean del mismo color.

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Una tienda *online* de productos *gourmet* elabora tres tipos de cafés exclusivos, el Gold Cuvée (a 7.85 euros/kg), el Paradiso (a 13.3 euros/kg) y el Cremissimo (a 24.85 euros/kg). Para ello utiliza solo dos tipos de grano, el Arábica y el Robusta. El Gold Cuvée tiene un 90 % de grano tipo Arábica, el Paradiso un 85 % y el Cremissimo un 80 %.
A lo largo de un mes han necesitado utilizar 27.1 kg de grano del tipo Robusta para atender todos los pedidos y han ingresado un total de 3112.5 euros. Sabiendo que se ha vendido doble cantidad de café Cremissimo que de las otras dos especialidades juntas, se pide calcular los kilogramos de grano del tipo Arábica que se han utilizado a lo largo de ese mes.

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea la función $f(x) = \sqrt[5]{(x-2)^2}$.

a) (0.5 puntos) Estudie su continuidad y derivabilidad en $[-2, 4]$.

b) (1.25 puntos) Analice crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos absolutos de f en $[-2, 4]$.

c) (0.75 puntos) Determine si la función $g(x) = f'(x)$ es continua en $x = 2$ y si tiene recta tangente en dicho punto.

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

En un laboratorio se lanza un rayo láser desde el punto $P(2, 3, -5)$ en la dirección del vector $\vec{v} = (-1, -2, 2)$, para que impacte en una placa metálica plana de ecuación $\pi \equiv 3x - 2y - 2z = 1$, con el fin de perforar un orificio.

a) (0.75 puntos) Calcule las coordenadas del punto de impacto.

b) (0.75 puntos) Si el ángulo entre el láser y el plano es menor a 45^o, el rayo será reflejado y no se realizará el orificio. Determine si ese es el caso.

c) (1 punto) Para optimizar la velocidad de perforación, se decide lanzar el rayo desde P en dirección perpendicular a π, y lanzar simultáneamente otro rayo, también perpendicular a π, desde un punto situado al otro lado del plano y a la misma distancia de π que P. ¿Dónde habría que situar el origen del segundo rayo para que ambos impacten en el mismo punto del plano?

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

El delantero de un equipo de fútbol, que suele marcar en tres quintas partes de sus disparos a puerta, ha de lanzar una tanda de penaltis en un entrenamiento.

a) (0.5 puntos) Calcule la probabilidad de no marcar si la tanda es de cuatro disparos.

b) (1 punto) Calcule la probabilidad de que marque más de dos penaltis en la tanda de cuatro disparos.

c) (1 punto) Calcule cuántos penaltis debería lanzar para que la probabilidad de marcar al menos un tanto sea mayor que 0.999.

MATEMÁTICAS II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN Y ESTÁNDARES EVALUADOS EN CADA PREGUNTA

En cada pregunta, aunque el procedimiento seguido sea diferente al propuesto en el documento soluciones, cualquier argumento válido que conduzca a la solución será valorado con la puntuación asignada.
Los estándares de aprendizaje del bloque 1 se evaluarán transversalmente en todos los ejercicios, penalizando en la calificación de cada respuesta la falta de justificación razonada o de precisión y valorando las estrategias, razonamientos y toma adecuada de decisiones.

A.1.

a) Planteamiento: 0.25 puntos. Determinación correcta de m: 0.25 puntos. Inversa: 0.75 puntos.
b) Planteamiento: 0.25 puntos. Solución correcta : 0.5 puntos.
c) Planteamiento: 0.25 puntos. Solución correcta : 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Realiza operaciones con matrices y aplica las propiedades de estas operaciones adecuadamente. Determina las condiciones para que una matriz tenga inversa y la calcula empleando el método más adecuado. Resuelve problemas susceptibles de ser representados matricialmente e interpreta los resultados obtenidos.

A.2.

a) Planteamiento: 0.5 puntos. Expresión de la altura: 0.25 puntos.
b) Planteamiento: 0.75 puntos. Cálculo de la derivada: 0.5 puntos. Punto crítico: 0.25 puntos. Volumen máximo: 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Plantea problemas de optimización relacionados con la geometría o con las ciencias experimentales y sociales, los resuelve e interpreta el resultado obtenido dentro del contexto.

A.3.

a) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.
b) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.
c) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Determina ángulos, distancias, áreas y volúmenes utilizando los productos escalar, vectorial y mixto, aplicándolos en cada caso a la resolución de problemas geométricos. Obtiene las ecuaciones de rectas y planos en diferentes situaciones.

A.4.

Por el cálculo de cada probabilidad P("dos verdes") y P("dos rojos"): 1 punto (repartido entre planteamiento: 0.5 puntos y resolución: 0.5 puntos).
Cálculo de la probabilidad del mismo color: 0.5 puntos (repartido entre planteamiento: 0.25 puntos y resolución: 0.25 puntos).

Estándares de aprendizaje evaluados: Calcula la probabilidad de sucesos en experimentos simples y compuestos mediante la regla de Laplace

MATEMÁTICAS II

SOLUCIONES

(Documento de trabajo orientativo)

A.1.

a) La inversa existe si el determinante no es nulo: $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ m & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 - m \neq 0$

Por tanto A es invertible siempre que $m \neq -1$ y en estos casos su matriz inversa es: $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\mathrm{Adj}(A^T)$.

$$A^T = \begin{pmatrix} 0 & m & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathrm{Adj}(A^T) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -m & -1 & m \\ -1 & 1 & -m \end{pmatrix} \implies \boxed{A^{-1} = \frac{1}{m+1}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ m & 1 & -m \\ 1 & -1 & m \end{pmatrix}}$$

b) Para $m \neq -1$ el sistema es compatible determinado. Para $m = -1$ se trata de un sistema incompatible, ya que $\mathrm{rg}\,(A) = 2$ y $\mathrm{rg}\,(A|B) = 3$.

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 3/2 & -1/2 \end{array}\right) \to \boxed{\begin{cases} x = 1/3 \\ y = 1/3 \\ z = -1/3 \end{cases}}$

A.2.

a) $C = 105x^2 + 100 \cdot xy$ (en euros); $\Rightarrow y = \frac{C - 105x^2}{100x}$ (en metros).
b) $C = 1260$: $V(x) = \frac{1260x - 105x^3}{100}$ es máximo para $x = 2$; $V_{\text{máx}} = 16.8\,\mathrm{m}^3$.

A.3.

a) La ecuación paramétrica de la recta, r, que pasa por el punto $(0,0,0)$ y tiene como vector director $(1,1,-1)$ es $(x,y,z) = (\lambda, \lambda, -\lambda)$.
b) El plano π tendrá como vector normal $\overrightarrow{N} = (1,1,-1)$ además pasa por el punto $(0,0,0)$, eso nos lleva a que su ecuación implícita es $x + y - z = 0$.
c) La distancia de de P_1 a π será el $|\overrightarrow{N}| = \sqrt{3}$.

A.4.

- $P(\text{“Dos rojos”}) = P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) + P(V_1 \cap R_2 \cap R_3) = \dfrac{6}{10}\dfrac{5}{15}\dfrac{4}{14} + \dfrac{4}{10}\dfrac{4}{15}\dfrac{3}{14} = \dfrac{2}{25}.$
- $P(\text{“Dos verdes”}) = P(R_1 \cap V_2 \cap V_3) + P(V_1 \cap V_2 \cap V_3) = \dfrac{6}{10}\dfrac{10}{15}\dfrac{9}{14} + \dfrac{4}{10}\dfrac{11}{15}\dfrac{10}{14} = \dfrac{7}{15}.$
- $P(\text{“Mismo color”}) = \dfrac{2}{25} + \dfrac{7}{15} = \dfrac{41}{75} \approx 0.546667.$

B.1.

Sean x: kilogramos de café Gold Cuvée, y: kilogramos de café Paradiso y z: kilogramos de café Cremissimo. Estas variables deben satisfacer el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 7.85x + 13.3y + 24.85z & = & 3112.5 \\ 0.1x + 0.15y + 0.2z & = & 27.1 \\ 2(x+y) & = & z \end{array}\right.$$

Su solución es $(x, y, z) = (30, 22, 104) \Rightarrow 0.9 \cdot 30 + 0.85 \cdot 22 + 0.8 \cdot 104 = 128.9$.
Por tanto, se han utilizado 128.9 kilogramos de grano del tipo Arábica.

B.2.

a) $(x-2)^2$ es un polinomio, continuo y derivable en todo el eje real. $\sqrt[5]{x}$ es continua en todo $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$. Luego $f(x)$, como composición de ambas, es continua en la recta real, y derivable para todo $x \in \mathbb{R}$ excepto en $x = 2$.
b) $f'(x) = \frac{2}{5}(x-2)^{-3/5}$ si $x \neq 2$, luego la función es decreciente en $[-2, 2)$ y creciente en $(2, 4]$. Por tanto, tiene un mínimo relativo y absoluto en $(2, 0)$, y el máximo debe alcanzarse en alguno de los extremos del intervalo de definición. De hecho, el máximo absoluto se alcanza en $(-2, \sqrt[5]{(-4)^2})$.
c) $f'(2)$ no existe, al no ser finito $\lim\limits_{x\to 2} \frac{(x-2)^{2/5}-0}{x-2}$. Luego $g(x) = f'(x)$ no es continua ni derivable en $x = 2$ y por tanto no posee recta tangente en dicho punto.

B.3.

a) El láser sigue una trayectoria recta de ecuación $(x, y, z) = (2, 3, -5) + \lambda(-1, -2, 2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. La intersección con el plano $3x - 2y - 2z = 1$ se produciría para λ solución de $3(2+\lambda) - 2(3+2\lambda) + 2(-5-2\lambda) = 1$, es decir, $\lambda = 3$. El punto de impacto es, pues, $(-1, -3, 1)$.
b) El ángulo α entre el láser y el plano verifica que

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{|(-1,-2,2)\cdot(3,-2,-2)|}{\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+2^2}\sqrt{3^2+(-2)^2+(-2)^2}} = \frac{\sqrt{17}}{17}.$$

Por tanto, $\alpha \approx 14.06^o$ y no se produce perforación.
c) El segundo rayo se lanzaría desde el punto P' simétrico a P respecto al plano π. Para hallar P', calculamos el punto $O = \pi \cap \{P + \mu(3, -2, -2)\}$, es decir, $3(2+3\mu) - 2(3-2\mu) - 2(-5-2\mu) = 1$, $\mu = -9/17$. Puesto que $\overrightarrow{PP'} = 2\overrightarrow{PO}$, obtenemos que P' está en la recta $P + \mu(3, -2, -2)$ para el valor $\mu = -18/17$, es decir, $P'\left(\frac{-20}{17}, \frac{87}{17}, \frac{-49}{17}\right)$.

B.4.

a) $(1 - 3/5)^4 = (2/5)^4 = 0.0256$.
b) Se trata de una binomial $B(4; 3/5) = B(4; 0.6)$, luego

$$P(X=3) + P(X=4) = \binom{4}{3}(0.6)^3(0.4)^1 + \binom{4}{4}(0.6)^4(0.4)^0 = 0.4752.$$

c) En n disparos, la probabilidad de marcar será $1 - 0.4^n$; para que supere a 0.999 habrá de cumplirse que $1 - 0.4^n > 0.999$; $0.4^n < 0.001$; $n \geq \ln(0.001)/\ln(0.4) > 7.5$. Habrá que lanzar al menos 8 disparos.

B.1.

Por plantear cada ecuación correctamente: 0.5 puntos. Por resolver el sistema, interpretando el resultado: 1 punto. Si se resuelve correctamente un sistema incorrecto: hasta 0.5 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Formula algebraicamente las restricciones indicadas en una situación de la vida real, estudia y clasifica el sistema de ecuaciones lineales planteado, lo resuelve en los casos que sea posible, y lo aplica para resolver problemas.

B.2.

a) Analizar la continuidad: 0.25 puntos. Analizar la derivabilidad: 0.25 puntos.
b) Por los intervalos de crecimiento y decrecimiento: 0.5 puntos. Por el mínimo: 0.25 puntos. Por el máximo: 0.5 puntos.
c) Por la no existencia de $g(2) = f'(2)$: 0.5 puntos. Por concluir la no existencia de la recta tangente: 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Aplica los conceptos de límite y de derivada, así como los teoremas relacionados, a la resolución de problemas.

B.3.

a) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
b) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
c) Planteamiento: 0.75 puntos. Resolución: 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Obtiene las ecuaciones de rectas y planos en diferentes situaciones. Analiza la posición relativa de planos y rectas en el espacio, aplicando métodos matriciales y algebraicos. Determina ángulos, distancias, áreas y volúmenes utilizando los productos escalar, vectorial y mixto, aplicándolos en cada caso a la resolución de problemas geométricos.

B.4.

a) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
b) Identificación de la binomial: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.
c) Planteamiento: 0.75 puntos. Resolución: 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Calcula probabilidades de sucesos asociados a fenómenos que pueden modelizarse mediante la distribución binomial a partir de su aproximación por la normal valorando si se dan las condiciones necesarias para que sea válida. Utiliza un vocabulario adecuado para describir situaciones relacionadas con el azar.