UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS
UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO
Curso **2019-2020**
MATERIA: MATEMÁTICAS II

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

TIEMPO Y CALIFICACIÓN: 90 minutos. Cada pregunta se calificará sobre 2.5 puntos.

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{rl} (k+1)x+3y+kz & =1 \\ 3x+(k+1)y+2z & =k-1 \\ kx+2y+kz & =2 \end{array}\right. ,$$

se pide:

a) (2 puntos) Discutir el sistema en función de los valores del parámetro real k.
b) (0.5 puntos) Resolver el sistema para $k=-3$.

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada la función $f(x)=\dfrac{1}{2}-\operatorname{sen} x+x\cos x$, se pide:

a) (1.25 puntos) Estudiar su crecimiento en el intervalo $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$. Justificar, usando el teorema adecuado, que la función se anula en algún punto de ese intervalo. Justificar razonadamente que ese punto es único.
b) (1.25 puntos) Calcular $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f(x)dx$.

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se consideran los puntos $A(0,-4,2)$, $B(3,-2,3)$ y $C(-1,-3,3)$. Se pide:

a) (0.75 puntos) Comprobar que el triángulo de vértices A, B y C es rectángulo, identificando los catetos y la hipotenusa.
b) (0.75 puntos) Determinar una ecuación del plano π que contiene a los tres puntos.
c) (1 punto) Calcular el punto simétrico de A respecto de la recta que pasa por los puntos B y C.

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

De una bolsa con 20 fichas numeradas del 1 al 20 se extraen sucesivamente 2 fichas sin reemplazamiento. Se pide:

a) (0.5 puntos) Calcular la probabilidad de que ambos números sean múltiplos de 3.
b) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que el primer número sea múltiplo de 6 y el segundo sea múltiplo de 3.
c) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que ninguno de los dos números sea múltiplo de 2.
d) (0.5 puntos) Calcular la probabilidad de que la segunda ficha sea un número impar, sabiendo que la primera también lo ha sido.

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y A una matriz que verifica $AB = BC$. Se pide:

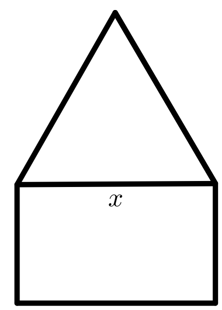
a) (0.5 puntos) Calcular el determinante de A.

b) (1 punto) Calcular BCB^{-1}.

c) (1 punto) Encontrar el vector $\begin{pmatrix} x \\ y \\ \mathrm{z} \end{pmatrix}$ tal que $BC \begin{pmatrix} x \\ y \\ \mathrm{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Disponemos de 10 metros de una barra metálica. Con ella queremos construir una estructura formada por un rectángulo que está rematado por arriba por un triángulo equilátero. La base del triángulo coincide con el lado superior del rectángulo, como se observa en la figura. Para construir la estructura, se cortan 6 trozos de la barra original de longitudes adecuadas y se sueldan para obtener la forma pedida. Se pide:



a) (0,5 puntos) Si denotamos por x la base del triángulo, calcular su altura en función de x.

b) (2 puntos) Determinar cómo debemos cortar la barra original para que la estructura resultante encierre un área total máxima.

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dadas la recta $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x - z = 0 \\ x + 2y - z = 4 \end{array} \right.$ y la recta s que pasa por $A\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ y tiene dirección $(-1, 1, 0)$, se pide:

a) (0.5 puntos) Estudiar la posición relativa de ambas rectas.

b) (1 punto) Calcular la ecuación de un plano que contiene a la recta r y a un vector perpendicular a r y a s.

c) (1 punto) Encontrar una perpendicular común a r y a s.

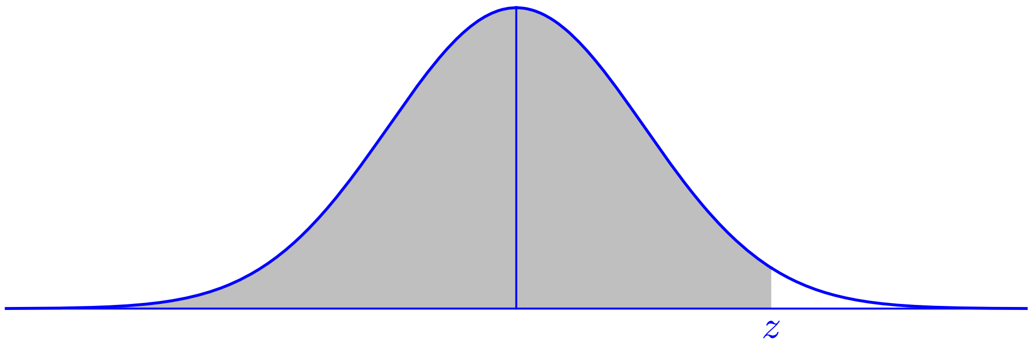
B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

El peso de las crías recién nacidas de una especie de primates sigue una distribución normal X de media $\mu = 3353$ gramos. Sabiendo que $P(X > 3693) = 0.2$, se pide:

a) (1.5 puntos) Calcular la desviación típica, σ, de la distribución de pesos.

b) (1 punto) Calcular el valor x_0 tal que $P(X < x_0) = 0.2$.

Distribución Normal



Ejemplo: si Z tiene distribución $\mathrm{N}(0,1)$, $P(Z < 0{,}45) = 0{,}6736$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

MATEMÁTICAS II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN Y ESTÁNDARES EVALUADOS EN CADA PREGUNTA

En cada pregunta, aunque el procedimiento seguido sea diferente al propuesto en el documento soluciones, cualquier argumento válido que conduzca a la solución será valorado con la puntuación asignada.

Los estándares de aprendizaje del bloque 1 se evaluarán transversalmente en todos los ejercicios, penalizando en la calificación de cada respuesta la falta de justificación razonada o de precisión y valorando las estrategias, razonamientos y toma adecuada de decisiones.

A.1.

a) Si se obtienen los valores críticos: 0.5 puntos (repartidos entre planteamiento: 0.25 y resolución: 0.25). Si se discute correctamente cada caso ($k \neq \{\pm 2\}, k = 2 \text{ y } k = -2$): 1.5 puntos (0.5 puntos por cada uno de los casos).
b) Si se resuelve el sistema: 0.5 puntos (0.25 por el procedimiento y 0.25 por el resultado correcto).

Estándar de aprendizaje evaluado:
Formula algebraicamente las restricciones indicadas en una situación de la vida real, estudia y clasifica el sistema de ecuaciones lineales planteado, lo resuelve en los casos que sea posible, y lo aplica para resolver problemas.

A.2.

a) Por el estudio del crecimiento: 0.5 puntos (repartidos en planteamiento: 0.25 puntos y resolución: 0.25 puntos). Por la justificación: 0.75 puntos (repartidos en 0.5 puntos por la existencia y 0.25 puntos por la unicidad).
b) Por calcular la primitiva: 0.75 puntos. Por aplicar correctamente la Regla de Barrow: 0.5 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Aplica los conceptos de límite y de derivada, así como los teoremas relacionados, a la resolución de problemas. Calcula el área de recintos limitados por rectas y curvas sencillas o por dos curvas.

A.3.

a) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos. Identificación: 0.25 puntos.
b) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
c) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Realiza operaciones elementales con vectores, manejando correctamente los conceptos de base y de dependencia e independencia lineal. Obtiene la ecuación del plano en sus distintas formas, pasando de una a otra correctamente. Maneja el producto escalar y vectorial de dos vectores, significado geométrico, expresión analítica y propiedades. Determina ángulos, distancias, áreas y volúmenes utilizando los productos escalar, vectorial y mixto, aplicándolos en cada caso a la resolución de problemas geométricos.

A.4.

a) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos
b) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.25 puntos
c) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.25 puntos
d) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos

Estándares de aprendizaje evaluados: Calcula la probabilidad de sucesos en experimentos simples y compuestos mediante la regla de Laplace, las fórmulas derivadas de la axiomática de Kolmogorov y diferentes técnicas de recuento. Calcula la probabilidad final de un suceso aplicando la fórmula de Bayes.

B.1.

a) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
b) Multiplicaciones de matrices: 0.25 puntos. Cálculo de la inversa: 0.75 puntos.
c) Planteamiento del sistema: 0.25 puntos. Resolución del sistema: 0.75 puntos.

Estándar de aprendizaje evaluado:
Realiza operaciones con matrices y aplica las propiedades de estas operaciones adecuadamente.Determina el rango de una matriz, hasta orden 4, aplicando el método de Gauss o determinantes. Estudia, clasifica y resuelve sistemas de ecuaciones lineales.

B.2.

a) Planteamiento (Teorema de Pitágoras, o fórmulas trigonométricas con el ángulo $\pi/3$): 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
b) Planteamiento: 1 punto. Resolución: 1 punto.

Estándar de aprendizaje evaluado: Plantea problemas de optimización relacionados con la geometría o con las ciencias experimentales y sociales, los resuelve e interpreta el resultado obtenido dentro del contexto.

B.3.

a) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
b) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.
c) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Analiza la posicion relativa de planos y rectas en el espacio, aplicando metodos matriciales y algebraicos. Obtiene las ecuaciones de rectas y planos en diferentes situaciones.

B.4.

a) Planteamiento: 0.75 puntos. Resolución: 0.75 puntos.
b) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Conoce las características y los parámetros de la distribución normal y valora su importancia en el mundo científico. Calcula probabilidades de sucesos que pueden modelizarse mediante la distribución normal a partir de la tabla de la distribución o mediante calculadora.

MATEMÁTICAS II–SOLUCIONES
(Documento de trabajo orientativo)

A.1.

a) $|A| = 0 \Rightarrow k = \pm 2$
• $si\ k \neq \{\pm 2\} \Rightarrow \operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A') = n = 3 \Rightarrow SCD.$
• $si\ k = 2 \Rightarrow \operatorname{rg}(A) = 2 = \operatorname{rg}(A') < 3 \Rightarrow SCI.$
• $si\ k = -2 \Rightarrow \operatorname{rg}(A) = 2 = \operatorname{rg}(A') < 3 \Rightarrow SCI.$

b) Si $k = -3$, tenemos un SCD cuya solución es $(x, y, z) = (-2, 1, 2)$.

A.2.

a) La derivada de f es $f'(x) = -x \operatorname{sen} x$, que es negativa en $(0, \pi/2)$. Por tanto, f es estrictamente decreciente en $(0, \pi/2)$. Como $f(0) = 1/2$ y $f(\pi/2) = -1/2$ y f es continua, el Teorema de Bolzano permite afirmar que existe un valor $c \in [0, \pi/2]$ tal que $f(c) = 0$. Al ser f estrictamente decreciente en el intervalo, dicho valor c es único.
b)

$$\int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{2} - \operatorname{sen} x + x \cos x\right) dx = \left[\frac{x}{2} + 2\cos x + x \operatorname{sen} x\right]_0^{\pi/2} = \frac{3\pi - 8}{4} = \frac{3\pi}{4} - 2.$$

A.3.

a) $\overrightarrow{AB} = (3, 2, 1), \quad \overrightarrow{AC} = (-1, 1, 1), \quad \overrightarrow{BC} = (-4, -1, 0)$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Rightarrow \text{ el ángulo correspondiente al vértice } A \text{ es recto}$$

Luego los catetos son los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ y la hipotenusa el segmento $\overline{BC}$. De manera alternativa se puede comprobar mediante el teorema de Pitágoras:

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = 14, \quad |\overrightarrow{AC}|^2 = 3, \quad |\overrightarrow{BC}|^2 = 17 \Rightarrow |\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2 = |\overrightarrow{BC}|^2$$

b) El vector característico de π es el producto vectorial de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$, $\mathbf{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (1, -4, 5)$. Considerando cualquiera de los puntos (por ejemplo A), la ecuación del plano es

$$\pi \equiv x - 4(y + 4) + 5(z - 2) = 0 \Leftrightarrow \boxed{x - 4y + 5z - 26 = 0}$$

c) La recta que pasa por B y C es $r \equiv (x, y, z) = (3, -2, 3) + \lambda(4, 1, 0)$. El plano perpendicular a dicha recta, que pasa por el punto A es $4x + y = -4$. En consecuencia, la proyección A'' del punto A sobre la recta r es la intersección de r con el plano normal,

$$4(3 + 4\lambda) + (-2 + \lambda) = -4 \Rightarrow \lambda = -\frac{14}{17} \Rightarrow A''\left(\frac{-5}{17}, \frac{-48}{17}, 3\right).$$

Como el punto simétrico A' verifica que $\overrightarrow{AA'} = 2\overrightarrow{AA''}$, tenemos que $A' = A + 2\overrightarrow{AA''} = \left(\frac{-10}{17}, \frac{-28}{17}, 4\right)$.

A.4.

a) $P(\text{“Múltiplos de 3”}) = \frac{6}{20} \cdot \frac{5}{19} = \frac{3}{38}$
b) $P(\text{“Primero múltiplo de 6 y segundo múltiplo de 3”}) = \frac{3}{20} \cdot \frac{5}{19} = \frac{3}{76}$
c) $P(\text{“Los dos impares”}) = \frac{10}{20} \cdot \frac{9}{19} = \frac{9}{38}$
d) $P(\text{“Impar el segundo”}|\text{“Impar el primero”}) = \frac{9/38}{1/2} = \frac{9}{19}$

B.1.

a) Utilizando propiedades del determinante del producto de matrices $\det(A) = \det(C) = \boxed{6}$.

b) $BCB^{-1} = BC \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 5/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1/2 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}}$

c) $BC = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Resolviendo el sistema $BC \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, la solución es $\boxed{x = 2, y = \frac{1}{2}, z = 0}$.

B.2.

a) Por el Teorema de Pitágoras, altura $= \sqrt{x^2 - (x/2)^2} = x(\sqrt{3}/2)$

b) Si denotamos por x, y las longitudes de los lados del rectángulo, usando el resultado anterior tenemos que Área $= xy + x^2(\sqrt{3}/4)$. Por otro lado, $4x + 2y = 10$, de modo que $y = 5 - 2x$, y resulta que tenemos que calcular el máximo de la función $f(x) = x(5 - 2x) + x^2(\sqrt{3}/4) = 5x - (2 - \sqrt{3}/4)x^2$ para $x \in [0, 5/2]$. Derivando, $f'(x) = 5 - 2(2 - \sqrt{3}/4)x$, por lo que f es creciente en $\left(0, \frac{5}{4 - (\sqrt{3}/2)}\right)$ y decreciente en $\left(\frac{5}{4 - (\sqrt{3}/2)}, \frac{5}{2}\right]$, y por tanto alcanza el máximo en $x_M = \frac{5}{4 - (\sqrt{3}/2)} \approx 1.59542$. El valor correspondiente para y será $y_M = 5 - 2x_M \approx 1.80916$. Tenemos que cortar la barra original en cuatro trozos de longitud x_M y dos trozos de longitud y_M.

B.3.

a) Un punto genérico de s es de la forma $(\frac{1}{4} - a, \frac{1}{4} + a, \frac{1}{2})$, y no cumple las ecuaciones de r. Las rectas se cruzan.

b) Un vector director de r es $\vec{v}_r = (1, 0, 1)$ y un punto de r es $P(1, 2, 1)$. Un vector director de s es $\vec{v}_s = (-1, 1, 0)$ y un punto de s es $A(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2})$. Un vector perpendicular a r y s es $\vec{w} = \vec{v}_r \times \vec{v}_s = (-1, -1, 1)$.
El plano pedido, que contiene a r y tiene a $\vec{w}$ en su subespacio director, es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = x - 2y - z + 4 = 0.$$

c) La recta solución es la intersección del plano obtenido en el apartado anterior y del plano que contiene a s y tiene a $\vec{w}$ en su subespacio director, que es: $\begin{vmatrix} x - \frac{1}{4} & y - \frac{1}{4} & z - \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = x + y + 2z - \frac{3}{2} = 0.$

La recta pedida es, por tanto, $\left\{ \begin{array}{l} x - 2y - z + 4 = 0 \\ x + y + 2z - \frac{3}{2} = 0 \end{array} \right.$.

B.4.

a)

$$0.8 = P(X \le 3693) = P\left(\frac{X - 3353}{\sigma} \le \frac{3693 - 3353}{\sigma}\right) = P\left(Z \le \frac{340}{\sigma}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{340}{\sigma} \approx 0.84 \Rightarrow \boxed{\sigma \approx 404.76 \text{ gramos}}.$$

b) Tenemos una distribución simétrica respecto de su media $\mu = 3353$. Sabemos que $P(X > 3693) = 0.2$. Como $3693 = \mu + 340$ y la distribución es simétrica, resulta que $P(X < \mu - 340) = 0.2$, es decir $P(X < 3013) = 0.2$. Por tanto, el valor buscado es $x_0 = 3013$ gramos.