20.3. Junio 2019 - Opción A

Problema 20.3.1 *(2,5 puntos)*

Dadas la matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & a & 2 & 2-a \\ -1 & 2 & a & a-2 \end{pmatrix}$ y $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; se pide:

a) (1,5 puntos) Estudiar el rango de A en función del parámetro real a.

b) (1 punto) Calcular, si es posible, la inversa de la matriz AM para el caso $a = 0$.

Solución:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & a & 2 \\ -1 & 2 & a \end{vmatrix} = a^2 + a - 2 = 0 \Longrightarrow a = 1$ y $a = -2$. Luego si $a \neq 1$ y $a \neq -2 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3$.

Si $a = -2 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$ y $F_3 = -F_2 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$.

Si $a = 1 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$ y $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$.

En consecuencia $\text{Rango}(A) = 3$ si $a \in \mathbb{R} - \{1, -2\}$ y $\text{Rango}(A) = 2$ si $a = 1$ o $a = -2$.

b) Si $a = 0$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ y

$$AM = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$|AM| = -2 \neq 0 \Longrightarrow \exists (AM)^{-1}$:

$$(AM)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -3 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & 5/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

Problema 20.3.2 *(2,5 puntos)* Dada $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$, donde ln denota el logaritmo neperiano, definida para $x > 0$, se pide:

a) (0.5 puntos) Calcular, en caso de que exista, una asíntota horizontal de la curva $y = f(x)$.

b) (1 punto) Encontrar un punto de la curva $y = f(x)$ en el que la recta tangente a dicha curva sea horizontal y analizar si dicho punto es un extremo relativo.

c) (1 punto) Calcular el área del recinto acotado limitado por la curva $y = f(x)$ y las rectas $y = 0$ y $x = e$.

Solución:

a) $\text{Dom}(f) = (0, +\infty)$

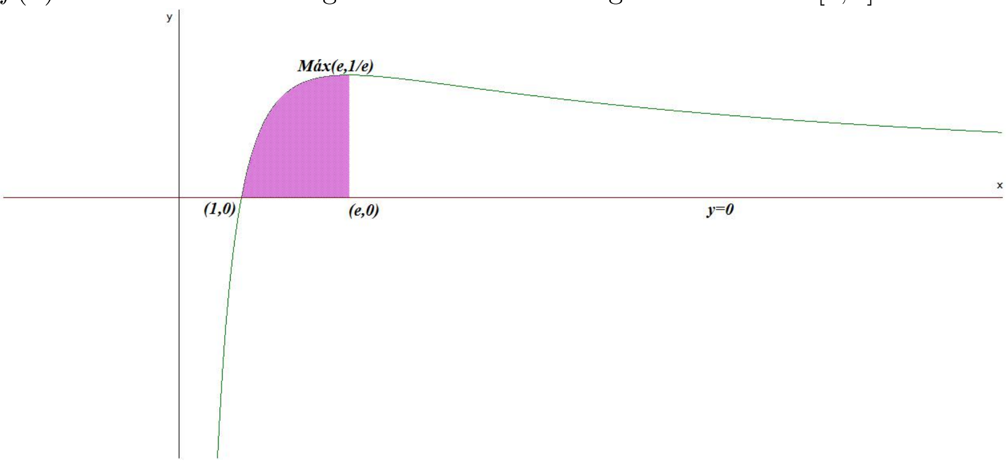
$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{\ln x}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0 \Longrightarrow y = 0 \text{ por la derecha.}$$

b) $f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \Longrightarrow 1 - \ln x = 0 \Longrightarrow x = e$

	$(0, e)$	(e, ∞)
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función crece en el intervalo $(0, e)$ y decrece en el intervalo $(e, +\infty)$. Luego presenta un máximo relativo en el punto $(e, 1/e)$.

c) $f(x) = 0 \Longrightarrow x = 1$ luego el intervalo de integración sería el $[1, e]$.



Aunque se trata de una integral inmediata dejo la solución por partes por las características de su resolución.

$$F(x) = \int \frac{\ln x}{x}\, dx = \left[\begin{array}{l} u = \ln x \Longrightarrow du = \frac{1}{x}dx \\ dv = \frac{1}{x}dx \Longrightarrow v = \ln x \end{array}\right] = (\ln x)^2 - \int \frac{1}{x}\, dx \Longrightarrow$$

$$2\int \frac{\ln x}{x}\, dx = (\ln x)^2 \Longrightarrow F(x) = \frac{(\ln x)^2}{2}$$

De otra forma:

$$F(x) = \int \frac{\ln x}{x}\, dx = \left[\begin{array}{c} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x} dx \\ dx = x dt \end{array} \right] = \int \frac{t}{x} x dt = \int t dt \Longrightarrow \frac{t^2}{2}\, dx =$$

$$\frac{(\ln x)^2}{2} + C \Longrightarrow F(x) = \frac{(\ln x)^2}{2} \Longrightarrow S = \int_1^e \frac{\ln x}{x}\, dx = F(e) - F(1) = \frac{1}{2}\ u^2$$

Problema 20.3.3 *(2,5 puntos)* Dadas la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{-2} = z$ y la recta s que pasa por el punto $(2, -5, 1)$ y tiene dirección $(-1, 0, -1)$, se pide:

a) (1 punto) Estudiar la posición relativa de las dos rectas.

b) (1 punto) Calcular un plano que sea paralelo a r y contenga a s.

c) (0,5 puntos) Calcular un plano perpendicular a la recta r y que pase por el origen de coordenadas.

Solución:

Tenemos: $r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2, -2, 1) \\ P_r(1, 3, 0) \end{array} \right.$ y $s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (-1, 0, -1) \\ P_s(2, -5, 1) \end{array} \right.$

a) $\overrightarrow{P_rP_s} = (2, -5, 1) - (1, 3, 0) = (1, -8, 1)$.

$$[\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_r}\overrightarrow{u_s}] = \left| \begin{array}{ccc} 1 & -8 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{array} \right| = -8 \neq 0 \Longrightarrow r \text{ y } s \text{ se cruzan.}$$

b) $\pi \parallel r$ y $s \subset \pi$:

$$\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2, -2, 1) \\ \overrightarrow{u_s} = (-1, 0, -1) \\ P_s(2, -5, 1) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi : \left| \begin{array}{ccc} x-2 & y+5 & z-1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow$$

$$\pi : 2x + y - 2z + 3 = 0$$

c) $\pi' \perp r$ y $O \in \pi'$:
$\pi' : 2x - 2y + z + \lambda = 0 \Longrightarrow 0 + 0 - 0 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 0$, luego:
$\pi' : 2x - 2y + z = 0$

Problema 20.3.4 *(2,5 puntos)* La probabilidad de que un pez de una determinada especie sobreviva más de 5 años es del 10 %. Se pide:

a) (1 punto) Si en un acuario tenemos 10 peces de esta especie nacidos este año, hallar la probabilidad de que al menos dos de ellos sigan vivos dentro de 5 años.

b) (1,5 puntos) Si en un tanque de una piscifactoría hay 200 peces de esta especie nacidos este mismo año, usando una aproximación mediante la distribución normal correspondiente, hallar la probabilidad de que al cabo de 5 años hayan sobrevivido al menos 10 de ellos.

Solución:

a) Se trata de una binomial $B(0,1;10)$:

$$P(X \geq 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) =$$

$$1 - \left(\left(\begin{array}{c} 10 \\ 0 \end{array} \right) 0,1^0 \cdot 0,9^{10} + \left(\begin{array}{c} 10 \\ 1 \end{array} \right) 0,1^1 \cdot 0,9^9 \right) =$$

$$1 - (0,348678 + 0,387420) = 1 - 0,736098 = 0,263902$$

b) Se trata de una distribución binomial $B(200;0,1)$ con $n = 200$, $p = 0,1$ y $q = 1 - p = 0,9$. Como $n > 10$, $np = 200 \cdot 0,1 = 20 > 5$ y $nq = 200 \cdot 0,9 = 180 > 5$ podemos aproximar esta binomial por una normal $N(np, \sqrt{npq}) = N(20;4,24)$.

$$P(X \geq 10) = P(X > 9,5) = P\left(Z > \frac{9,5-20}{4,24}\right) = P(Z > -2,48) =$$

$$1 - P(Z < -2,48) = 1 - (1 - P(Z < 2,48)) = P(z < 2,48) = 0,9934$$

20.4. Junio 2019 - Opción B

Problema 20.4.1 *(2,5 puntos)* Una estudiante pidió en la cafetería 3 bocadillos, 2 refrescos y 2 bolsas de patatas y pagó un total de 19 euros. Al mirar la cuenta comprobó que le habían cobrado un bocadillo y una bolsa de patatas de más. Reclamó y le devolvieron 4 euros. Para compensar el error, el vendedor le ofreció llevarse un bocadillo y un refresco por solo 3 euros, lo que suponía un descuento del 40 % respecto a sus precios originales. ¿Cuáles eran los respectivos precios sin descuento de un bocadillo, de un refresco y de una bolsa de patatas?

Solución:

Sea x el precio de un bocadillo, y el de un refresco y z el de una bolsa de patatas.

$$\left\{ \begin{array}{l} 4x + 2y + 3z = 19 \\ x + z = 4 \\ x + y = 5 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 3 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{array} \right.$$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 19 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - 4F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{array} \right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 2F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 3 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{array}\right.$$

Problema 20.4.2 *(2,5 puntos)* Dada la función $f(x) = \sqrt{4x^2 - x^4}$, se pide:

a) (0,5 puntos) Determinar su dominio.

b) (1,5 puntos) Determinar sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

c) (0,5 puntos) Calcular los límites laterales. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} \dfrac{f(x)}{x}$ y $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} \dfrac{f(x)}{x}$

Solución:

a) $4x^2 - x^4 = x^2(2-x)(2+x) = 0 \Longrightarrow x = 0$, $x = 2$ y $x = -2$.

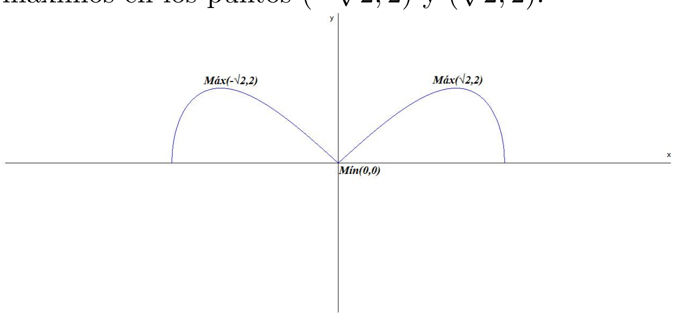
$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
$-$	$+$	$+$	$-$

$\text{Dom}(f) = [-2, 2]$

b) $f'(x) = \dfrac{2x(2-x^2)}{\sqrt{4x^2 - x^4}} = 0 \Longrightarrow x(2-x^2) = 0 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{2}$ y $x = 0$

	$(-2, -\sqrt{2})$	$(-\sqrt{2}, 0)$	$(0, \sqrt{2})$	$(\sqrt{2}, 2)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

Luego f decrece en el intevalo $(-\sqrt{2}, 0) \cup (\sqrt{2}, 2)$ y crece en el intervalo $(-2, -\sqrt{2}) \cup (0, \sqrt{2})$. Tendría un mínimo en el punto $(0, 0)$ y dos máximos en los puntos $(-\sqrt{2}, 2)$ y $(\sqrt{2}, 2)$.



c) $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} \dfrac{\sqrt{4x^2 - x^4}}{x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = [t = -x] =$

$\lim\limits_{t\longrightarrow 0^+} \dfrac{t\sqrt{4-t^2}}{-t} = \lim\limits_{t\longrightarrow 0^+} \dfrac{\sqrt{4-t^2}}{-1} = -2$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\longrightarrow 0^+}\frac{\sqrt{4x^2-x^4}}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\longrightarrow 0^+}\frac{x\sqrt{4-x^2}}{x}=$$
$$\lim_{x\longrightarrow 0^+}\sqrt{4-x^2}=2$$

Problema 20.4.3 *(2,5 puntos)* Dados el punto $A(2,1,0)$ y el plano $\pi \equiv 2x+3y+4z=36$, se pide:

a) (0,75 puntos) Determinar la distancia del punto A al plano π.

b) (1 punto) Hallar las coordenadas del punto del plano π más próximo al punto A.

c) (0,75 puntos) Hallar el punto simétrico de A respecto al plano π.

Solución:

a) $d(A,\pi)=\dfrac{|4+3+0-36|}{\sqrt{4+9+16}}=\dfrac{29}{\sqrt{29}}=\sqrt{29}\ u$

b) Calculamos la recta $t\perp\pi$ tal que $A\in t$:

$$t:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_t}=(2,3,4)\\ P_t=A(2,1,0)\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}x=2+2\lambda\\ y=1+3\lambda\\ z=4\lambda\end{array}\right.$$

Calculamos el punto de corte A' de t con π: $2(2+2\lambda)+3(1+3\lambda)+4(4\lambda)=36\Longrightarrow 29\lambda=29\Longrightarrow \lambda=1\Longrightarrow A'(4,4,4)$

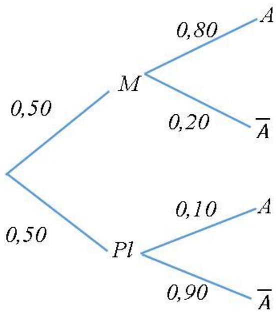
c) $\dfrac{A+A''}{2}=A'\Longrightarrow A''=2A'-A=(8,8,8)-(2,1,0)=(6,7,8)$

Problema 20.4.4 *(2,5 puntos)* Una compañía farmacéutica vende un medicamento que alivia la dermatitis atópica en un 80 % de los casos. Si un enfermo es tratado con un placebo, la probabilidad de mejoría espontánea es del 10 %. En un estudio experimental, la mitad de los pacientes han sido tratados con el medicamento y la otra mitad con un placebo.

a) (1 punto) Determinar cuál es la probabilidad de que un paciente elegido al azar haya mejorado.

b) (1,5 puntos) Si un paciente elegido al azar ha mejorado, hallar la probabilidad de que haya sido tratado con el medicamento.

Solución:



a) $P(A) = P(A|M)P(M) + P(A|Pl)P(Pl) = 0,5 \cdot 0,8 + 0,5 \cdot 0,1 = 0,45$

b) $P(M|A) = \dfrac{P(A|M)P(M)}{P(A)} = \dfrac{0,8 \cdot 0,5}{0,45} = 0,889$