MATEMÁTICAS II—SOLUCIONES

OPCIÓN A

Ejercicio 1

a) Basta elegir A de modo que una fila sea combinación lineal de las restantes. Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

b) Se puede partir de una matriz con determinante $d \neq 0$ y multiplicar una fila por $1/d$, de este modo el determinante queda multiplicado por ese número y la nueva matriz tendría determinante igual a 1. Ejemplo: Como $\det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$, podemos tomar $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

c) Para que A coincida con su traspuesta, debe ser simétrica. Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

d) Para A podemos tomar cualquier matriz de dimensión 3×3, formada por números distintos de cero y con sus filas y columnas distintas y como matriz C se podría elegir la propia matriz A o también una matriz diagonal con los tres elementos de la diagonal iguales.

Por ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ verifican que $A \cdot C = C \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 6 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 2

a) Las 12 horas del día 10 de abril, corresponden a $t = 9.5$ y el nivel de NO_2 será $c(9.5) = 98.21\, mg/m^3$.

b) Se trata de hallar el máximo absoluto de $c(t)$ en el intervalo $[0, 30]$. La derivada es $c'(t) = -6 + \frac{23t}{10} - \frac{t^2}{10}$, que se anula en $t = 3$ y $t = 20$. Como $c(0) = 80$, $c(3) = 71.45$, $c(20) \approx 153.33$ y $c(30) = 35$, el máximo absoluto se alcanza en $t = 20$, es decir las 24 horas del 20 de abril, y su valor es $153.33\, mg/m^3$.

c) El nivel promedio es $\frac{1}{30}\int_0^{30} c(t)\, dt = \frac{1}{30}\left[80t - 3t^2 + \frac{23}{60}t^3 - \frac{1}{120}t^4\right]_0^{30} = \boxed{110\, mg/m^3}$.

Ejercicio 3

a) Dado que $\overrightarrow{AB} = (0, 3, 3)$ y $\overrightarrow{AC} = (4, 4, 2)$, el plano π tiene por ecuación:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{x - 2y + 2z + 9 = 0}.$$

La distancia del punto al plano es $\boxed{\text{distancia}(D, \pi) = \frac{21}{\sqrt{1+4+4}} = 7}$.

b) El volumen de tetraedro es $V = \frac{1}{6}|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]| = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 0 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 2 \end{vmatrix}\right| = \boxed{21}$.

c) El área del triángulo es $S = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = \frac{1}{2}\|(0,3,3) \times (4,4,2)\| = \frac{1}{2}\|(-6, 12, -12)\| = \boxed{9}$.

Nótese que el volumen del tetraedro coincide con $1/3$ del área de la base (que es el triángulo ABC) por la altura (que es justamente distancia(D, π)).

Ejercicio 4

a) La variable aleatoria X : "número de respuestas acertadas, tiene una distribución $B(300, 0.5)$ y puede aproximarse mediante una v. a. normal Y de media $\mu = 300/2 = 150$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{300 \cdot 0.25} = \sqrt{75} \approx 8.66$, $Y = N(150, 8.66)$.

b) La probabilidad de que el opositor acierte a lo sumo 130 preguntas, usando la corrección de continuidad, puede aproximarse por $P(Y < 130.5)$. Si $Z = \frac{Y - 150}{8.66}$, se tiene:

$P(Y < 130.5) = P(Z < -2.25) = 1 - P(Z < 2.25) \approx 1 - 0.9878 = 0.0122$.

La probabilidad de que acierte 160 respuestas se aproxima por:

$P(X = 160) \approx P(159.5 \leq Y \leq 160.5) = P(1.1 \leq Z \leq 1.21) = P(Z \leq 1.21) - P(Z < 1.1) \approx 0.0226$.

SOLUCIONES
OPCIÓN B

Ejercicio 1

a) Sea A la matriz de coeficientes del sistema y $[A|b]$ la matriz ampliada. Entonces

$$[A|b] = \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -m & -1 & 0 \\ m & -4 & 6-2m & -8m \\ -1 & 2 & 1 & 6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -m & -1 & 0 \\ 0 & 2-m & 0 & 6 \\ 0 & 0 & m-6 & 2(m-6) \end{array}\right].$$

• Si $m \neq 2, m \neq 6$: $\text{Rango}(A) = \text{Rango}(A|b) = 3 =$ nº incógnitas $\Rightarrow$ Sistema compatible determinado.
• Si $m = 6$: $\text{Rango}(A) = \text{Rango}(A|b) = 2 <$ nº incógnitas $\Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.
• Si $m = 2$: $\text{Rango}(A) = 2 \neq \text{Rango}(A|b) = 3 \Rightarrow$ Sistema incompatible.

b) Si $m = 6$, es $[A|b] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -6 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ y despejando se obtiene $\boxed{\begin{cases} x = \lambda - 9, \\ y = -3/2, \qquad \lambda \in \mathbb{R}. \\ z = \lambda, \end{cases}}$

Ejercicio 2

a) $f'(-1) = 0$ (la tangente es horizontal). Por otra parte $\lim_{x\to -2^+} f(x) = 1, \quad \lim_{x\to -2^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to 0} f(x) = 1.$

b) La integral pedida es:

$$\int_{-3}^{0} (x^2+2x+1)\,dx + \int_0^{\pi} (1+\operatorname{sen} x)\,dx = \left(\frac{x^3}{3} + x^2 + x\right)\Bigg|_{-3}^{0} + (x - \cos x)\Bigg|_0^{\pi} = -(-9+9-3) + \pi + 2 = \boxed{5+\pi}.$$

Ejercicio 3

a) Unas ecuaciones paramétricas de la recta s son $\begin{cases} x = 2+\mu\,, \\ y = \mu\,, \\ z = 1-\mu\,, \end{cases}$ lo que prueba que $\overrightarrow{v} = (1,1,-1)$ es vector director de ambas rectas. Además, el punto $P(2,3,1)$ está en r, pero no en s. Por lo tanto las rectas son $\boxed{\text{paralelas}}$.

b) El plano π que contiene a ambas rectas está determinado por el punto P, el vector $\overrightarrow{v} = (1,1,-1)$ y el vector $\overrightarrow{PQ}$, con $Q(2,0,1)$. Por tanto $\pi \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{x+z=3}$.

c) Dado un punto genérico $B(2+\lambda, 3+\lambda, 1-\lambda)$ de la recta r, el vector $\overrightarrow{AB} = (\lambda-1, 2+\lambda, 1-\lambda)$ debe verificar que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{v} = 0$. Lo que equivale a $\lambda = 0$ y $\boxed{B(2,3,1)}$.

Ejercicio 4

Se consideran los sucesos $M =$ "Ser mujer", $A =$"Estudiar alemán".
Los datos son: $P(M) = 0.6$, $P(A) = 0.3$, $P(A|M) = 0.25$.

a) $P(M|A) = \dfrac{P(M)P(A|M)}{P(A)} = \boxed{0.5}$.

b) $P(A\cap\overline{M}) = P(A) - P(A\cap M) = P(A) - P(M)P(A|M) = \boxed{0.15}$.