**MATEMÁTICAS II—SOLUCIONES**
**OPCIÓN A**

## Ejercicio 1

**a)** Para que la matriz $A - mI$, admita inversa, su determinante debe ser no nulo.

$$\det(A - mI) = -m(3 - m)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m = 0,\, m = 3$$

Luego $A - mI$ admite inversa para todo $\boxed{m \in \mathbb{R} - \{0, 3\}}$.

**b)** Si $B = A - 2I$, es $\det(B) = -2$ y $B^{-1} = -\dfrac{1}{2}Adj(B)^t = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

---

## Ejercicio 2

Hay que tener en cuenta que

$$f(x) = \begin{cases} 2\cos(x) + 1 - x \text{ si } x \le 1 \\ 2\cos(x) + x - 1 \text{ si } x > 1 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = \begin{cases} -2\,\mathrm{sen}\,(x) - 1 \text{ si } x < 1 \\ -2\,\mathrm{sen}\,(x) + 1 \text{ si } x > 1 \end{cases}$$

**a)** Evaluando, se tiene que $f'(0) = -1$.

**b)** Como $f(\pi) = \pi - 3$ y $f'(\pi) = 1$, la ecuación de la recta tangente es $y = \pi - 3 + (x - \pi)$. Es decir $\boxed{y = x - 3}$.

**c)** Para $x \in (\pi, 2\pi)$ es $f(x) = 2\cos(x) + x - 1 > 0$, pues $x - 1 > 2 \ge 2\cos(x)$, luego el área pedida viene determinada por

$$\int_{\pi}^{2\pi} f(x)\,dx = \int_{\pi}^{2\pi} (2\cos(x) + x - 1)\,dx = \left[2\,\mathrm{sen}\,(x) + \frac{x^2}{2} - x\right]_{\pi}^{2\pi} = \frac{3\pi^2}{2} - \pi$$

---

## Ejercicio 3

**a)** Los puntos de la recta $r$ equidistantes de los dos planos deben satisfacer

$$\frac{|3(1-2t) + (-1+t) + 2(1+t) - 1|}{\sqrt{3^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{|2(1-2t) - (-1+t) + 3(1+t) - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2}},$$

lo que equivale a $-3t + 3 = \pm(-2t + 5)$.

Las soluciones son $t = -2$ y $t = 8/5$, que corresponden a los puntos $\boxed{P_1(5, -3, -1) \text{ y } P_2(-11/5, 3/5, 13/5)}$ respectivamente.

**b)** El punto de intersección de $r$ con $\pi_1$ satisface $3(1 - 2t) + (-1 + t) + 2(1 + t) - 1 = 0$, es decir es el punto $A(-1, 0, 2)$ (que corresponde a $t = 1$).

El punto de intersección de $r$ con $\pi_2$ satisface $2(1 - 2t) - (-1 + t) + 3(1 + t) - 1 = 0$, es decir es el punto $B(-4, 3/2, 7/2)$ (que corresponde a $t = 5/2$).

El área del triángulo es $\boxed{S = \dfrac{1}{2}|\overrightarrow{PA} \times \overrightarrow{PB}| = \dfrac{3\sqrt{35}}{4}}$.

---

## Ejercicio 4

La variable aleatoria $X$ (peso de los estudiantes), tiene una distribución $N(74, 6)$. Sea $Z = \frac{X-74}{6}$ la correspondiente variable $N(0, 1)$.

**a)** $p(68 \le X \le 80) = p\left(\dfrac{68 - 74}{6} \le Z \le \dfrac{80 - 74}{6}\right) = p(-1 \le Z \le 1) = p(Z \le 1) - p(Z \le -1) = 2p(z \le 1) - 1 \approx 0.6826$. Por tanto $\boxed{\text{el } 68.26\%}$ de los estudiantes tendrán un peso entre 68 y 80 kilos.

**b)** $p(X > 80) = 1 - p(X \le 80) = 1 - p(Z \le 1) \approx 1 - 0.8413 \approx 0.1587$. Por tanto, el 15.87% de los estudiantes, es decir unos $\boxed{\text{238 estudiantes}}$ pesarán más de 80kg.

**c)** Se trata de calcular la probabilidad condicionada

$$p(X > 86/X > 76) = \frac{p(X > 86) \cap (X > 76)}{p(X > 76)} = \frac{p(X > 86)}{p(X > 76)} = \frac{p(Z > 2)}{p(Z > 1/3)} = \frac{1 - p(Z \le 2)}{1 - p(Z \le 1/3)} \approx \frac{0.0228}{0.3707} \approx 0.0615$$

## OPCIÓN B

### Ejercicio 1

**a)** El determinante de la matriz de coeficientes, $\det(A) = -m^2 + m$, se anula si $m = 1$ o $m = 0$ y se tiene:

$$(A;B) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-m & 1 & 1-m \\ 0 & m-1 & m-1 & 1+m \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-m & 1 & 1-m \\ 0 & 0 & m-2 & 2m \end{array}\right)$$

Para $m \neq 0, 1$, es $\mathrm{rg}\,(A) = \mathrm{rg}\,(A;B)$ y el sistema es compatible determinado.
Si $m = 0$, es $\mathrm{rg}\,(A) = 2$, $\mathrm{rg}\,(A;B) = 3$ y el sistema es incompatible.
Si $m = 1$, es $\mathrm{rg}\,(A) = 2$, $\mathrm{rg}\,(A;B) = 3$ y el sistema es incompatible.

**b)** La solución para $m = -1$ es $\boxed{x = 1, y = 2, z = -2}$.

---

### Ejercicio 2

**a)** El área pedida viene dada por

$$\int_2^4 f(x)\,dx = \int_2^4 ((6-x)e^{\frac{x-4}{3}} - 1)\,dx = \left[(27-3x)e^{\frac{x-4}{3}} - x\right]_2^4 = 13 - \frac{21}{e^{2/3}}$$

**b)** Se trata de encontrar el máximo de la función pendiente, $f'(x) = -\dfrac{1}{3}(x-3)e^{\frac{x-4}{3}}$, para lo que calculamos $f''(x) = -\dfrac{1}{9}xe^{\frac{x-4}{3}}$, que se anula solamente en $x = 0$, es positiva en $x < 0$ y negativa en $x > 0$. Por lo que el punto de pendiente máxima es el de abscisa $\boxed{x = 0}$.

**c)** La asíntota horizontal será $y = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1 + \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{6-x}{e^{(4-x)/3}}$. Calculamos este límite usando la regla de L'Hôpital: $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{6-x}{e^{(4-x)/3}} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-1}{\frac{-1}{3}e^{(4-x)/3}} = 0 \Rightarrow$ la asíntota es $\boxed{y = -1}$.

---

### Ejercicio 3

**a)** El punto simétrico de $B$, respecto a $\pi_2$ es $B'(1,1,1)$, ya que la recta perpendicular al plano es el eje $OX$ y el punto medio entre $B$ y $B'$ es $(0,1,1)$, que está en $\pi_2$.

**b)** Un vector director de la recta pedida se puede obtener como producto vectorial de los vectores normales a los dos planos, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = (1,1,0) \times (1,0,0) = (0,0,-1)$. Se obtiene la recta $\boxed{r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 + t \end{cases}}$.

**c)** El ángulo $\alpha$ formado por los dos planos es el ángulo agudo que forman sus vectores normales.

$$\cos(\alpha) = \frac{|n_1 \cdot n_2|}{|n_1| \cdot |n_2|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Luego forman un ángulo de $\pi/4$ radianes.

---

### Ejercicio 4

Se consideran los sucesos: $F_1$ (el primer caramelo extraido es de fresa), $F_2$ (el segundo caramelo es de fresa), $M_1$ (el primer caramelo es de menta) y $L_1$ (el primer caramelo es de limón).

**a)** $p(F_2) = p(F_2/F_1)p(F_1) + p(F_2/M_1)p(M_1) + p(F_2/F_1)p(F_1) + p(F_2/L_1)p(L_1) = \dfrac{9}{29}\dfrac{10}{30} + \dfrac{10}{29}\dfrac{15}{30} + \dfrac{10}{29}\dfrac{5}{30} = \dfrac{1}{3}$.

**b)** $p(F_1 \cap F_2) = p(F_1)p(F_2/F_1) = \dfrac{3}{29}$.

**c)** $p(F_1/F_2) = \dfrac{p(F_1 \cap F_2)}{p(F_2)} = \dfrac{3/29}{1/3} = \dfrac{9}{29}$.