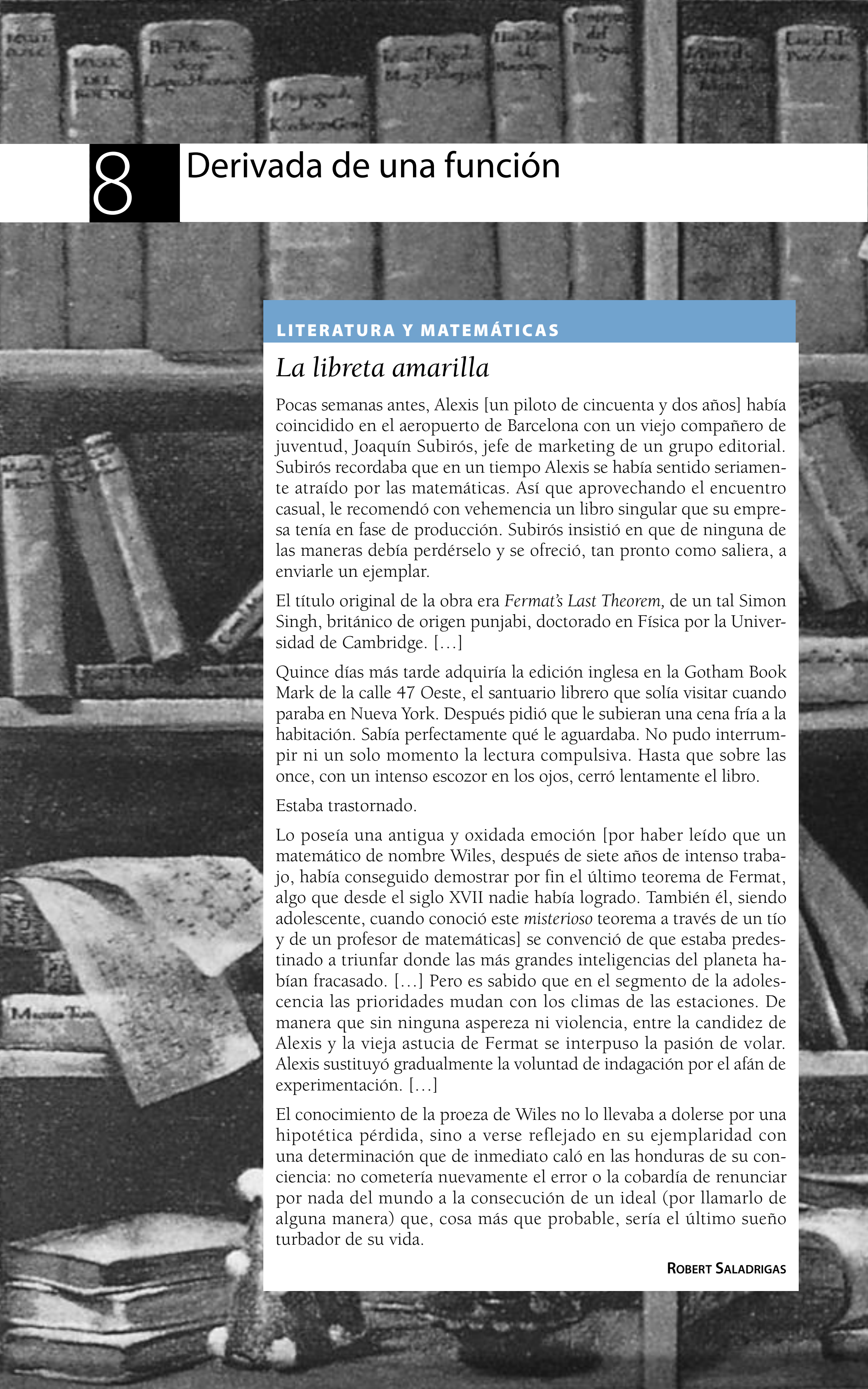


8 Derivada de una función

LITERATURA Y MATEMÁTICAS

La libreta amarilla

Pocas semanas antes, Alexis [un piloto de cincuenta y dos años] había coincidido en el aeropuerto de Barcelona con un viejo compañero de juventud, Joaquín Subirós, jefe de marketing de un grupo editorial. Subirós recordaba que en un tiempo Alexis se había sentido seriamente atraído por las matemáticas. Así que aprovechando el encuentro casual, le recomendó con vehemencia un libro singular que su empresa tenía en fase de producción. Subirós insistió en que de ninguna de las maneras debía perdérselo y se ofreció, tan pronto como saliera, a enviarle un ejemplar.

El título original de la obra era *Fermat's Last Theorem,* de un tal Simon Singh, británico de origen punjabi, doctorado en Física por la Universidad de Cambridge. […]

Quince días más tarde adquiría la edición inglesa en la Gotham Book Mark de la calle 47 Oeste, el santuario librero que solía visitar cuando paraba en Nueva York. Después pidió que le subieran una cena fría a la habitación. Sabía perfectamente qué le aguardaba. No pudo interrumpir ni un solo momento la lectura compulsiva. Hasta que sobre las once, con un intenso escozor en los ojos, cerró lentamente el libro.

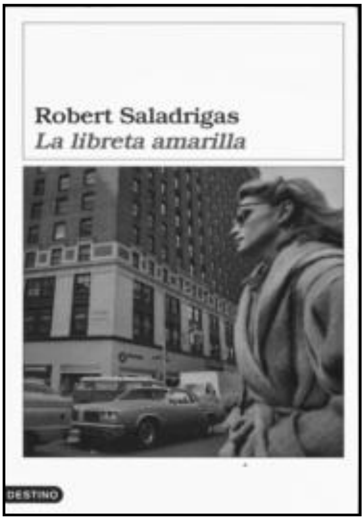
Estaba trastornado.

Lo poseía una antigua y oxidada emoción [por haber leído que un matemático de nombre Wiles, después de siete años de intenso trabajo, había conseguido demostrar por fin el último teorema de Fermat, algo que desde el siglo XVII nadie había logrado. También él, siendo adolescente, cuando conoció este *misterioso* teorema a través de un tío y de un profesor de matemáticas] se convenció de que estaba predestinado a triunfar donde las más grandes inteligencias del planeta habían fracasado. […] Pero es sabido que en el segmento de la adolescencia las prioridades mudan con los climas de las estaciones. De manera que sin ninguna aspereza ni violencia, entre la candidez de Alexis y la vieja astucia de Fermat se interpuso la pasión de volar. Alexis sustituyó gradualmente la voluntad de indagación por el afán de experimentación. […]

El conocimiento de la proeza de Wiles no lo llevaba a dolerse por una hipotética pérdida, sino a verse reflejado en su ejemplaridad con una determinación que de inmediato caló en las honduras de su conciencia: no cometería nuevamente el error o la cobardía de renunciar por nada del mundo a la consecución de un ideal (por llamarlo de alguna manera) que, cosa más que probable, sería el último sueño turbador de su vida.

ROBERT SALADRIGAS

La libreta amarilla
Robert Saladrigas



Al protagonista de esta novela, Alexis Casas, siendo niño, un tío suyo –que era un comerciante con alma aventurera– le había contado la *historia* de Pierre de Fermat, un magistrado del Ayuntamiento de Toulouse, casado y padre de cinco hijos, que dedicaba sus ratos libres a leer libros de matemáticas. En el margen de uno de los libros que estaba leyendo, Fermat escribió: «Es imposible encontrar la forma de convertir un cubo en suma de dos cubos, una potencia cuarta en suma de dos potencias cuartas, o en general cualquier potencia más alta que el cuadrado en suma de dos potencias de la misma clase; para este hecho he encontrado una demostración excelente. El margen es demasiado pequeño para que dicha demostración quepa en él». El magistrado nunca publicó sus ideas matemáticas. Fue uno de los hijos quien, después de su muerte, tomándolas de aquí y de allá, las recopiló en un libro donde curiosamente no aparece ninguna prueba del enunciado anterior, mal llamado «teorema de Fermat», porque, mientras no se descubra una demostración, sólo es una conjetura. Cuando el tío le contó esta historia a Alexis (hacia 1955), nadie había conseguido demostrarlo. Más adelante, cuando un profesor de matemáticas le confirmó la historia de aquel juez, cuya imagen Alexis confundía con la del mosquetero Aramis, sintió el deseo de dedicarse a resolver esa conjetura. Pero, sobre ese sueño, se impuso la pasión de volar. A los cincuenta y dos años, después de más de veinte trabajando como piloto, un día un amigo le habla de un libro titulado *El enigma de Fermat*. Leyéndolo se entera de que un joven matemático, de nombre Wiles, acababa de cumplir, en 1994, el sueño que ambos habían tenido en la infancia. Y esto le hace cambiar de vida.

La novela es el relato de esta transformación y, en ella aparecen numerosas referencias a las matemáticas que dan pie para plantear diversas actividades didácticas.

Pese a su aislamiento, a Marc le suceden algunas cosas interesantes como la visita del gran escritor Julio Cortázar, convertido por el autor de la novela en un personaje de ficción.

Fermat también contribuyó al desarrollo del cálculo infinitesimal con resultados interesantes, como este: «Si una función derivable tiene un extremo relativo en un punto, su derivada en ese punto debe ser nula». Justifica este teorema.

Si x_0 es un extremo relativo de una función derivable, ya sea un máximo o un mínimo, la recta tangente a dicha función por este punto es una recta horizontal, es decir, una recta cuya pendiente es igual a cero. Como la derivada de una función en un punto coincide con la pendiente de la recta tangente en dicho punto tenemos que: $f'(x_0) = 0$

Derivada de una función

ANTES DE COMENZAR… RECUERDA

001 Estudia la continuidad de estas funciones.

a) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$ b) $g(x) = \sqrt{x^2 + 7}$ c) $h(x) = \ln 3x$

a) Continua en $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ b) Continua en $\mathbb{R}$ c) Continua en $(0, +\infty)$

002 Deriva las siguientes funciones.

a) $f(x) = x^9$ b) $f(x) = 7^x$ c) $f(x) = \log_5 x$ d) $f(x) = \sqrt{x}$

a) $f'(x) = 9x^8$ b) $f'(x) = 7^x \ln 7$ c) $f'(x) = \frac{1}{x \ln 5}$ d) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

ACTIVIDADES

001 Halla la tasa de variación media de las funciones: $f(x) = x^2 + 1$ $g(x) = x^3 + 7$ en los intervalos $[0, 1]$ y $[-2, -1]$.

a) $T.V.M.([0, 1]) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{2 - 1}{1} = 1$

$T.V.M.([-2, -1]) = \frac{f(-1) - f(-2)}{-1 - (-2)} = \frac{2 - 5}{1} = -3$

b) $T.V.M.([0, 1]) = \frac{g(1) - g(0)}{1 - 0} = \frac{8 - 7}{1} = 1$

$T.V.M.([-2, -1]) = \frac{g(-1) - g(-2)}{-1 - (-2)} = \frac{6 - (-1)}{1} = 7$

002 El espacio, en metros, que recorre un móvil en función del tiempo, en segundos, viene descrito por la fórmula $e = \frac{1}{3}t^2 + t$. Halla su velocidad media en $[1, 5]$.

$$T.V.M.([1, 5]) = \frac{e(5) - e(1)}{5 - 1} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 25 + 5 - \frac{1}{3} \cdot 1 - 1}{4} = \frac{12}{4} = 3 \text{ m/s}$$

003 Calcula la derivada de estas funciones en $x = 2$.

a) $f(x) = 7x + 1$ b) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

a) $f'(2) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(2 + h) - f(2)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{7(2 + h) + 1 - 15}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{7h}{h} = 7$

b) $f'(2) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(2 + h) - f(2)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{\frac{1}{(2 + h)^2} - \frac{1}{4}}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{4 - (4 + 4h + h^2)}{4h(2 + h)^2} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \frac{-4h - h^2}{4h(2 + h)^2} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{-4 - h}{4(2 + h)^2} = -\frac{1}{4}$

004 Halla la derivada de las funciones en los puntos $x = 1$ y $x = 2$.

a) $f(x) = x^3$ b) $f(x) = \sqrt{x}$

a) $f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^3 - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3h + 3h^2 + h^3}{h} =$
$= \lim_{h\to 0}(3 + 3h + h^2) = 3$

$f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^3 - 8}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{12h + 6h^2 + h^3}{h} =$
$= \lim_{h\to 0}(12 + 6h + h^2) = 12$

b) $f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{1+h} - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{1+h} - 1\right)\left(\sqrt{1+h} + 1\right)}{h\left(\sqrt{1+h} + 1\right)} =$
$= \lim_{h\to 0} \frac{1 + h - 1}{h\left(\sqrt{1+h} + 1\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{1+h} + 1} = \frac{1}{2}$

$f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{2+h} - \sqrt{2}}{h} =$
$= \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{2+h} - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2+h} + \sqrt{2}\right)}{h\left(\sqrt{2+h} + \sqrt{2}\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{2 + h - 2}{h\left(\sqrt{2+h} + \sqrt{2}\right)} =$
$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{2+h} + \sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

005 Halla la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = 6x^2 + 1$ en $x = 1$.

$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{6(1+h)^2 + 1 - 7}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{12h + 6h^2}{h} =$
$= \lim_{h\to 0}(12 + 6h) = 12$

006 ¿Cuál es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^3$ en $x = 1$?

$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^3 - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3h + 3h^2 + h^3}{h} =$
$= \lim_{h\to 0}(3 + 3h + h^2) = 3$

007 Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 3$ en el punto $P(-1, 4)$.
¿Cuál es la ecuación de la recta normal?

$f'(-1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(-1+h)^2 + 3 - 4}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-2h + h^2}{h} =$
$= \lim_{h\to 0}(-2 + h) = -2$

La ecuación de la recta tangente es: $y - 4 = -2(x + 1) \rightarrow y = -2x + 2$

La ecuación de la recta normal es: $y - 4 = \frac{1}{2}(x + 1) \rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$

008 **Calcula las ecuaciones de las rectas tangentes a la función $f(x) = 2x^3 + 3$ en los puntos $x = 1$ y $x = -1$.**

Comprueba que son paralelas a la recta $y = 6x$.

$f(1) = 5$

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2(1+h)^3 + 3 - 5}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{6h + 6h^2 + 2h^3}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0}(6 + 6h + 2h^2) = 6$$

La ecuación de la recta tangente es: $y - 5 = 6(x - 1) \rightarrow y = 6x - 1$

$f(-1) = 1$

$$f'(-1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2(-1+h)^3 + 3 - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{6h - 6h^2 + 2h^3}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0}(6 - 6h + 2h^2) = 6$$

La ecuación de la recta tangente es: $y - 1 = 6(x + 1) \rightarrow y = 6x + 7$

Las rectas son paralelas a la recta $y = 6x$ porque su pendiente es 6.

009 **Calcula las derivadas laterales de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$.**

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x < 2 \\ x + 3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$$f'(2^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{(2+h) + 3 - 5}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

$$f'(2^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{2(2+h) + 1 - 5}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{2h}{h} = 2$$

Las derivadas laterales no son iguales $\rightarrow f(x)$ no es derivable en $x = 2$.

010 **Halla las derivadas laterales de las siguientes funciones en el punto de abscisa $x = 0$.**

a) $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$

b) $f(x) = \sqrt[4]{x}$

a) $$f'(0^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h^{\frac{1}{3}}}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h^{\frac{2}{3}}} = +\infty$$

$$f'(0^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h^{\frac{1}{3}}}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{1}{h^{\frac{2}{3}}} = -\infty$$

Las derivadas laterales no son iguales $\rightarrow f(x)$ no es derivable en $x = 0$.

b) $$f'(0^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt[4]{h}}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{\sqrt[4]{h^3}} = +\infty$$

$f'(0^-)$ no existe, ya que h es un número negativo y la función no está definida para números negativos $\rightarrow f(x)$ no es derivable en $x = 0$.

011 **Estudia la continuidad y derivabilidad de esta función en el punto $x = 2$.**

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < 2 \\ x^2 - 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x \to 2^+} (x+1) = \lim\limits_{x \to 2^-} (x^2 - 1) = 3 = f(2) \rightarrow f(x)$ es continua en $x = 2$.

$$f'(2^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{(2+h)^2 - 1 - 3}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{4h + h^2}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0^+} (4+h) = 4$$

$$f'(2^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{(2+h) + 1 - 3}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{h}{h} = 1$$

Las derivadas laterales existen pero son distintas, por tanto, $f(x)$ no es derivable en $x = 2$.

012 **Decide si la función $f(x) = |x + 2|$ es continua y derivable en los siguientes puntos.**

a) $x = 0$ **b) $x = -2$** **c) $x = 3$** **d) $x = -5$**

a) $\lim\limits_{x \to 0^+} (x+2) = \lim\limits_{x \to 0^-} (x+2) = 2 = f(0) \rightarrow f(x)$ es continua en $x = 0$.

$$f'(0^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{(0+h) + 2 - 2}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

$$f'(0^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{(0+h) + 2 - 2}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{h}{h} = 1$$

Las derivadas laterales existen y son iguales, por tanto, $f(x)$ es derivable en $x = 0$.

b) $\lim\limits_{x \to -2^+} (x+2) = \lim\limits_{x \to -2^-} (-x-2) = 0 = f(-2) \rightarrow f(x)$ es continua en $x = -2$.

$$f'(-2^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{(-2+h) + 2}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

$$f'(-2^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-(-2+h) - 2}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

Las derivadas laterales existen pero no son iguales, por tanto, $f(x)$ no es derivable en $x = -2$.

c) $\lim\limits_{x \to 3^+} (x+2) = \lim\limits_{x \to 3^-} (x+2) = 5 = f(3) \rightarrow f(x)$ es continua en $x = 3$.

$$f'(3^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{(3+h) + 2 - 5}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

$$f'(3^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{(3+h) + 2 - 5}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{h}{h} = 1$$

Las derivadas laterales existen y son iguales, por tanto, $f(x)$ es derivable en $x = 3$.

d) $\lim\limits_{x \to -5^+} (-x-2) = \lim\limits_{x \to -5^-} (-x-2) = 3 = f(-5) \rightarrow f(x)$ es continua en $x = -5$.

$$f'(-5^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(-5+h) - f(-5)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{-(-5+h) - 2 - 3}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{-h}{h} = -1$$

$$f'(-5^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(-5+h) - f(-5)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-(-5+h) - 2 - 3}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

Las derivadas laterales existen y son iguales, por tanto, $f(x)$ es derivable en $x = -5$.

Derivada de una función

013 Halla la función derivada de $f(x) = 3x^2 + 1$ aplicando la definición.
A partir del resultado, calcula la derivada de $f(x)$ en estos puntos.

a) $x = 1$

b) $x = 2$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3(x+h)^2 + 1 - (3x^2 - 1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{6hx + 3h^2}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0}(6x + 3h) = 6x$$

a) $f'(1) = 6$

b) $f'(2) = 12$

014 Utiliza la definición para calcular la función derivada de la función $f(x) = x^3 + x^2$.
Calcula, después, las derivadas sucesivas.
¿Existen todas hasta la derivada *n*-ésima?

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 + (x+h)^2 - (x^3 + x^2)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{3hx^2 + 3h^2x + h^3 + 2hx + h^2}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0}(3x^2 + 3hx + h^2 + 2x + h) = 3x^2 + 2x$$

$$f''(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3(x+h)^2 + 2(x+h) - (3x^2 + 2x)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{6hx + 3h^2 + 2h}{h} = \lim_{h\to 0}(6x + 3h + 2) = 6x + 2$$

$$f'''(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f''(x+h) - f''(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{6(x+h) + 2 - (6x+2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{6h}{h} = 6$$

$$f^{IV)}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f'''(x+h) - f'''(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{6 - 6}{h} = 0$$

A partir de la cuarta derivada todas las funciones derivadas son iguales a 0.

015 Calcula la derivada de estas funciones, y comprueba que se cumple que el resultado es igual a la suma de las derivadas de las funciones que las forman.

a) $f(x) = x - x^2$

b) $f(x) = x^3 + 2x$

a) $$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h) - (x+h)^2 - (x - x^2)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{h - 2hx - h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(1 - 2x - h) = 1 - 2x$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h) - x}{h} - \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} - \lim_{h\to 0} \frac{2hx + h^2}{h} =$$
$$= 1 - \lim_{h\to 0}(2x + h) = 1 - 2x$$

b) $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^3 + 2(x+h) - (x^3 + 2x)}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{3hx^2 + 3h^2x + h^3 + 2h}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(3x^2 + 3hx + h^2 + 2) = 3x^2 + 2$

$f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^3 - x^3}{h} + \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2(x+h) - 2x}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{3hx^2 + 3h^2x + h^3}{h} + \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2h}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(3x^2 + 3hx + h^2) + 2 = 3x^2 + 2$

016 Halla las derivadas de $f(x) = 6x^2$ y $g(x) = -x$. ¿Cuál es la derivada de su producto? ¿Y de $\dfrac{f(x)}{g(x)}$?

$f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{6(x+h)^2 - 6x^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{12hx + 6h^2}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0}(12x + 6h) = 12x$

$g'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-(x+h) - (-x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-h}{h} = -1$

$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) = 12x(-x) + 6x^2(-1) = -18x^2$

$\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2} = \dfrac{12x(-x) - 6x^2(-1)}{(-x)^2} = -6$

017 Utiliza las definiciones de composición de funciones y de derivada para comprobar que se cumple la regla de la cadena.

$[(g \circ f)(x)]' = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(g \circ f)(x+h) - (g \circ f)(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{f(x+h) - f(x)} \cdot \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}\right] =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{f(x+h) - f(x)} \cdot \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

018 Halla la derivada de la función $k(x) = \sqrt{2x+5}$ utilizando la definición de derivada, y comprueba que el resultado es el mismo que si aplicas la regla de la cadena.

$k'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{k(x+h) - k(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{2(x+h)+5} - \sqrt{2x+5}}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\left(\sqrt{2(x+h)+5} - \sqrt{2x+5}\right)\left(\sqrt{2(x+h)+5} + \sqrt{2x+5}\right)}{h\left(\sqrt{2(x+h)+5} + \sqrt{2x+5}\right)} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2x + 2h + 5 - 2x - 5}{h\left(\sqrt{2(x+h)+5} + \sqrt{2x+5}\right)} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2}{\sqrt{2(x+h)+5} + \sqrt{2x+5}} =$

$= \dfrac{2}{2\sqrt{2x+5}} = \dfrac{1}{\sqrt{2x+5}}$

Si $f(x) = 2x + 5 \rightarrow f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{2(x+h) + 5 - (2x+5)}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{2h}{h} = 2$

Si $g(x) = \sqrt{x} \rightarrow g'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\left(\sqrt{x+h} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{x+h-x}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Como $k(x) = (g \circ f)(x)$ aplicando la regla de la cadena:

$k'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{2x+5}} \cdot 2 = \dfrac{1}{\sqrt{2x+5}}$

019 Calcula la derivada de esta función, indicando los pasos que sigues para hallarla.

$$f(x) = 5x^4 + 3x^2$$

Aplicando la derivada de las funciones potenciales:

$(x^4)' = 4x^3 \qquad (x^2)' = 2x$

Teniendo en cuenta las operaciones con derivadas:

$f'(x) = 5 \cdot 4x^3 + 3 \cdot 2x = 20x^3 + 6x$

020 Halla la derivada de la siguiente función.

$$f(x) = \left(\frac{x-2}{x^5}\right)^4$$

$f'(x) = 4\left(\dfrac{x-2}{x^5}\right)^3 \cdot \dfrac{1 \cdot x^5 - (x-2)5x^4}{(x^5)^2} = \dfrac{4(x-2)^3}{x^{15}} \cdot \dfrac{x^5 - 5x^5 + 10x^4}{x^{10}} =$

$= \dfrac{(x-2)^3(-16x+40)}{x^{21}}$

021 Halla la derivada de las siguientes funciones.

a) $f(x) = 5\ln x + e^{4x}$ **b)** $f(x) = \log_3(-6x^2 \ln x)$

a) $f'(x) = 5 \cdot \dfrac{1}{x} + e^{4x} \cdot 4$

b) $f'(x) = \dfrac{-12x\ln x + (-6x^2)\dfrac{1}{x}}{-6x^2 \ln x \ln 3} = \dfrac{2\ln x + 1}{x \ln x \ln 3}$

022 Obtén la derivada de estas funciones.

a) $f(x) = e^x \log_4 x^5$ **b)** $f(x) = \ln(3x^2 - x)^{-7}$

a) $f'(x) = e^x \log_4 x^5 + e^x \cdot \dfrac{5x^4}{x^5 \ln 4} = e^x \log_4 x^5 + e^x \cdot \dfrac{5}{x \ln 4}$

b) $f'(x) = \dfrac{-7(3x^2 - x)^{-8}(6x-1)}{(3x^2-x)^{-7}} = \dfrac{-7(6x-1)}{3x^2 - x}$

023 Decide de qué tipo son las siguientes funciones, y halla la derivada de cada una de ellas.

a) $f(x) = cos\,(sen\,2x)$

b) $f(x) = sen\,(\ln 2x)$

c) $f(x) = arc\,tg\,\sqrt{x^3 + 2}$

d) $f(x) = tg\,(x^4 + 3x)$

a) $f'(x) = -sen\,(sen\,2x) \cdot cos\,2x \cdot 2$

b) $f'(x) = cos\,(\ln 2x) \cdot \dfrac{2}{2x} = \dfrac{cos\,(\ln 2x)}{x}$

c) $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{2}(x^3+2)^{-\frac{1}{2}}3x^2}{1+\left(\sqrt{x^3+2}\right)^2} = \dfrac{3x^2}{2(x^3+2)\sqrt{x^3+2}}$

d) $f'(x) = (1 + tg^2\,(x^4+3x))\,(4x^3+3)$

024 Calcula la derivada de estas funciones.

a) $f(x) = cos\,\sqrt{x^2 + x}$

b) $f(x) = sen\,x^2 + 3cos^2\,x$

c) $f(x) = tg\,\dfrac{1+x}{1-x}$

d) $f(x) = arc\,tg\,\sqrt{x}$

a) $f'(x) = -sen\left(\sqrt{x^2+x}\right)\dfrac{1}{2}(x^2+x)^{-\frac{1}{2}}(2x+1) = -\dfrac{(2x+1)sen\left(\sqrt{x^2+x}\right)}{2\sqrt{x^2+x}}$

b) $f'(x) = cos\,x^2 \cdot 2x + 6cos\,x(-sen\,x) = 2xcos\,x^2 - 6sen\,x\,cos\,x$

c) $f'(x) = \left(1 + tg^2\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)\right)\dfrac{1(1-x)-(1+x)(-1)}{(1-x)^2} = \left(1+tg^2\,\dfrac{1+x}{1-x}\right)\dfrac{2}{(1-x)^2}$

d) $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2} = \dfrac{1}{2(1+x)\sqrt{x}}$

025 Calcula la derivada de las siguientes funciones utilizando la derivación logarítmica.

a) $f(x) = (x^2 - 4x + 3)^{sen\,x}$

b) $f(x) = x^{8x + cos\,x}$

a) $\ln f(x) = \ln\,(x^2 - 4x + 3)^{sen\,x}$

$\ln f(x) = sen\,x \cdot \ln\,(x^2 - 4x + 3)$

$\dfrac{f'(x)}{f(x)} = cos\,x \cdot \ln\,(x^2-4x+3) + sen\,x \cdot \dfrac{2x-4}{x^2-4x+3}$

$f'(x) = \left(cos\,x \cdot \ln\,(x^2-4x+3) + sen\,x \cdot \dfrac{2x-4}{x^2-4x+3}\right)(x^2-4x+3)^{sen\,x}$

b) $\ln f(x) = \ln x^{8x+cos\,x}$

$\ln f(x) = (8x + cos\,x)\ln x$

$\dfrac{f'(x)}{f(x)} = (8 - sen\,x)\ln x + (8x + cos\,x)\dfrac{1}{x}$

$f'(x) = \left((8 - sen\,x)\ln x + 8 + \dfrac{cos\,x}{x}\right)x^{8x+cos\,x}$

026 Deduce la derivada de estas funciones a partir de la derivación logarítmica.

a) $f(x) = x^n$ b) $f(x) = a^x$

a) $\ln f(x) = \ln x^n \rightarrow \ln f(x) = n \ln x$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = n \cdot \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = n \cdot \frac{1}{x} \cdot x^n = nx^{n-1}$$

b) $\ln f(x) = \ln a^x \rightarrow \ln f(x) = x \ln a$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 1 \cdot \ln a$$

$$f'(x) = \ln a \cdot a^x$$

027 Halla la derivada de estas funciones implícitas, y calcula su valor en el punto (7, −2).

a) $x^3 - 3x + y^2 = 0$ b) $5x^2 + 3xy + 6y^2 - x + 13xy^2 = 0$

a) $3x^2 - 3 + 2yy' = 0 \rightarrow 2yy' = 3 - 3x^2 \rightarrow y' = \dfrac{3 - 3x^2}{2y}$

$$y'(7, -2) = \frac{3 - 3 \cdot 7^2}{2(-2)} = 36$$

b) $10x + 3y + 3xy' + 12yy' - 1 + 13y^2 + 26xyy' = 0$

$$\rightarrow (3x + 12y + 26xy)y' = 1 - 10x - 3y - 13y^2 \rightarrow y' = \frac{1 - 10x - 3y - 13y^2}{3x + 12y + 26xy}$$

$$y'(7, -2) = \frac{1 - 10 \cdot 7 - 3 \cdot (-2) - 13 \cdot (-2)^2}{3 \cdot 7 + 12 \cdot (-2) + 26 \cdot 7 \cdot (-2)} = \frac{115}{367}$$

028 A partir de la derivada de la función $f(x) = x^2$, calcula la derivada de la función $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ y comprueba que obtienes el mismo resultado que si utilizas la definición de derivada.

$f'(x) = 2x$

- $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \dfrac{1}{f'\left(\sqrt{x}\right)} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
- $(f^{-1})'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\left(\sqrt{x+h} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} =$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

029 Calcula la tasa de variación media de la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en los intervalos [2, 3] y [2, 5]. A partir de ella, calcula la derivada en el punto $x = 2$.

$$T.V.M.([2, 3]) = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}}{1} = -\frac{1}{6}$$

$$T.V.M.([2, 5]) = \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \frac{\frac{1}{5} - \frac{1}{2}}{3} = -\frac{1}{10}$$

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{2+h} - \frac{1}{2}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2 - 2 - h}{2h(2+h)} = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{2(2+h)} = -\frac{1}{4}$$

030 **Halla las tasas de variación media de la superficie de un círculo cuando su radio pasa de medir 1 cm a medir 3 cm y de 3 cm a 5 cm. ¿Permanece constante si la variación del radio es la misma?**

La función que mide la superficie de un círculo según la longitud de su radio x es: $f(x) = \pi x^2$

$$T.V.M.([1, 3]) = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{9\pi - \pi}{2} = 4\pi$$

$$T.V.M.([3, 5]) = \frac{f(5) - f(3)}{5 - 3} = \frac{25\pi - 9\pi}{2} = 8\pi$$

Aunque la variación del radio es la misma, la de la superficie no permanece constante.

031 **Galileo demostró que, cuando un objeto cae libremente, es decir, prescindiendo de la resistencia del aire, la altura recorrida, en metros, y el tiempo transcurrido, en segundos, se relacionan mediante la fórmula: $h = \frac{1}{2}gt^2$, o lo que es lo mismo, aproximadamente, $h = 5t^2$.**

a) Calcula las tasas de variación media entre 1 y 7 segundos y entre 1 y 5 segundos.

b) Halla la derivada de esta función en $x = 1$.

a) $T.V.M.([1, 7]) = \dfrac{f(7) - f(1)}{7 - 1} = \dfrac{245 - 5}{6} = 40$

$T.V.M.([1, 5]) = \dfrac{f(5) - f(1)}{5 - 1} = \dfrac{125 - 5}{4} = 30$

b) $f'(1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{5(1 + h)^2 - 5}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{10h + 5h^2}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} (10 + 5h) = 10$

032 **Utilizando la definición, calcula la derivada de las siguientes funciones en el punto $x = -1$.**

a) $f(x) = 3x$ b) $g(x) = x^2$ c) $i(x) = x^3$ d) $j(x) = |x|$

a) $f'(-1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(-1 + h) - f(-1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3(-1 + h) + 3}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3h}{h} = 3$

b) $g'(-1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g(-1 + h) - g(-1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(-1 + h)^2 - 1}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-2h + h^2}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} (-2 + h) = -2$

c) $i'(-1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{i(-1 + h) - i(-1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(-1 + h)^3 + 1}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3h - 3h^2 + h^3}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} (3 - 3h + h^2) = 3$

d) $j'(-1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{j(-1 + h) - j(-1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{|-1 + h| - 1}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1 - h - 1}{h} = -1$

033 A partir de la definición, determina la derivada de las funciones en el punto $x = 0$.

a) $f(x) = ax + b$ b) $g(x) = ax^2$ c) $i(x) = ax^2 + b$ d) $j(x) = ax^2 + bx + c$

a) $f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{ah + b - b}{h} = a$

b) $g'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{ah^2 - 0}{h} = \lim_{h \to 0} (ah) = 0$

c) $i'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{i(0+h) - i(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{ah^2 + b - b}{h} = \lim_{h \to 0} (ah) = 0$

d) $j'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{j(0+h) - j(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{ah^2 + bh + c - c}{h} = \lim_{h \to 0} (ah + b) = b$

034 Utilizando la definición de derivada, calcule la derivada de $f(x) = x^3 - 3x$ en $x_0 = 1$.

(Murcia. Septiembre 2002. Bloque 3. Cuestión 1)

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^3 - 3(1+h) - (-2)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1 + 3h + 3h^2 + h^3 - 3 - 3h + 2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3h^2 + h^3}{h} = \lim_{h \to 0} (3h + h^2) = 0$$

035 Calcule la derivada de la función $f(x) = |x - 2|$ en $x = 2$, si es posible.

(Galicia. Septiembre 2001. Bloque 3. Pregunta 1)

$$f(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{si } x \geq 2 \\ -x + 2 & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

$$f'(2^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{2 + h - 2 - 0}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

$$f'(2^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-(2+h) + 2 - 0}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

Las derivadas laterales existen pero no son iguales, por tanto, $f(x)$ no es derivable en $x = 2$.

036 Halla la ecuación de la tangente a la gráfica de cada una de estas funciones en los puntos que se indican.

a) $y = \operatorname{sen} x + x$, en $x = \pi$. b) $y = \frac{x^4 - 3}{x}$, en $x = -1$. c) $y = \ln(x^2 + 7)$, en $x = 0$.

a) $f(\pi) = \pi$

$f'(x) = \cos x + 1 \rightarrow f'(\pi) = 0$

La ecuación de la recta tangente es: $y - \pi = 0(x - \pi) \rightarrow y = \pi$

b) $f(-1) = 2$

$$f'(x) = \frac{4x^3 \cdot x - (x^4 - 3)}{x^2} = \frac{3x^4 + 3}{x^2} \rightarrow f'(-1) = 6$$

La ecuación de la recta tangente es: $y - 2 = 6(x + 1) \rightarrow y = 6x + 8$

c) $f(0) = \ln 7$

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+7} \rightarrow f'(0) = 0$$

La ecuación de la recta tangente es: $y - \ln 7 = 0(x - 0) \rightarrow y = \ln 7$

037 **Determina la ecuación de la tangente a la parábola $y = \frac{1}{2}x^2$ en el punto $A(2, 2)$.**

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2x = x \rightarrow f'(2) = 2$$

La ecuación de la recta tangente es: $y - 2 = 2(x - 2) \rightarrow y = 2x - 2$

038 **Calcule la recta tangente a la curva $f(x) = \ln x^2$ en el punto $x = 2$.**

(Murcia. Septiembre 2006. Bloque 3. Cuestión B)

$f(2) = \ln 4$

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x} \rightarrow f'(2) = 1$$

La ecuación de la recta tangente es: $y - \ln 4 = x - 2 \rightarrow y = x - 2 + \ln 4$

039 **Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = \frac{-2}{x}$ en el punto de abscisa $x = 2$.**
Demuestra que esa recta solo corta a la gráfica en el punto de tangencia.

$f(2) = -1$

$$f'(x) = \frac{2}{x^2} \rightarrow f'(2) = \frac{1}{2}$$

La ecuación de la recta tangente es: $y + 1 = \frac{1}{2}(x - 2) \rightarrow y = \frac{1}{2}x - 2$

El punto de corte de las dos funciones verifica que: $\frac{1}{2}x - 2 = \frac{-2}{x} \rightarrow x^2 - 4x = -4$

$$\rightarrow x^2 - 4x = -4 \rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \rightarrow (x-2)^2 = 0 \rightarrow x = 2$$

Por tanto, hay un único punto común a ambas gráficas.

040 **Halla el punto de la curva $y = \sqrt{x}$ en el que la recta tangente es paralela a la recta $y = \frac{1}{2}x$.**

Las rectas son paralelas si tienen la misma pendiente, por tanto, buscamos el punto que verifica que: $f'(x) = \frac{1}{2}$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Entonces: $\frac{1}{2} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \rightarrow \sqrt{x} = 1 \rightarrow x = 1$

El punto tiene por coordenadas (1, 1).

041 Se considera la función $f(x) = x^2 + m$, donde $m > 0$ es una constante.

a) Para cada valor de m hallar el valor $a > 0$ tal que la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$ pase por el origen de coordenadas.

b) Hallar el valor de m para que la recta $y = x$ sea tangente a la gráfica de f.

(Madrid. Junio 2007. Opción A. Ejercicio 4)

a) $f(a) = a^2 + m$

$f'(x) = 2x \rightarrow f'(a) = 2a$

La ecuación de la recta tangente es:

$y - (a^2 + m) = 2a(x - a) \rightarrow y = 2ax - a^2 + m$

Si esta recta pasa por el origen de coordenadas entonces:

$0 = -a^2 + m \rightarrow a = \sqrt{m}$

b) $x^2 + m = x \rightarrow x^2 - x + m = 0 \rightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4m}}{2}$

Si la recta $y = x$ es tangente a la gráfica de f solo tienen un punto en común, entonces:

$1 - 4m = 0 \rightarrow m = \dfrac{1}{4}$

042 Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = (x + 1)e^{-x}$ en el punto de corte de $f(x)$ con el eje X.

(Galicia. Junio 2006. Bloque 3. Opción 1)

Calculamos el punto de corte con el eje de abscisas:

$(x + 1)e^{-x} = 0 \rightarrow x + 1 = 0 \rightarrow x = -1$

$f'(x) = e^{-x} - (x + 1)e^{-x} \rightarrow f'(-1) = e$

La ecuación de la recta tangente es: $y = e(x + 1)$

043 Dada la función $f(x) = 9x + 6x^2 - x^4$, halla los puntos en los que la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ tiene pendiente 1.

(Castilla-La Mancha. Junio 2007. Bloque 1. Pregunta B)

Si la pendiente es igual a 1 entonces:

$f'(x) = 1 \rightarrow 9 + 12x - 4x^3 = 1 \rightarrow 4x^3 - 12x - 8 = 0$

$$\rightarrow x^3 - 3x - 2 = 0 \rightarrow (x - 2)(x + 1)^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases}$$

Así, los puntos que verifican la condición son $(2, 26)$ y $(-1, -4)$.

044 Calcula la ecuación de la recta tangente a la curva $x^2 + 16y^2 - 16 = 0$ en el punto de abscisa 3 y ordenada positiva.

Si $x = 3 \rightarrow 9 + 16y^2 - 16 = 0 \rightarrow 16y^2 = 7 \rightarrow y = \pm\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

Consideramos el punto $\left(3, \dfrac{\sqrt{7}}{4}\right)$.

$$2x + 32yy' = 0 \rightarrow 32yy' = -2x \rightarrow y' = -\frac{x}{16y}$$

$$y'\left(3, \frac{\sqrt{7}}{4}\right) = -\frac{3}{16 \cdot \frac{\sqrt{7}}{4}} = -\frac{3}{4\sqrt{7}} = -\frac{3\sqrt{7}}{28}$$

La ecuación de la recta tangente es:

$$y - \frac{\sqrt{7}}{4} = -\frac{3\sqrt{7}}{28}(x - 3) \rightarrow y = -\frac{3\sqrt{7}}{28}x + \frac{4\sqrt{7}}{7}$$

045 **Determina la ecuación de la recta tangente a la curva $4x^2 - 9y^2 - 36 = 0$ en el punto de abscisa 4 y ordenada positiva.**

Si $x = 4 \rightarrow 64 - 9y^2 - 36 = 0 \rightarrow 9y^2 = 28 \rightarrow y = \pm\frac{2\sqrt{7}}{3}$

Consideramos el punto $\left(4, \frac{2\sqrt{7}}{3}\right)$.

$$8x - 18yy' = 0 \rightarrow -18yy' = -8x \rightarrow y' = \frac{4x}{9y}$$

$$y'\left(4, \frac{2\sqrt{7}}{3}\right) = \frac{16}{9 \cdot \frac{2\sqrt{7}}{3}} = \frac{8}{3\sqrt{7}} = \frac{8\sqrt{7}}{21}$$

La ecuación de la recta tangente es:

$$y - \frac{2\sqrt{7}}{3} = \frac{8\sqrt{7}}{21}(x - 4) \rightarrow y = \frac{8\sqrt{7}}{21}x - \frac{6\sqrt{7}}{7}$$

046 **Halla las ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de la función $y = \ln x$ en el punto de abscisa $x = 1$.**

$f(1) = 0$

$f'(x) = \frac{1}{x} \rightarrow f'(1) = 1$

La ecuación de la recta tangente es: $y = x - 1$

La ecuación de la recta normal es: $y = -(x - 1) \rightarrow y = -x + 1$

047 **Diga para qué valor de x la recta tangente a la curva $y = \ln(x^2 + 1)$ es paralela a la recta $y = x$.**

Escriba la ecuación de esta tangente.

(Cataluña. Año 2008. Serie 5. Cuestión 3)

Las rectas son paralelas si tienen la misma pendiente, por tanto, buscamos el punto que verifica que: $f'(x) = 1$

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

Entonces: $\frac{2x}{x^2 + 1} = 1 \rightarrow 2x = x^2 + 1 \rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow (x - 1)^2 = 0 \rightarrow x = 1$

La ecuación de la recta tangente es: $y - \ln 2 = x - 1 \rightarrow y = x - 1 + \ln 2$

048 **Determina el punto de la parábola $y = x^2 - 7x + 3$ en el cual la tangente es paralela a la recta $y = -5x + 5$.**

Las rectas son paralelas si tienen la misma pendiente, por tanto, buscamos el punto que verifica que: $f'(x) = -5$

$f'(x) = 2x - 7$

Entonces: $2x - 7 = -5 \rightarrow 2x = 2 \rightarrow x = 1$

El punto tiene por coordenadas $(1, -3)$.

049 **Sea $f(x) = x + xe^{-x}$.**
Calcular la ecuación de la recta tangente a f en un punto x para el cual dicha recta tangente sea paralela a la recta que pasa por los puntos (1, 1) y (3, 3).

(País Vasco. Junio 2006. Bloque C. Problema C)

La recta que pasa por los puntos (1, 1) y (3, 3) tiene por ecuación: $y = x$

La recta tangente es paralela a ella si tiene la misma pendiente, por tanto, buscamos un punto x para el que se verifica que: $f'(x) = 1$

$f'(x) = 1 + e^{-x} - xe^{-x}$

Entonces: $1 + e^{-x} - xe^{-x} = 1 \rightarrow e^{-x} - xe^{-x} = 0 \rightarrow e^{-x}(1 - x) = 0 \rightarrow x = 1$

$f(1) = 1 + e^{-1}$

La ecuación de la recta tangente es: $y - (1 + e^{-1}) = x - 1 \rightarrow y = x + 1 + e^{-1}$

050 **Determina las abscisas de los puntos de la curva $y = \dfrac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 1$ cuya recta tangente forma un ángulo de 135° con el sentido positivo del eje de abscisas.**

(Galicia. Septiembre 2004. Bloque 3. Pregunta 1)

Si la recta tangente forma un ángulo de 135° con el eje de abscisas entonces: $m = tg\ 135° = -1$

Buscamos los puntos que verifican que $f'(x) = -1$.

$f'(x) = x^2 - 2x - 3$

Entonces: $x^2 - 2x - 3 = -1 \rightarrow x^2 - 2x - 2 = 0 \rightarrow x = \dfrac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$

051 **Calcúlense las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$ en el punto $x = 0$.**

(Castilla y León. Septiembre 2006. Prueba B. Cuestión 3)

$f(0) = 0$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 + 1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2} \rightarrow f'(0) = 0$$

La ecuación de la recta tangente es $y = 0$.

Así, la ecuación de la recta normal es $x = 0$.

052 Determina las ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal (recta perpendicular a la tangente) en el punto de abscisa 0, a la gráfica de la función f dada por:

$$f(x) = 2xe^x + \frac{x^3 - 2}{x^2 + 4}$$

(Castilla-La Mancha. Junio 2003. Bloque 4. Pregunta A)

$$f(0) = -\frac{1}{2}$$

$$f'(x) = 2e^x + 2xe^x + \frac{3x^2(x^2+4) - (x^3-2)2x}{(x^2+4)^2} =$$

$$= 2e^x + 2xe^x + \frac{x^4 + 12x^2 + 4x}{(x^2+4)^2} \to f'(0) = 2$$

La ecuación de la recta tangente es: $y = 2x$

La ecuación de la recta normal es: $y = -\frac{1}{2}x$

053 Halla las ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de la función $g(x) = |x^2 - 9|$ en el punto de abscisa $x = 2$.

$$g(2) = 5$$

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 9 & \text{si } |x| \geq 3 \\ -x^2 + 9 & \text{si } -3 < x < 3 \end{cases} \to g'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } |x| > 3 \\ -2x & \text{si } -3 < x < 3 \end{cases}$$

$$g'(2) = -4$$

La ecuación de la recta tangente es: $y - 5 = -4(x-2) \to y = -4x + 13$

La ecuación de la recta normal es: $y - 5 = \frac{1}{4}(x-2) \to y = \frac{1}{4}x + \frac{9}{2}$

054 Halla las ecuaciones de las rectas tangente y normal a las siguientes curvas en los puntos que se indican.

a) $y = xe^{\sqrt{x}}$, en $x = 4$.

b) $y = arc\ sen\sqrt{x}$, en $x = \frac{1}{2}$.

a) $f(4) = 4e^2$

$$f'(x) = e^{\sqrt{x}} + xe^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = e^{\sqrt{x}} + \frac{xe^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} \to f'(4) = 2e^2$$

La ecuación de la recta tangente es: $y - 4e^2 = 2e^2(x-4) \to y = 2e^2x - 4e^2$

La ecuación de la recta normal es:

$$y - 4e^2 = -\frac{1}{2e^2}(x-4) \to y = -\frac{1}{2e^2}x + \frac{2}{e^2} + 4e^2$$

b) $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x - x^2}} \to f'\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

La ecuación de la recta tangente es: $y - \frac{\pi}{4} = x - \frac{1}{2} \to y = x - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$

La ecuación de la recta normal es: $y - \frac{\pi}{4} = -\left(x - \frac{1}{2}\right) \to y = -x + \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$

055 **Halla las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva $y = x^3 + x^2 - 6x + 1$ en el punto de ordenada 1 y abscisa positiva.**

$$x^3 + x^2 - 6x + 1 = 1 \rightarrow x^3 + x^2 - 6x = 0 \rightarrow x(x^2 + x - 6) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = -3 \end{cases}$$

Tenemos que hallar las rectas que pasan por el punto (2, 1).

$f'(x) = 3x^2 + 2x - 6 \rightarrow f'(2) = 10$

La ecuación de la recta tangente es: $y - 1 = 10(x - 2) \rightarrow y = 10x - 19$

La ecuación de la recta normal es: $y - 1 = -\dfrac{1}{10}(x - 2) \rightarrow y = -\dfrac{1}{10}x + \dfrac{6}{5}$

056 **Sea f la función con dominio los números reales no nulos definida por $f(x) = \dfrac{4}{x}$.**

a) Calcular la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$.

b) Determinar los puntos M y N de la gráfica de f para los que las rectas tangentes en M y N se cortan en el punto (4, −8).

(C. Valenciana. Septiembre 2007. Bloque 3. Problema 2)

a) $f(2) = 2$

$f'(x) = -\dfrac{4}{x^2} \rightarrow f'(2) = -1$

La ecuación de la recta tangente es: $y - 2 = -(x - 2) \rightarrow y = -x + 4$

La ecuación de la recta normal es: $y - 2 = x - 2 \rightarrow y = x$

b) Sea $P\left(p, \dfrac{4}{p}\right)$ un punto cualquiera de la gráfica de f.

$f'(p) = -\dfrac{4}{p^2}$

Así, la recta tangente en P es de la forma:

$$y - \frac{4}{p} = -\frac{4}{p^2}(x - p) \rightarrow y = -\frac{4}{p^2}x + \frac{8}{p}$$

Si esta recta pasa por el punto (4, −8) tenemos que:

$$-8 = -\frac{4}{p^2} \cdot 4 + \frac{8}{p} \rightarrow 8p^2 + 8p - 16 = 0 \rightarrow p^2 + p - 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} p = 1 \\ p = -2 \end{cases}$$

Luego los puntos que buscamos son $M(1, 4)$ y $N(-2, -2)$.

057 **Calcula el valor de a para que la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = -ax^2 + 5x - 4$ en el punto de abscisa 3 corte al eje X en el punto $x = 5$. ¿Cuál es la ecuación de la recta normal?**

$f(3) = -9a + 11$

$f'(x) = -2ax + 5 \rightarrow f'(3) = -6a + 5$

La ecuación de la recta tangente es:

$y + 9a - 11 = (-6a + 5)(x - 3) \rightarrow y = (-6a + 5)x + 9a - 4$

Si esta recta pasa por el punto (5, 0) entonces:

$(-6a+5)5+9a-4=0 \rightarrow -21a=-21 \rightarrow a=1$

Por tanto, la ecuación de la recta tangente es: $y-2=-(x-3) \rightarrow y=-x+5$

La ecuación de la recta normal es: $y-2=x-3 \rightarrow y=x-1$

058 **Halla los valores de *a*, *b* y *c* para que las gráficas de las funciones $f(x)=x^2+ax+b$ y $g(x)=x^3+c$ pasen por el punto (1, 2) y en ese punto tengan la misma tangente.**

Si la gráfica de *f* pasa por el punto (1, 2), entonces: $1+a+b=2 \rightarrow a+b=1$

Del mismo modo, si la de *g* pasa por el punto (1, 2) tenemos que: $1+c=2 \rightarrow c=1$

Y si en este punto tienen la misma tangente se verifica que: $f'(1)=g'(1)$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=2x+a \rightarrow f'(1)=2+a \\ g'(x)=3x^2 \rightarrow g'(1)=3 \end{array}\right\} \rightarrow 2+a=3 \rightarrow a=1 \rightarrow b=0$$

059 **¿Para qué valor de *a* la recta $ax+y=\ln 2$ es tangente a la curva $f(x)=\ln\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)$ en el punto de abscisa $x=0$?**

(Canarias. Septiembre 2006. Opción B. Cuestión 1)

$f(0)=\ln 2$

$$f'(x)=\frac{\dfrac{x+1-(x+2)}{(x+1)^2}}{\dfrac{x+2}{x+1}}=\frac{-1}{(x+1)(x+2)} \rightarrow f'(0)=-\frac{1}{2}$$

La ecuación de la recta tangente es: $y-\ln 2=-\dfrac{1}{2}x \rightarrow \dfrac{1}{2}x+y=\ln 2$

Así, tenemos que: $a=\dfrac{1}{2}$

060 **Determinar el valor de *a* para que la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)=x^3+ax$ en el punto $x=0$ sea perpendicular a la recta $y+x=-3$.**

(Castilla y León. Junio 2008. Prueba A. Cuestión 2)

$y+x=-3 \rightarrow y=-x-3$

Si la recta tangente es perpendicular su pendiente es $f'(0)=1$.

$f'(x)=3x^2+a \rightarrow f'(0)=a$

Luego, resulta que $a=1$

061 **Halla la ecuación de la parábola $y=x^2+bx+c$ cuya recta tangente en el punto (1, 1) es paralela a la bisectriz del primer cuadrante.**

$f'(x)=2x+b \rightarrow f'(1)=2+b$

La bisectriz del primer cuadrante es la recta $y=x$.

Si la recta tangente es paralela a ella, entonces: $2+b=1 \rightarrow b=-1$

Así, la ecuación de la función es de la forma: $y=x^2-x+c$

Si pasa por el punto (1, 1) tenemos que: $1=1-1+c \rightarrow c=1$

Luego, la ecuación de la parábola es $y=x^2-x+1$.

062 **Considere la función $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 7$. Calcule c sabiendo que su recta tangente en el punto de abscisa $x = 0$ es horizontal.**

(Cataluña. Año 2006. Serie 1. Problema 6)

Si la recta tangente en este punto es horizontal, la pendiente es $f'(0) = 0$.

$f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx + c \rightarrow f'(0) = c$

Así, $c = 0$.

063 **Halla los puntos de la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + x$ en los cuales la recta tangente es paralela a la recta $y = x$.**

Si la recta tangente es paralela a la recta $y = x$, entonces: $f'(x) = 1$

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 1$

Entonces: $3x^2 - 6x + 1 = 1 \rightarrow x^2 - 2x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

Por tanto, los puntos de la gráfica que verifican la condición son (0, 0) y (2, −2).

064 **Determina en qué puntos de la gráfica de la función $y = x^3 - 3x^2 + x + 1$, la recta tangente a la misma es paralela a la recta $y = x + 7$.**

Si la recta tangente es paralela a la recta $y = x$ entonces: $f'(x) = 1$

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 1$

Entonces: $3x^2 - 6x + 1 = 1 \rightarrow x^2 - 2x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

Por tanto, los puntos de la gráfica que verifican la condición son (0, 1) y (2, −1).

065 **Obtener la derivada de la función:**

$$f(x) = ax + b + sen\, x$$

Calcular a y b si $O(0, 0)$ es un punto de la curva $y = ax + b + sen\, x$, cuya tangente en $O(0, 0)$ es el eje X.

(C. Valenciana. Septiembre 2006. Ejercicio B. Problema 3)

$f'(x) = a + cos\, x$

Si la tangente a la curva en $x = 0$ es la recta $y = 0$, entonces: $f'(0) = 0$

$a + cos\, 0 = 0 \rightarrow a + 1 = 0 \rightarrow a = -1$

Así, la función es de la forma $f(x) = -x + b + sen\, x$.

Si la curva pasa por el punto (0, 0) tenemos que: $b + sen\, 0 = 0 \rightarrow b = 0$

066 **De la función $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:**

$$f(x) = \frac{ax^2 + b}{x}$$

se sabe que la recta tangente a su gráfica en el punto de abscisa $x = 1$ viene dada por $y = -2$.

Calcula a y b.

(Andalucía. Año 2005. Modelo 5. Opción B. Ejercicio 1)

$$f'(x) = \frac{ax^2 - b}{x^2}$$

Si la tangente a la curva en $x = 1$ es la recta $y = -2$, entonces: $f'(1) = 0$

$a - b = 0 \rightarrow a = b$

Así, la función es de la forma: $f(x) = \dfrac{ax^2 + a}{x}$

Si la curva pasa por el punto $(1, -2)$ tenemos que: $2a = -2 \rightarrow a = b = -1$

067 **Utilizando la definición, calcula las derivadas laterales de las siguientes funciones en $x = 2$.**

a) $f(x) = |2 - x|$

b) $g(x) = |x^2 - 4|$

a) $f(x) = \begin{cases} -2 + x & \text{si } x \geq 2 \\ 2 - x & \text{si } x < 2 \end{cases}$

$$f'(2^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{-2 + 2 + h}{h} = 1$$

$$f'(2^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{2 - (2+h)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

Las derivadas laterales no son iguales $\rightarrow f(x)$ no es derivable en $x = 2$.

b) $g(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x < -2 \\ -x^2 + 4 & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

$$g'(2^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{g(2+h) - g(2)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{(2+h)^2 - 4}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{4h + h^2}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0^+} (4 + h) = 4$$

$$g'(2^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{g(2+h) - g(2)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-(2+h)^2 + 4}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-4h - h^2}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0^-} (-4 - h) = -4$$

Las derivadas laterales no son iguales $\rightarrow g(x)$ no es derivable en $x = 2$.

068 **Utilizando la definición, calcula las derivadas laterales de la siguiente función en $x = 0$.**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$f'(0^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h^2} = +\infty$$

$$f'(0^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{\frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{1}{h^2} = +\infty$$

069 Sea la función f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & \text{si } x \le 1 \\ 2 - x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Calcula, si es posible, las derivadas laterales de f en $x = 1$.

(Andalucía. Año 2003. Modelo 5. Opción A. Ejercicio 1)

$$f'(1^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{2 - (1+h)^2 - 4}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{-h^2 - 2h - 3}{h} = -\infty$$

$$f'(1^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{(1+h)^2 + 3 - 4}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{2h + h^2}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^-} (2 + h) = 2$$

070 Estudia si la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$ es continua y derivable en $x = 0$.

$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt[3]{x} = \lim_{x \to 0^-} \sqrt[3]{x} = 0 = f(0) \to f(x) \text{ es continua en } x = 0.$$

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = +\infty \to f(x) \text{ no es derivable en } x = 0.$$

071 Demuestra que la siguiente función es continua en el punto $x = 1$, pero no es derivable en él.

$$f(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{si } x \le 1 \\ x^2 - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

a) ¿Contradice este hecho alguno de los teoremas o propiedades estudiados en la unidad?

b) Pon un ejemplo de una función que sea derivable y discontinua en un punto.

$$\lim_{x \to 1^+} (x^2 - 1) = \lim_{x \to 1^-} (-x + 1) = 0 = f(1) \to f(x) \text{ es continua en } x = 1.$$

$$f'(1^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{(1+h)^2 - 1}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{2h + h^2}{h} = \lim_{h \to 0^+} (2 + h) = 2$$

$$f'(1^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-(1+h) + 1}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

Las derivadas laterales no son iguales, por tanto, $f(x)$ no es derivable en $x = 1$.

a) No, ya que la continuidad no implica la derivabilidad.

b) No existe, ya que si una función es discontinua en un punto no puede ser derivable en él.

072 Estudia la continuidad y derivabilidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x + 1}{x - 1} & \text{si } x \le 2 \\ -2x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

- Si $x > 2$: $f(x) = -2x \to$ Función polinómica, por tanto, continua en $(2, +\infty)$.

- Si $x < 2$: $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1} \rightarrow$ Función racional continua en $(-\infty, 2)$ salvo en $x = 1$.
- Si $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} f(1^-) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x+1}{x-1} = -\infty \\ f(1^+) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x+1}{x-1} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow f(x) \text{ no es continua en } x = 1 \text{, por tanto, no es derivable en } x = 1.$$

- Si $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} f(2^-) = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x+1}{x-1} = 3 \\ f(2^+) = \lim\limits_{x\to 2^+} (-2x) = -4 \end{array}\right\} \rightarrow f(x) \text{ no es continua en } x = 2 \text{, luego, no es derivable en } x = 2.$$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-2}{(x-1)^2} & \text{si } x < 2 \\ -2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Así, la función es continua y derivable en $\mathbb{R} - \{1, 2\}$.

073 **Se considera la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:**

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < -4 \\ x+2 & \text{si } -4 \leq x < 2 \\ \dfrac{8}{x} & \text{si } 2 \leq x \end{cases}$$

Estudiar la continuidad y derivabilidad de $f(x)$.

(La Rioja. Junio 2004. Propuesta A. Ejercicio 5)

- Si $x < -4$: $f(x) = -1 \rightarrow$ Función constante, por tanto, continua en $(-\infty, -4)$.
- Si $-4 < x < 2$: $f(x) = x + 2 \rightarrow$ Función polinómica, por tanto, continua en (4, 2).
- Si $x > 2$: $f(x) = \dfrac{8}{x} \rightarrow$ Función racional, continua en $(2, +\infty)$.
- Si $x = -4$:

$$\left.\begin{array}{l} f(-4^-) = \lim\limits_{x\to -4^-} (-1) = -1 \\ f(-4^+) = \lim\limits_{x\to -4^+} (x+2) = -2 \end{array}\right\} \rightarrow f(x) \text{ no es continua en } x = -4 \text{, por tanto, no es derivable en } x = -4.$$

- Si $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} f(2^-) = \lim\limits_{x\to 2^-} (x+2) = 4 \\ f(2^+) = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{8}{x} = 4 \end{array}\right\} \rightarrow \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 4 = f(2) \rightarrow f(x) \text{ es continua en } x = 2.$$

Así, la función es continua en $\mathbb{R} - \{-4\}$.

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -4 \\ 1 & \text{si } -4 < x < 2 \\ -\dfrac{8}{x^2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-) = 1 \\ f'(2^+) = -2 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Las derivadas laterales no son iguales, por tanto, } f(x) \text{ no es derivable en } x = 2.$$

Luego, la función es derivable en $\mathbb{R} - \{-4, 2\}$.

074 **Considera la siguiente función:**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ a + bx & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

a) Determina a y b para que sea continua en $\mathbb{R}$.

b) Para esos valores, estudia la derivabilidad de $f(x)$.

a) • Si $x < 0$: $f(x) = x^2 \rightarrow$ Función polinómica, por tanto, continua en $(-\infty, 0)$.

• Si $0 < x < 1$: $f(x) = a + bx \rightarrow$ Función polinómica, por tanto, continua en $(0, 1)$.

• Si $x > 1$: $f(x) = 3 \rightarrow$ Función constante, por tanto, continua en $(1, +\infty)$.

La función es continua en $\mathbb{R}$ si lo es en los puntos en los que cambia su expresión algebraica.

• Para que la función sea continua en $x = 0$ los límites laterales tienen que ser iguales y coincidir con $f(0) = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} f(0^-) = \lim\limits_{x \to 0^-} x^2 = 0 \\ f(0^+) = \lim\limits_{x \to 0^+} (a + bx) = a \end{array}\right\} \rightarrow f(0^-) = f(0^+) = f(0) \rightarrow a = 0$$

• Si $a = 0$, para que la función sea continua en $x = 1$ los límites laterales tienen que ser iguales y coincidir con $f(1) = b$:

$$\left.\begin{array}{l} f(1^-) = \lim\limits_{x \to 1^-} (bx) = b \\ f(1^+) = \lim\limits_{x \to 1^+} 3 = 3 \end{array}\right\} \rightarrow f(1^-) = f(1^+) = f(1) \rightarrow b = 3$$

b) $$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 0 \\ 3 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-) = 0 \\ f'(0^+) = 3 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Las derivadas laterales no son iguales, por tanto, } f(x) \text{ no es derivable en } x = 0.$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-) = 3 \\ f'(1^+) = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Las derivadas laterales no son iguales, por tanto, } f(x) \text{ no es derivable en } x = 1.$$

Luego, la función es derivable en $\mathbb{R} - \{0, 1\}$.

075 **Sea f la función definida para todo número real x de modo que para los valores de x pertenecientes al intervalo cerrado $[-1, 1]$ se tiene $f(x) = (x + 1)(x - 1)^2$ y para los valores de x no pertenecientes a dicho intervalo se tiene $f(x) = 0$. Se pide estudiar su continuidad y derivabilidad.**

(Aragón. Septiembre 2001. Opción A. Cuestión 3)

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)(x-1)^2 & \text{si } -1 \le x \le 1 \\ 0 & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$$

- Si $-1 < x < 1$: $f(x) = (x+1)(x-1)^2 \rightarrow$ Función polinómica, por tanto, continua en $(-1, 1)$.

  Si $|x| > 1$: $f(x) = 0 \rightarrow$ Función constante, por tanto, continua en $\mathbb{R} - (-1, 1)$.

- Si $x = 1$:

$$\left.\begin{aligned} f(1^-) &= \lim_{x\to 1^-} (x+1)(x-1)^2 = 0 \\ f(1^+) &= \lim_{x\to 1^+} 0 = 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = 0 = f(1)$$

$\rightarrow f(x)$ es continua en $x = 1$.

- Si $x = -1$:

$$\left.\begin{aligned} f(-1^-) &= \lim_{x\to -1^-} 0 = 0 \\ f(-1^+) &= \lim_{x\to -1^+} (x+1)(x-1)^2 = 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow \lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = 0 = f(-1)$$

$\rightarrow f(x)$ es continua en $x = -1$.

Luego, la función es continua en $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \begin{cases} (x-1)(3x+1) & \text{si } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} f'(1^-) &= 0 \\ f'(1^+) &= 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow$$ Las derivadas laterales existen y son iguales, por tanto, $f(x)$ es derivable en $x = 1$.

$$\left.\begin{aligned} f'(-1^-) &= 0 \\ f'(-1^+) &= 4 \end{aligned}\right\} \rightarrow$$ Las derivadas laterales no son iguales, por tanto, $f(x)$ no es derivable en $x = -1$.

Luego, la función es derivable en $\mathbb{R} - \{-1\}$.

076 **Decide si la función $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \le 1 \\ 2x & \text{si } x > 1 \end{cases}$ es derivable en $x = 1$.**

Para que una función sea derivable en un punto ha de ser continua, y para ser continua los límites laterales tienen que ser iguales y coincidir con el valor de la función en dicho punto; en este caso con $f(1) = 1$:

$$\left.\begin{aligned} f(1^-) &= \lim_{x\to 1^-} x^2 = 1 \\ f(1^+) &= \lim_{x\to 1^+} 2x = 2 \end{aligned}\right\} \rightarrow$$ $f(x)$ no es continua en $x = 1$, por tanto, no es derivable en $x = 1$.

077 **Demuestra que la función $f(x) = |x|^3$ es derivable en $x = 0$.**

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0 = f(0) \rightarrow f(x) \text{ es continua en } x = 0.$$

$$f'(0^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|^3}{h} = \lim_{h\to 0^+} h^2 = 0$$

$$f'(0^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|^3}{h} = \lim_{h\to 0^-} (-h^2) = 0$$

Las derivadas laterales existen y son iguales, por tanto, $f(x)$ es derivable en $x = 0$.

078 **Razona si las siguientes funciones son derivables en los puntos $x = -2$, $x = 0$ y $x = 1$.**

a) $f(x) = \dfrac{2}{x}$ b) $g(x) = x|x+2|$

a) • Si $x = -2$: $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = -1 = f(-2) \rightarrow f(x)$ es continua en $x = -2$.

• Si $x = 0$: $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty\end{array}\right\} \rightarrow f(x)$ no es continua en $x = 0$, por tanto, no es derivable en $x = 0$.

• Si $x = 1$: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 2 = f(1) \rightarrow f(x)$ es continua en $x = 1$.

Estudiamos la derivabilidad en los puntos en los que la función es continua:

$$f'(x) = -\frac{2}{x^2}$$

• Si $x = -2$: $f'(-2) = -\dfrac{1}{2} \rightarrow f(x)$ es derivable en $x = -2$.

• Si $x = 1$: $f'(1) = -2 \rightarrow f(x)$ es derivable en $x = 1$.

b) $g(x) = \begin{cases} x(x+2) & \text{si } x \geq -2 \\ -x(x+2) & \text{si } x < -2 \end{cases}$

• Si $x = -2$: $\lim\limits_{x\to -2^+} g(x) = \lim\limits_{x\to -2^-} g(x) = 0 = g(-2) \rightarrow g(x)$ es continua en $x = -2$.

• Si $x = 0$: $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = 0 = g(0) \rightarrow g(x)$ es continua en $x = 0$.

• Si $x = 1$: $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = 3 = g(1) \rightarrow g(x)$ es continua en $x = 1$.

Estudiamos la derivabilidad en estos puntos:

$$g'(x) = \begin{cases} 2x+2 & \text{si } x > -2 \\ -2x-2 & \text{si } x < -2 \end{cases}$$

• Si $x = -2$: $\left.\begin{array}{l} g'(-2^-) = 2 \\ g'(-2^+) = -2 \end{array}\right\} \rightarrow$ Las derivadas laterales no son iguales, por tanto, $g(x)$ no es derivable en $x = -2$.

• Si $x = 0$: $g'(0) = 2 \cdot 0 + 2 = 2 \rightarrow g(x)$ es derivable en $x = 0$.

• Si $x = 1$: $g'(1) = 2 \cdot 1 + 2 = 4 \rightarrow g(x)$ es derivable en $x = 1$.

079 **Estudia la derivabilidad de $f(x) = 2 - x|x|$ en $x = 0$.**

(Andalucía. Año 2004. Modelo 5. Opción A. Ejercicio 1)

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ 2 + x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 2 = f(0) \rightarrow f(x)$ es continua en $x = 0$.

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x > 0 \\ 2x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$\left.\begin{array}{l} f'(0^-) = 0 \\ f'(0^+) = 0 \end{array}\right\} \rightarrow$ Las derivadas laterales existen y son iguales, por tanto, $f(x)$ es derivable en $x = 0$.

080 **Encontrar el valor de k para el cual la función:**

$$f(x) = \begin{cases} 6 - \dfrac{x}{2} & \text{si } x < 2 \\ x^2 + kx & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

es continua.

Estudiar si su derivada es una función continua.

(Aragón. Junio 2008. Bloque 3. Opción B)

- Si $x < 2$: $f(x) = 6 - \dfrac{x}{2} \rightarrow$ Función polinómica, por tanto, continua en $(-\infty, 2)$.
- Si $x > 2$: $f(x) = x^2 + kx \rightarrow$ Función polinómica, por tanto, continua en $(2, +\infty)$.
- Para que la función sea continua en $x = 2$ los límites laterales tienen que ser iguales y coincidir con $f(2) = 4 + 2k$:

$$\left.\begin{array}{l} f(2^-) = \lim\limits_{x \to 2^-} \left(6 - \dfrac{x}{2}\right) = 5 \\ f(2^+) = \lim\limits_{x \to 2^+} (x^2 + kx) = 4 + 2k \end{array}\right\} \rightarrow f(2^-) = f(2^+) = f(2) \rightarrow 4 + 2k = 5 \rightarrow k = \frac{1}{2}$$

Entonces: $f(x) = \begin{cases} 6 - \dfrac{x}{2} & \text{si } x < 2 \\ x^2 + \dfrac{1}{2}x & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \rightarrow f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2} & \text{si } x < 2 \\ 2x + \dfrac{1}{2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-) = -\dfrac{1}{2} \\ f'(2^+) = \dfrac{9}{2} \end{array}\right\} \rightarrow$$ Las derivadas laterales no son iguales, por tanto, $f(x)$ no es derivable en $x = 2$.

Así, la función derivada no es continua en $x = 2$.

081 **Sea f la función definida por:**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si } x \geq 3 \\ 2x + a & \text{si } x < 3 \end{cases}$$

a) Encuentra el valor de a para que f sea continua.

b) Comprueba si es derivable en $x = 3$ a partir de la definición.

(Asturias. Junio 2001. Bloque 3)

a)
- Si $x > 3$: $f(x) = x^2 - 2x \rightarrow$ Función polinómica, por tanto, continua en $(3, +\infty)$.
- Si $x < 3$: $f(x) = 2x + a \rightarrow$ Función polinómica, por tanto, continua en $(-\infty, 3)$.
- Para que la función sea continua en $x = 3$ los límites laterales tienen que ser iguales y coincidir con $f(3) = 3$:

$$\left.\begin{array}{l} f(3^-) = \lim\limits_{x \to 3^-} (2x + a) = 6 + a \\ f(3^+) = \lim\limits_{x \to 3^+} (x^2 - 2x) = 3 \end{array}\right\} \rightarrow f(3^-) = f(3^+) = f(3) \rightarrow 6 + a = 3 \rightarrow a = -3$$

b) La función solo puede ser derivable si es continua, por tanto, consideramos:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si } x \geq 3 \\ 2x - 3 & \text{si } x < 3 \end{cases}$$

$$f'(3^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{(3+h)^2-2(3+h)-3}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{9+6h+h^2-6-2h-3}{h} = \lim_{h\to 0^+} (4+h) = 4$$
$$f'(3^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{2(3+h)-3-3}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{2h}{h} = 2$$

Las derivadas laterales existen pero no son iguales, por tanto, $f(x)$ no es derivable en $x = 3$.

082 **Considera la función definida por:**

$$f(x) = \begin{cases} e^{ax} & \text{si } x \le 0 \\ 2x+1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

donde a es un número real.

a) Calcula $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ y comprueba que $f(x)$ es continua en $x = 0$.

b) ¿Para qué valor del parámetro a la función $f(x)$ es derivable en $x = 0$?

(Cataluña. Septiembre 2001. Cuestión 3)

a) $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^+} (2x+1) = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} e^{ax} = 1 \end{array}\right\} \to \lim_{x\to 0} f(x) = 1$$

$f(0) = e^{a\cdot 0} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) \to f(x)$ es continua en $x = 0$.

b) $$f'(x) = \begin{cases} ae^{ax} & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Para que la función sea derivable en $x = 0$ las derivadas laterales tienen que ser iguales:

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-) = a \\ f'(0^+) = 2 \end{array}\right\} \to a = 2$$

083 **Determina el valor de a, si existe, para el cual la siguiente función es derivable en $x = 0$.**

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x \le 0 \\ x^2 + a & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Para que la función sea derivable, en primer lugar, tiene que ser continua.

La función es continua en $x = 0$ si los límites laterales son iguales y coinciden con $f(0) = \cos 0 = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} f(0^-) = \lim\limits_{x\to 0^-} \cos x = 1 \\ f(0^+) = \lim\limits_{x\to 0^+} (x^2+a) = a \end{array}\right\} \to f(0^-) = f(0^+) = f(0) \to a = 1$$

Entonces: $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x \le 0 \\ x^2+1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \to f'(x) = \begin{cases} -\operatorname{sen} x & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} f'(0^-) = 0 \\ f'(0^+) = 0 \end{array}\right\} \to$ Las derivadas laterales existen y son iguales, por tanto, $f(x)$ es derivable en $x = 0$ si $a = 1$.

084 Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1 & \text{si } x < 2 \\ e^{2-x} + 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

calcula a para que f sea continua en $x = 2$. Para el valor obtenido, ¿es f derivable en $x = 2$?

(Galicia. Junio 2007. Bloque 3. Opción 1)

Para que la función sea continua en $x = 2$ los límites laterales tienen que ser iguales y coincidir con $f(2) = 3$:

$$\left.\begin{array}{l} f(2^-) = \lim\limits_{x\to 2^-} (ax^2 + 1) = 4a + 1 \\ f(2^+) = \lim\limits_{x\to 2^+} (e^{2-x} + 2) = 3 \end{array}\right\} \to f(2^-) = f(2^+) = f(2) \to 4a + 1 = 3 \to a = \frac{1}{2}$$

$$\text{Entonces: } f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}x^2 + 1 & \text{si } x < 2 \\ e^{2-x} + 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \to f'(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 2 \\ -e^{2-x} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-) = 2 \\ f'(2^+) = -1 \end{array}\right\} \to \text{Las derivadas laterales no son iguales, por tanto, } f(x) \text{ no es derivable en } x = 2.$$

085 Discutir según los valores de m la continuidad y la derivabilidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} 3 - mx^2 & \text{si } x \leq 1 \\ \dfrac{2}{mx} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

(Canarias. Septiembre 2004. Opción A. Cuestión 1)

- Si $x < 1$: $f(x) = 3 - mx^2 \to$ Función polinómica, por tanto, continua en $(-\infty, 1)$.
- Si $x > 1$: $f(x) = \dfrac{2}{mx} \to$ Función racional continua si $x \neq 0$ y si $m \neq 0$.
- Para que la función sea continua en $x = 1$ los límites laterales tienen que ser iguales y coincidir con $f(1) = 3 - m$:

$$\left.\begin{array}{l} f(1^-) = \lim\limits_{x\to 1^-} (3 - mx^2) = 3 - m \\ f(1^+) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2}{mx} = \dfrac{2}{m} \end{array}\right\} \to f(1^-) = f(1^+) = f(1) \to 3 - m = \frac{2}{m}$$

$$\to m^2 - 3m + 2 = 0 \to \begin{cases} m = 1 \\ m = 2 \end{cases}$$

Luego, $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$ si $m = 1$ o $m = 2$.

Para que una función sea derivable tiene que ser continua, así consideramos la derivada de la función si $m = 1$ o si $m = 2$.

$$f'(x) = \begin{cases} -2mx & \text{si } x < 1 \\ -\dfrac{2}{mx^2} & \text{si } x > 1 \end{cases} \qquad \left.\begin{array}{l} f'(1^-) = -2m \\ f'(1^+) = -\dfrac{2}{m} \end{array}\right\}$$

- Si $m = 1 \to f'(1^-) = f'(1^+) \to$ Las derivadas laterales en $x = 1$ son iguales, por tanto, $f(x)$ es derivable en $x = 1 \to$ La función es derivable en $\mathbb{R}$.
- Si $m = 2 \to f'(1^-) \neq f'(1^+) \to$ Las derivadas laterales no son iguales, por tanto, $f(x)$ no es derivable en $x = 1 \to$ La función es derivable en $\mathbb{R} - \{1\}$.

086 **Calcular los valores de a y b para que la función:**

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 + 2a\cos x & \text{si } 0 \le x < \pi \\ ax^2 + b & \text{si } x \ge \pi \end{cases}$$

sea continua para todo valor de x.

Estudiar la derivabilidad de $f(x)$ para los valores de a y b obtenidos en el apartado anterior.

(Madrid. Septiembre 2006. Opción A. Ejercicio 2)

- Si $x < 0$: $f(x) = 3x + 2 \rightarrow$ Función polinómica, por tanto, continua en $(-\infty, 0)$.
- Si $0 < x < \pi$: $f(x) = x^2 + 2a\cos x \rightarrow$ Función polinómica y trigonométrica, por tanto, continua en $(0, \pi)$.
- Si $x > \pi$: $f(x) = ax^2 + b \rightarrow$ Función polinómica, por tanto, continua en $(\pi, +\infty)$.
- Para que la función sea continua en $x = 0$ los límites laterales tienen que ser iguales y coincidir con $f(0) = 2a$:

$$\left.\begin{array}{l} f(0^-) = \lim\limits_{x \to 0^-} (3x + 2) = 2 \\ f(0^+) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x^2 + 2a\cos x) = 2a \end{array}\right\} \rightarrow f(0^-) = f(0^+) = f(0) \rightarrow 2a = 2 \rightarrow a = 1$$

Consideramos que $a = 1$, entonces para que la función sea continua en $x = \pi$ los límites laterales tienen que ser iguales y coincidir con $f(\pi) = \pi^2 + b$:

$$\left.\begin{array}{l} f(\pi^-) = \lim\limits_{x \to \pi^-} (x^2 + 2\cos x) = \pi^2 - 2 \\ f(\pi^+) = \lim\limits_{x \to \pi^+} (x^2 + b) = \pi^2 + b \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow f(\pi^-) = f(\pi^+) = f(\pi) \\ \quad \rightarrow \pi^2 - 2 = \pi^2 + b \rightarrow b = -2 \end{array}$$

Si $a = 1$ y $b = -2$ entonces: $f'(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < 0 \\ 2x - 2\operatorname{sen} x & \text{si } 0 < x < \pi \\ 2x & \text{si } x > \pi \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-) = 3 \\ f'(0^+) = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l}\text{Las derivadas laterales no son iguales, por tanto,} \\ f(x) \text{ no es derivable en } x = 0.\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(\pi^-) = 2\pi \\ f'(\pi^+) = 2\pi \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l}\text{Las derivadas laterales existen y son iguales, por tanto,} \\ f(x) \text{ es derivable en } x = \pi.\end{array}$$

087 **Considera la siguiente función:**

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 + x^2 & \text{si } x < 1 \\ ax - b & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

Determina los valores de a y b para que sea derivable en todos los puntos.

Una función solo puede ser derivable en todos los puntos si es continua en todos ellos.

- Si $x < 1$: $f(x) = -x^3 + x^2 \rightarrow$ Función polinómica, por tanto, continua en $(-\infty, 1)$.
- Si $x > 1$: $f(x) = ax^2 + b \rightarrow$ Función polinómica, por tanto, continua en $(1, +\infty)$.

- Para que la función sea continua en $x = 1$ los límites laterales tienen que ser iguales y coincidir con $f(1) = a - b$:

$$\left.\begin{array}{l} f(1^-) = \lim\limits_{x \to 1^-} (-x^3 + x^2) = 0 \\ f(1^+) = \lim\limits_{x \to 1^+} (ax - b) = a - b \end{array}\right\} \rightarrow f(1^-) = f(1^+) = f(1) \rightarrow a - b = 0 \rightarrow a = b$$

La función es derivable en $x = 1$ si las derivadas laterales existen y son iguales.

$$f'(x) = \begin{cases} -3x^2 + 2x & \text{si } x < 1 \\ a & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-) = -1 \\ f'(1^+) = a \end{array}\right\} \rightarrow a = -1 \rightarrow b = -1$$

088 **Halla los valores que deben tener *a* y *b* para que la siguiente función sea derivable en $x = 0$.**

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } x \leq 0 \\ ax + b & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Para que la función sea derivable en $x = 0$ ha de ser continua en este punto, para ello los límites laterales tienen que ser iguales y coincidir con $f(0) = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} f(0^-) = \lim\limits_{x \to 0^-} \operatorname{sen} x = 0 \\ f(0^+) = \lim\limits_{x \to 0^+} (ax + b) = b \end{array}\right\} \rightarrow f(0^-) = f(0^+) = f(0) \rightarrow b = 0$$

Una vez que comprobamos que es continua en $x = 0$, para que la función sea derivable en dicho punto las derivadas laterales tienen que existir y ser iguales.

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x < 0 \\ a & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-) = 1 \\ f'(0^+) = a \end{array}\right\} \rightarrow a = 1$$

089 **Determina los valores de *a* y *b* para que la siguiente función sea derivable en todos los puntos.**

$$f(x) = \begin{cases} bx^2 + ax & \text{si } x \leq -1 \\ \dfrac{a}{x} & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ \dfrac{x^2 + ax + 1}{x + 1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

(Canarias. Junio 2006. Opción B. Cuestión 2)

Si $-1 < x < 1$: $f(x) = \dfrac{a}{x} \rightarrow$ Función racional, no es continua en $x = 0$, por tanto, no es derivable en $x = 0$.

Así, no existen valores de *a* y *b* para los que la función sea derivable en todos los puntos.

090 **Halla los valores que deben tener a y b para que la siguiente función sea derivable en $x = 0$.**

$$f(x) = \begin{cases} \ln(e + sen\ x) & \text{si } x < 0 \\ x^3 + ax + b & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Para que la función sea derivable en $x = 0$ ha de ser continua en este punto, para ello los límites laterales tienen que ser iguales y coincidir con $f(0) = b$:

$$\left.\begin{array}{l} f(0^-) = \lim\limits_{x \to 0^-} \ln(e + sen\ x) = 1 \\ f(0^+) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x^3 + ax + b) = b \end{array}\right\} \to f(0^-) = f(0^+) = f(0) \to b = 1$$

Para que la función sea derivable en $x = 0$ las derivadas laterales tienen que existir y ser iguales.

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos x}{e + sen\ x} & \text{si } x < 0 \\ 3x^2 + a & \text{si } x > 0 \end{cases} \qquad \left.\begin{array}{l} f'(0^-) = \dfrac{1}{e} \\ f'(0^+) = a \end{array}\right\} \to a = \frac{1}{e}$$

091 **Halla los valores que deben tener a y b para que la siguiente función sea derivable en $x = 0$.**

$$f(x) = \begin{cases} 5 + sen\ x & \text{si } x \leq 0 \\ -x^2 + ax + b & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Para que la función sea derivable en $x = 0$ ha de ser continua en este punto, para ello los límites laterales tienen que ser iguales y coincidir con $f(0) = 5$:

$$\left.\begin{array}{l} f(0^-) = \lim\limits_{x \to 0^-} (5 + sen\ x) = 5 \\ f(0^+) = \lim\limits_{x \to 0^+} (-x^2 + ax + b) = b \end{array}\right\} \to f(0^-) = f(0^+) = f(0) \to b = 5$$

Para que la función sea derivable en $x = 0$ las derivadas laterales tienen que existir y ser iguales.

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x < 0 \\ -2x + a & \text{si } x > 0 \end{cases} \qquad \left.\begin{array}{l} f'(0^-) = 1 \\ f'(0^+) = a \end{array}\right\} \to a = 1$$

092 **Demuestra que la siguiente función es derivable para todos los valores de x.**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 sen\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

La función es derivable para todos los valores de x solo si es continua en todos ellos.

Estudiamos la continuidad en $x = 0$:

$$sen\frac{1}{x} \text{ función acotada} \to f(0) = \lim_{x \to 0} x^2 sen\frac{1}{x} = 0 \to f(x) \text{ es continua.}$$

$$f'(x) = 2x sen\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} \quad \text{si } x \neq 0$$

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 sen\dfrac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h \to 0} h sen\frac{1}{h} = 0 \to f(x) \text{ es derivable.}$$

093 **Calcula razonadamente los valores de m y n para que la siguiente función sea derivable en $x = 4$.**

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{25 - x^2} & \text{si } -5 \leq x < 4 \\ x^2 + mx + n & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

Para que la función sea derivable en $x = 4$ ha de ser continua en este punto, para ello los límites laterales tienen que ser iguales y coincidir con $f(4) = 16 + 4m + n$:

$$\left.\begin{array}{l} f(4^-) = \lim\limits_{x\to 4^-} \sqrt{25 - x^2} = 3 \\ f(4^+) = \lim\limits_{x\to 4^+} (x^2 + mx + n) = 16 + m + n \end{array}\right\} \to f(4^-) = f(4^+) = f(4) \to 16 + m + n = 3$$

Para que la función sea derivable en $x = 4$ las derivadas laterales tienen que existir y ser iguales.

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-x}{\sqrt{25 - x^2}} & \text{si } -5 < x < 4 \\ 2x + m & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(4^-) = -\dfrac{4}{3} \\ f'(4^+) = 8 + m \end{array}\right\} \to 8 + m = -\frac{4}{3} \to m = -\frac{28}{3}$$

Así: $16 - \dfrac{28}{3} + n = 3 \to \dfrac{20}{3} + n = 3 \to n = -\dfrac{11}{3}$

094 **Utilizando la definición, calcula la función derivada de las siguientes funciones.**

a) $f(x) = 123$ **b)** $f(x) = 3x^2$ **c)** $f(x) = x^3$ **d)** $f(x) = ax$

a) $f'(x) = 0$ b) $f'(x) = 6x$ c) $f'(x) = 3x^2$ d) $f'(x) = a$

095 **A partir de la definición, halla la función derivada de estas funciones.**

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ **b)** $f(x) = \sqrt{x}$ **c)** $f(x) = sen\, x$ **d)** $f(x) = cos\, x$

a) $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\dfrac{1}{x+h} - \dfrac{1}{x}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{x - x - h}{xh(x+h)} = -\dfrac{1}{x^2}$

b) $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\left(\sqrt{x+h} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{x + h - x}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

c) $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{sen\,(x+h) - sen\, x}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{sen\, x \cdot cos\, h + cos\, x \cdot sen\, h - sen\, x}{h} = cos\, x$

d) $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{cos\,(x+h) - cos\, x}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{cos\, x \cdot cos\, h - sen\, x \cdot sen\, h - cos\, x}{h} = -sen\, x$

096 Calcular la derivada en el punto $x = 1$ de la función $f(x) = x^{-1/2} \ln x$.

(Extremadura. Septiembre 2000. Repertorio B. Ejercicio 1)

$$f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\ln x + x^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{x} = -\frac{\ln x}{2\sqrt{x^3}} + \frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{2 - \ln x}{x\sqrt{x}}$$

$$f'(1) = 2$$

097 Calcula las tres primeras derivadas de las siguientes funciones.

a) $f(x) = 2x$

b) $g(x) = x^2$

c) $h(x) = x^3$

d) $i(x) = \cos x$

e) $j(x) = \operatorname{sen} x$

f) $k(x) = \operatorname{tg} x$

a) $f'(x) = 2$
$f''(x) = 0$
$f'''(x) = 0$

b) $g'(x) = 2x$
$g''(x) = 2$
$g'''(x) = 0$

c) $h'(x) = 3x^2$
$h''(x) = 6x$
$h'''(x) = 6$

d) $i'(x) = -\operatorname{sen} x$
$i''(x) = -\cos x$
$i'''(x) = \operatorname{sen} x$

e) $j'(x) = \cos x$
$j''(x) = -\operatorname{sen} x$
$j'''(x) = -\cos x$

f) $k'(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x$
$k''(x) = 2\operatorname{tg} x \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 x)$
$k'''(x) = 2(1 + \operatorname{tg}^2 x)^2 + 2\operatorname{tg} x \cdot 2\operatorname{tg} x \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 x) = (2 + 4\operatorname{tg}^2 x)(1 + \operatorname{tg}^2 x)$

098 Halla los puntos en los que la función $h(x) = \ln x$ es derivable, y calcula su primera y segunda derivadas.

La función es continua en su dominio, $(0, +\infty)$.

$h'(x) = \frac{1}{x} \rightarrow h(x)$ es derivable en $(0, +\infty)$.

$$h''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

099 **Determina los puntos en los que las siguientes funciones son derivables, y obtén las dos primeras derivadas de cada una de ellas.**

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 2x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

b) $g(x) = x + |x - 2|$

c) $v(x) = \begin{cases} 3x + 4 & \text{si } x \leq -1 \\ -2x - 1 & \text{si } x > -1 \end{cases}$

a) $f(x)$ está definida por funciones polinómicas, por tanto, continuas y derivables en $\mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{l} f(1^-) = \lim\limits_{x \to 1^-} x^2 = 1 \\ f(1^+) = \lim\limits_{x \to 1^+} 2x = 2 \end{array}\right\} \to f(1^-) \neq f(1^+) \to f(x) \text{ no es continua en } x = 1, \text{ por tanto, no es derivable en } x = 1.$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } x > 1 \end{cases} \qquad f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Por tanto, $f(x)$ es continua y derivable en $\mathbb{R} - \{1\}$.

b) $g(x) = \begin{cases} 2x - 2 & \text{si } x \geq 2 \\ 2 & \text{si } x < 2 \end{cases}$

$g(x)$ está definida por funciones polinómicas, por tanto, continuas y derivables en $\mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{l} g(2^-) = \lim\limits_{x \to 2^-} 2 = 2 \\ g(2^+) = \lim\limits_{x \to 2^+} (2x - 2) = 2 \end{array}\right\} \to g(2^-) = g(2^+) = g(2) \to g(x) \text{ es continua en } x = 2.$$

$$g'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x > 2 \\ 0 & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} g'(2^-) = 0 \\ g'(2^+) = 2 \end{array}\right\} \to \text{Las derivadas laterales existen pero son distintas. } g(x) \text{ no es derivable en } x = 2.$$

Así, $g(x)$ es continua en $\mathbb{R}$, y derivable en $\mathbb{R} - \{2\}$.

$g''(x) = 0 \quad \text{si } x \neq 2$

c) $v(x)$ está definida por funciones polinómicas, por tanto, continuas y derivables en $\mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{l} v(-1^-) = \lim\limits_{x \to -1^-} (3x + 4) = 1 \\ v(-1^+) = \lim\limits_{x \to -1^+} (-2x - 1) = 1 \end{array}\right\} \to v(2^-) = v(2^+) = v(2) \to v(x) \text{ es continua en } x = -1.$$

$$v'(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < -1 \\ -2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} v'(-1^-) = 3 \\ v'(-1^+) = -2 \end{array}\right\} \to \text{Las derivadas laterales existen pero son distintas. } v(x) \text{ no es derivable en } x = -1.$$

Por tanto, $v(x)$ es continua en $\mathbb{R}$, y derivable en $\mathbb{R} - \{-1\}$.

$v''(x) = 0 \quad \text{si } x \neq -1$

100 Halla la derivada n-ésima de cada una de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \sqrt{x}$

b) $g(x) = \cos 2x$

c) $h(x) = e^{-x}$

a) $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

$f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$

$f'''(x) = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}$

$f^{IV)}(x) = -\frac{15}{16}x^{-\frac{7}{2}}$

Si $n \geq 4$, la derivada n-ésima es: $f^{n)}(x) = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(2n-3)(2n-5)\cdot \ldots \cdot 1}{2^n} \cdot x^{-\frac{2n-1}{2}}$

b) $g'(x) = -2\operatorname{sen} 2x$

$g''(x) = -4\cos 2x$

$g'''(x) = 8\operatorname{sen} 2x$

$g^{IV)}(x) = 16\cos 2x$

$g^{V)}(x) = -32\operatorname{sen} 2x$

Así, la derivada n-ésima puede calcularse según las expresiones:

$$g^{n)} = \begin{cases} g^{2k-1)}(x) = (-1)^k 2^{2k-1}\operatorname{sen} 2x \\ g^{2k)}(x) = (-1)^k 2^{2k}\cos 2x \end{cases} \quad \text{para } k = 1, 2, 3, \ldots$$

c) $h'(x) = -e^{-x}$

$h''(x) = e^{-x}$

Así, la derivada n-ésima es: $h^{n)}(x) = (-1)^n e^{-x}$

101 Obtén la derivada n-ésima de estas funciones.

a) $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$ b) $g(x) = \operatorname{sen}^2 x$ c) $h(x) = \ln x$

a) $f'(x) = \frac{(1-x)-(1+x)(-1)}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2}$

$f''(x) = -\frac{4}{(1-x)^3}$

$f'''(x) = \frac{12}{(1-x)^4}$

$f^{IV)}(x) = -\frac{48}{(1-x)^5}$

Así, la derivada n-ésima es: $f^{n)}(x) = (-1)^{n-1} \cdot \frac{2 \cdot n!}{(1-x)^{n+1}}$

b) $g'(x) = 2sen\ x\ cos\ x = sen\ 2x$
$g''(x) = 2cos\ 2x$
$g'''(x) = -4sen\ 2x$
$g^{IV)}(x) = -8cos\ 2x$
$g^{V)}(x) = 16sen\ 2x$

Así, la derivada n-ésima puede calcularse según las expresiones:

$$g^{n)} = \begin{cases} g^{2k-1)}(x) = (-1)^{k+1}2^{2k-2}sen\ 2x \\ g^{2k)}(x) = (-1)^{k+1}2^{2k-1}cos\ 2x \end{cases} \text{ para } k = 1, 2, 3, \ldots$$

c) $h'(x) = \dfrac{1}{x} = x^{-1}$
$h''(x) = -x^{-2}$
$h'''(x) = 2x^{-3}$
$h^{IV)}(x) = -6x^{-4}$

Así, la derivada n-ésima es: $h^{n)}(x) = (-1)^{n+1} \cdot (n-1)!x^{-n}$

102 **Dada la función $h(x) = e^{sen\,[f(x)]}$, calcula el valor de su derivada en $x = 0$, sabiendo que $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$.**

(Extremadura. Junio 2007. Opción A. Ejercicio 1)

$h'(x) = e^{sen[f(x)]}cos\ [f(x)] \cdot f'(x)$

$h'(0) = e^{sen[f(0)]}cos\ [f(0)] \cdot f'(0) = e^{sen\,0} \cdot cos\ 0 \cdot 1 = e^0 = 1$

103 **¿Puede haber dos funciones distintas que tengan igual función derivada? Si la respuesta es afirmativa, ponga un ejemplo. Si, por el contrario, la respuesta es negativa, razónese.**

(Galicia. Septiembre 2001. Bloque 3. Pregunta 1)

Sí, puede haber dos funciones distintas con la misma función derivada.
Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = x^2 + 3 \\ g(x) = x^2 - 2 \end{array}\right\} \rightarrow f'(x) = g'(x) = 2x$$

104 **Utilizando la propiedad de la derivada de una suma y la del producto de una constante por una función, halla la derivada de estas funciones.**

a) $y = x^2 + x + 3$
b) $y = -12 + 8x^3 + \dfrac{1}{x}$
c) $y = 3 + 5x^2 + 8\sqrt{x}$
d) $y = 5sen\ x - 10cos\ x$
e) $y = 4x^6 - 5x^3 + 3$
f) $y = cos^2 x + cos\ x^2$

a) $y' = 2x + 1$
b) $y' = 24x^2 - \dfrac{1}{x^2}$
c) $y' = 10x + \dfrac{4}{\sqrt{x}}$
d) $y' = 5cos\ x + 10sen\ x$
e) $y' = 24x^5 - 15x^2$
f) $y' = -2cos\ x\ sen\ x - 2xsen\ x^2$

105 A partir de la propiedad de la derivada de un producto de funciones, halla la derivada de las funciones.

a) $y = 12x^4$

b) $y = 3x^3 \ln x$

c) $y = 5x^2\, sen\, x$

d) $y = \sqrt{x}\,(x^3 + 2x)$

a) $y' = 48x^3$

b) $y' = 9x^2 \ln x + 3x^2$

c) $y' = 10x sen\, x + 5x^2 cos\, x$

d) $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}(x^3 + 2x) + \sqrt{x}\,(3x^2 + 2) = \dfrac{7x^3 + 6x}{2\sqrt{x}}$

106 Utilizando la propiedad de la derivada de un cociente de funciones, calcula la derivada de las siguientes funciones.

a) $y = \dfrac{1}{x^3}$

b) $y = \dfrac{5x^2 - 1}{x + 2}$

c) $y = \dfrac{2}{x - 2}$

d) $y = \dfrac{tg\ x}{x}$

a) $y' = \dfrac{-3x^2}{x^6} = -\dfrac{3}{x^4}$

b) $y' = \dfrac{10x(x+2) - (5x^2 - 1)}{(x+2)^2} = \dfrac{5x^2 + 20x + 1}{(x+2)^2}$

c) $y' = \dfrac{-2}{(x-2)^2}$

d) $y' = \dfrac{(1 + tg^2\, x)x - tg\, x}{x^2}$

107 ¿Cuál es la derivada de estas funciones?

a) $y = \dfrac{1 + x^2}{x - 1}$

b) $y = \dfrac{12}{x^3}$

c) $y = \dfrac{7}{x^{400}}$

d) $y = \dfrac{4x^2 + 1}{x}$

e) $y = \dfrac{2 - x}{x^3}$

f) $y = \dfrac{x + 1}{x^2}$

a) $y' = \dfrac{2x(x-1) - (1 + x^2)}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}$

b) $y' = -\dfrac{36}{x^4}$

c) $y' = -\dfrac{2.800}{x^{401}}$

d) $y' = \dfrac{8x^2 - (4x^2 + 1)}{x^2} = \dfrac{4x^2 - 1}{x^2}$

e) $y' = \dfrac{-x^3 - (2 - x)3x^2}{x^6} = \dfrac{2x^3 - 6x^2}{x^6} = \dfrac{2x - 6}{x^4}$

f) $y' = \dfrac{x^2 - (x+1)2x}{x^4} = \dfrac{-x^2 - 2x}{x^4} = -\dfrac{x + 2}{x^3}$

108 Calcula la derivada de las siguientes funciones trigonométricas.

a) $y = 4arc\ tg\ x$
b) $y = (3x + 1)arc\ cos\ x$
c) $y = 2cos\ x + tg\ x$
d) $y = (1 + x^2)arc\ tg\ x$
e) $y = (x^2 + 8x + 1)sen\ x$
f) $y = 5sen\ x\ cos\ x$

a) $y' = \dfrac{4}{1 + x^2}$

b) $y' = 3arc\ cos\ x - \dfrac{3x + 1}{\sqrt{1 - x^2}}$

c) $y' = -2sen\ x + 1 + tg^2\ x$

d) $y' = 2xarc\ tg\ x + 1$

e) $y' = (2x + 8)sen\ x + (x^2 + 8x + 1)cos\ x$

f) $y' = 5cos^2\ x - 5sen^2\ x$

109 Halla la derivada de estas funciones logarítmicas.

a) $y = \ln(9x^5 + 7x + 2)$
b) $y = \dfrac{\ln x}{x^2}$
c) $y = \log_2(3x^2 - 7)$
d) $y = \ln\sqrt{x^3 + 2x}$
e) $y = \dfrac{\ln x}{x}$
f) $y = \ln(4x + 7)$

a) $y' = \dfrac{45x^4 + 7}{9x^5 + 7x + 2}$

b) $y' = \dfrac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - \ln x \cdot 2x}{x^4} = \dfrac{1 - 2\ln x}{x^3}$

c) $y' = \dfrac{6x}{(3x^2 - 7)\ln 2}$

d) $y' = \dfrac{\frac{1}{2}(x^3 + 2x)^{-\frac{1}{2}}(3x^2 + 2)}{\sqrt{x^3 + 2x}} = \dfrac{3x^2 + 2}{2(x^3 + 2x)}$

e) $y' = \dfrac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$

f) $y' = \dfrac{4}{4x + 7}$

110 Halla la derivada de la función $y = \ln\sqrt{sen\ x^2}$ y simplifica el resultado.

(Navarra. Junio 2004. Grupo 2. Opción D)

$$y' = \frac{\frac{1}{2}sen^{-\frac{1}{2}}\ x^2 cos\ x^2 \cdot 2x}{\sqrt{sen\ x^2}} = \frac{xcos\ x^2}{sen\ x^2} = xcotg\ x^2$$

111 Calcula la derivada de las siguientes funciones.

a) $y = 4^x$

b) $y = \dfrac{8}{x^2 - 4}$

c) $y = \dfrac{2x - 1}{x - x^2}$

d) $y = 7\sqrt{x} + 8\sqrt[3]{x}$

e) $y = xe^x$

f) $y = \sqrt[3]{5x^2}$

g) $y = \dfrac{x - 2}{x - 3}$

h) $y = \dfrac{x^2(1 - x)}{x^2 - 1}$

i) $y = x^2(sen\, x - 5x)$

j) $y = 2^x + \log_2 x$

a) $y' = 4^x \ln 4$

b) $y' = -\dfrac{16x}{(x^2 - 4)^2}$

c) $y' = \dfrac{2(x - x^2) - (2x - 1)(1 - 2x)}{(x - x^2)^2} = \dfrac{2x^2 - 2x + 1}{(x - x^2)^2}$

d) $y' = 7 \cdot \dfrac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} + 8 \cdot \dfrac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{7}{2\sqrt{x}} + \dfrac{8}{3\sqrt[3]{x^2}}$

e) $y' = e^x + xe^x = (1 + x)e^x$

f) $y' = \dfrac{1}{3}(5x^2)^{-\frac{2}{3}} 10x = \dfrac{10x}{3\sqrt[3]{(5x^2)^2}} = \dfrac{10}{3\sqrt[3]{25x}}$

g) $y' = \dfrac{(x - 3) - (x - 2)}{(x - 3)^2} = -\dfrac{1}{(x - 3)^2}$

h) $y' = \dfrac{(2x(1 - x) - x^2)(x^2 - 1) - x^2(1 - x)2x}{(x^2 - 1)^2} = \dfrac{-x^4 + 3x^2 - 2x}{(x^2 - 1)^2}$

i) $y' = 2x(sen\, x - 5x) + x^2(cos\, x - 5) = 2x\, sen\, x + x^2 cos\, x - 15x^2$

j) $y' = 2^x \ln 2 + \dfrac{1}{x \ln 2}$

112 Halla las derivadas y simplifica el resultado.

a) $y = \dfrac{x^2 + 1}{e^x}$

b) $y = \dfrac{x}{\ln x}$

c) $y = \dfrac{(x + 2)^2}{x + 1}$

d) $y = \dfrac{x^2 - 1}{e^{x^2}}$

a) $y' = \dfrac{2xe^x - (x^2 + 1)e^x}{(e^x)^2} = \dfrac{-x^2 + 2x - 1}{e^x}$

b) $y' = \dfrac{\ln x - x \cdot \dfrac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \dfrac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$

c) $y' = \dfrac{2(x + 2)(x + 1) - (x + 2)^2}{(x + 1)^2} = \dfrac{x^2 + 2x + 8}{(x + 1)^2}$

d) $y' = \dfrac{2xe^{x^2} - (x^2 - 1)e^{x^2} \cdot 2x}{(e^{x^2})^2} = \dfrac{-2x^3 + 4x}{e^{x^2}}$

113 Calcula la derivada de las siguientes funciones.

a) $y = 3^{x^2+4}$

b) $y = (x^5 - 2)^3$

c) $y = \sqrt[3]{x^3 - 2x}$

d) $y = 5e^{-x^2}$

e) $y = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x^3}$

f) $y = arc\ tg\ \sqrt{x}$

g) $y = \sqrt{2x^2 + 1}$

h) $y = e^{x^2-7}$

i) $y = sen^2\, x$

j) $y = 2^{sen\, x}$

a) $y' = 3^{x^2+4} \ln 3 \cdot 2x$

b) $y' = 15x^4(x^5 - 2)^2$

c) $y' = \dfrac{1}{3}(x^3 - 2x)^{-\frac{2}{3}}(3x^2 - 2) = \dfrac{3x^2 - 2}{3\sqrt[3]{(x^3 - 2x)^2}}$

d) $y' = -10xe^{-x^2}$

e) $y' = \dfrac{\dfrac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}}x^3 - \sqrt{x+1} \cdot 3x^2}{x^6} = \dfrac{-5x - 6}{2x^4\sqrt{x+1}}$

f) $y' = \dfrac{\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{1+x} = \dfrac{1}{2(1+x)\sqrt{x}}$

g) $y' = \dfrac{1}{2}(2x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} 4x = \dfrac{2x}{\sqrt{2x^2 + 1}}$

h) $y' = 2xe^{x^2-7}$

i) $y' = 2sen\, x\, cos\, x$

j) $y' = 2^{sen\, x} \ln 2 \cdot cos\, x$

114 Halla la derivada de estas funciones.

a) $y = arc\ sen\ \dfrac{1}{x}$

b) $y = cos\,(x^2 + 5x + 5)$

c) $y = \dfrac{cotg\, x}{x^2}$

d) $y = 12\sqrt{3x^2 + x}$

e) $y = arc\ sen\,(5x + 1)$

f) $y = \ln\,(sen\, x^2)$

g) $y = (4x^2 - 5x + 1)3^x$

a) $y' = \dfrac{-\dfrac{1}{x^2}}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{1}{x}\right)^2}} = -\dfrac{x}{x^2\sqrt{x^2 - 1}} = -\dfrac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$

b) $y' = -sen\,(x^2 + 5x + 5) \cdot (2x + 5)$

c) $y = \dfrac{1}{tg\, x \cdot x^2}$

$y' = \dfrac{(1 + tg^2\, x)x^2 + tg\, x \cdot 2x}{(tg\, x \cdot x^2)^2} = \dfrac{x + x\, tg^2\, x + 2tg\, x}{x^3\, tg^2\, x}$

d) $y' = 12 \cdot \frac{1}{2}(3x^2 + x)^{-\frac{1}{2}}(6x + 1) = \frac{36x + 6}{\sqrt{3x^2 + x}}$

e) $y' = \frac{5}{\sqrt{1 - (5x + 1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{-25x^2 - 10x}}$

f) $y' = \frac{\cos x^2 \cdot 2x}{\operatorname{sen} x^2} = 2x \operatorname{cotg} x^2$

g) $y' = (8x - 5)3^x + (4x^2 - 5x + 1)3^x \ln 3$

115 Calcula la derivada de estas funciones.

a) $y = tg^2 (2x + 3)$
b) $y = arc\ tg\ (x^3 + 6)$
c) $y = \sqrt{\ln (3x - 5)}$
d) $y = \sqrt[4]{5x^3 + 1}$
e) $y = 2x arc\ sen\ x$
f) $y = \sqrt[3]{(5x - 2)^2}$

a) $y' = 4tg(2x + 3)(1 + tg^2 (2x + 3))$

b) $y' = \frac{3x^2}{1 + (x^3 + 6)^2}$

c) $y' = \frac{1}{2}(\ln (3x - 5))^{-\frac{1}{2}} \frac{3}{3x - 5} = \frac{3}{2(3x - 5)\sqrt{\ln(3x - 5)}}$

d) $y' = \frac{1}{4}(5x^3 + 1)^{-\frac{3}{4}} 15x^2 = \frac{15x^2}{4\sqrt[4]{(5x^3 + 1)^3}}$

e) $y' = 2arc\ sen\ x + 2x \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

f) $y' = \frac{2}{3}(5x - 2)^{-\frac{1}{3}} 5 = \frac{10}{3\sqrt[3]{5x - 2}}$

116 Determina la derivada de las siguientes funciones.

a) $y = \frac{x\ sen\ x}{e^x}$
b) $y = arc\ tg\ \frac{1}{x}$
c) $y = \ln (1 - 2^x)$
d) $y = \frac{\cos x}{x^2}$
e) $y = sen\ \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x}$
f) $y = \sqrt{e^x + x}$
g) $y = \frac{5^x + 5^{-x}}{2}$
h) $y = x^2 e^{-x}$
i) $y = e^{1 - x^2}$
j) $y = \sqrt{\sec x}$

a) $y' = \frac{(sen\ x + x\cos x)e^x - x sen\ x \cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{sen\ x + x\cos x - x sen\ x}{e^x}$

b) $y' = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} = -\frac{x^2}{x^2(x^2 + 1)} = -\frac{1}{x^2 + 1}$

c) $y' = \frac{-2^x \ln 2}{1 - 2^x}$

d) $y' = \dfrac{-sen\,x \cdot x^2 - cos\,x \cdot 2x}{x^4} = -\dfrac{xsen\,x + 2cos\,x}{x^3}$

e) $y' = cos\,\dfrac{1}{x} \cdot \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) - sen\,\dfrac{1}{x} \cdot \left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$

f) $y' = \dfrac{1}{2}(e^x + x)^{-\frac{1}{2}}(e^x + 1) = \dfrac{e^x + 1}{2\sqrt{e^x + x}}$

g) $y' = \dfrac{5^x \ln 5 - 5^{-x} \ln 5}{2}$

h) $y' = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = (2x - x^2)e^{-x}$

i) $y' = e^{1-x^2}(-2x)$

j) $y = \sqrt{\dfrac{1}{cos\,x}}$

$y' = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{cos\,x}\right)^{-\frac{1}{2}} \dfrac{sen\,x}{cos^2\,x} = \dfrac{sen\,x\sqrt{cos\,x}}{2cos^2\,x}$

117 **Calcula la derivada de estas funciones.**

a) $y = \ln\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

b) $y = arc\ tg\,\dfrac{x}{x-1}$

c) $y = arc\,cos\,(\ln x)$

d) $y = \sqrt[3]{2^{cos\,x}}$

e) $y = \log_2\sqrt{\dfrac{1}{x}}$

f) $y = cos^3 x + sen\,x^2$

a) $y' = \dfrac{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{-\frac{1}{2}} \dfrac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2}}{\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}} = -\dfrac{1}{(x-1)^2} \cdot \dfrac{x-1}{x+1} = -\dfrac{1}{x^2-1}$

b) $y' = -\dfrac{\dfrac{x-1-x}{(x-1)^2}}{1+\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^2} = \dfrac{1}{(x-1)^2 + x^2} = \dfrac{1}{2x^2 - 2x + 1}$

c) $y' = -\dfrac{\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1-(\ln x)^2}} = -\dfrac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$

d) $y' = \dfrac{1}{3}(2^{cos\,x})^{-\frac{2}{3}} 2^{cos\,x} \ln 2\,(-sen\,x) = -\dfrac{\ln 2\ sen\,x\sqrt[3]{2^{cos\,x}}}{3}$

e) $y' = \dfrac{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)}{\sqrt{\dfrac{1}{x}}\ln 2} = -\dfrac{1}{2x\ln 2}$

f) $y' = -3cos^2\,x\ sen\,x + 2sen\,x\ cos\,x$

118 Halla las derivadas y simplifica el resultado.

a) $y = arc\ sen\ \sqrt{x}$

b) $y = \sqrt[4]{sen\ (x^3 + 1)}$

c) $y = 2^{x^2+4} + x^2 + 4$

d) $y = \dfrac{\ln \sqrt{x+1}}{x}$

e) $y = \ln \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x$

a) $y' = \dfrac{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{1-x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x - x^2}}$

b) $y' = \dfrac{1}{4}(sen\ (x^3+1))^{-\frac{3}{4}} cos\ (x^3+1)3x^2 = \dfrac{3x^2 cos\ (x^3+1)}{4\sqrt[4]{sen^3\ (x^3+1)}}$

c) $y' = 2^{x^2+4}\ln 2 \cdot 2x + 2x$

d) $y' = \dfrac{\dfrac{\frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{x+1}} \cdot x - \ln \sqrt{x+1}}{x^2} = \dfrac{\dfrac{x}{2(x+1)} - \ln \sqrt{x+1}}{x^2} =$

$= \dfrac{x - 2(x+1)\ \ln \sqrt{x+1}}{2(x+1)x^2}$

e) $y = x\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$

$y' = \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right) + x \cdot \dfrac{\dfrac{x+1-x}{(x+1)^2}}{\dfrac{x}{x+1}} = \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right) + \dfrac{1}{x+1}$

119 Hallar la derivada en $x = 0$ de la función $f(f(x))$, donde $f(x) = (1+x)^{-1}$.

(Extremadura. Junio 2005. Repertorio A. Ejercicio 3)

$f'(x) = -(1+x)^{-2}$

$(f(f(x)))' = f'(f(x))f'(x) = -(1+f(x))^{-2}(-(1+x)^{-2}) = \left(1 + \dfrac{1}{1+x}\right)^2 \dfrac{1}{(1+x)^2}$

$(f(f(0)))' = \left(1 + \dfrac{1}{1+0}\right)^2 \dfrac{1}{(1+0)^2} = 4$

120 Dada la función $f(x) = \dfrac{sen\ x + sen\ (x+1)}{cos\ x - cos\ (x+1)}$ en el intervalo $0 < x < 2\pi$, calcula su derivada, simplificándola en lo posible. ¿Es constante esta función $f(x)$?

(Extremadura. Septiembre 2006. Repertorio A. Ejercicio 3)

$$f'(x) = \frac{(cos\ x + cos\ (x+1))(cos\ x - cos\ (x+1)) - (sen\ x + sen\ (x+1))(-sen\ x + sen\ (x+1))}{(cos\ x - cos\ (x+1))^2} =$$

$$= \frac{cos^2\ x - cos^2\ (x+1) + sen^2\ x - sen^2\ (x+1)}{(cos\ x - cos\ (x+1))^2} = \frac{1-1}{(cos\ x - cos\ (x+1))^2} = 0$$

Al tener como derivada la función nula, se verifica que $f(x)$ es constante.

121 Comprueba que es constante la derivada de la función:

$$f(x) = arc\ tg \sqrt{\frac{1 - cos\ x}{1 + cos\ x}} \text{ con } 0 \le x \le \pi.$$

(La Rioja. Septiembre 2001. Propuesta A. Ejercicio 3)

$$f'(x) = \frac{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1 - cos\ x}{1 + cos\ x}\right)^{-\frac{1}{2}} \dfrac{sen\ x \cdot (1 + cos\ x) - (1 - cos\ x)(-sen\ x)}{(1 + cos\ x)^2}}{1 + \dfrac{1 - cos\ x}{1 + cos\ x}} =$$

$$= \frac{\dfrac{2senx}{(1 + cos\ x)^2}}{2 \cdot \dfrac{1 + cos\ x + 1 - cos\ x}{1 + cos\ x}} \cdot \sqrt{\frac{1 + cos\ x}{1 - cos\ x}} = \frac{sen\ x \cdot (1 + cos\ x)}{2(1 + cos\ x)^2} \cdot \sqrt{\frac{1 + cos\ x}{1 - cos\ x}} =$$

$$= \frac{sen\ x}{2(1 + cos\ x)} \cdot \sqrt{\frac{1 + cos\ x}{1 - cos\ x}} = \frac{1}{2} sen\ x \cdot \sqrt{\frac{1 + cos\ x}{(1 + cos\ x)^2(1 - cos\ x)}} =$$

$$= \frac{1}{2} sen\ x \cdot \sqrt{\frac{1}{1 - cos^2\ x}} = \frac{1}{2} sen\ x \cdot \frac{1}{sen\ x} = \frac{1}{2}$$

122 Calcula la derivada de la función $y = f(x)$ definida implícitamente por la ecuación $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$. Comprueba que coincide con la expresión que se obtiene al despejar la variable y, y luego derivar con respecto a x.

$$\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}y' = 0 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{y}}y' = -\frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow y' = -\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = -\frac{5 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

Despejando: $\sqrt{y} = 5 - \sqrt{x} \rightarrow y = \left(5 - \sqrt{x}\right)^2$

$$y' = 2\left(5 - \sqrt{x}\right)\left(-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right) = -\frac{5 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

123 Halla la derivada de la función $y = f(x)$ definida implícitamente por cada una de las siguientes expresiones algebraicas.

a) $x^2 + y^2 - 2xy = 0$

b) $x = cos\,(xy)$

c) $x^3 + 3y^2 - 2ay = 0$

d) $e^{2y} - \ln x^3 = 3$

e) $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

f) $x^3 + y^3 + xy = 0$

a) $2x + 2yy' - 2y - 2xy' = 0 \rightarrow (2y - 2x)y' = 2y - 2x \rightarrow y' = \dfrac{2y - 2x}{2y - 2x} = 1$

b) $1 = -sen\,(xy)(y + xy') \rightarrow y + xy' = -\dfrac{1}{sen\,(xy)} \rightarrow xy' = -\dfrac{1}{sen\,(xy)} - y$

$\rightarrow y' = \dfrac{-1 - y\,sen\,(xy)}{xsen\,(xy)}$

c) $3x^2 + 6yy' - 2ay' = 0 \rightarrow (6y - 2a)y' = -3x^2 \rightarrow y' = \dfrac{-3x^2}{6y - 2a}$

d) $e^{2y}2y' - \dfrac{3x^2}{x^3} = 0 \rightarrow e^{2y}2y' = \dfrac{3}{x} \rightarrow y' = \dfrac{3}{2xe^{2y}}$

e) $\dfrac{2x}{16} + \dfrac{2y}{4} \cdot y' = 0 \rightarrow \dfrac{y}{2} \cdot y' = -\dfrac{x}{8} \rightarrow y' = -\dfrac{x}{4y}$

f) $3x^2 + 3y^2y' + y + xy' = 0 \rightarrow (3y^2 + x)y' = -3x^2 - y \rightarrow y' = -\dfrac{3x^2 + y}{3y^3 + x}$

124 Utilizando la derivación logarítmica, calcula la derivada de las funciones.

a) $y = x^x$

b) $y = (1 + x^2)^x$

c) $y = (sen\,x)^{cos\,x}$

d) $y = \sqrt[x]{x^3}$

e) $y = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$

f) $y = (tg\,x)^x$

a) $\ln f(x) = \ln x^x$

$\ln f(x) = x \ln x$

$\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{1}{x} + \ln x$

$f'(x) = x^x\left(\dfrac{1}{x} + \ln x\right)$

b) $\ln f(x) = \ln\,(1 + x^2)^x$

$\ln f(x) = x \ln\,(1 + x^2)$

$\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \ln\,(1 + x^2) + x \cdot \dfrac{2x}{1 + x^2}$

$f'(x) = (1 + x^2)^x\left(\ln\,(1 + x^2) + \dfrac{2x^2}{1 + x^2}\right)$

c) $\ln f(x) = \ln (sen\, x)^{cos\, x}$

$\ln f(x) = cos\, x \cdot \ln (sen\, x)$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -sen\, x \ln (sen\, x) + cos\, x \cdot \frac{cos\, x}{sen\, x}$$

$$f'(x) = (sen\, x)^{cos\, x}\left(-sen\, x \cdot \ln (sen\, x) + \frac{cos^2 x}{sen\, x}\right)$$

d) $\ln f(x) = \ln \sqrt[x]{x^3}$

$$\ln f(x) = \frac{3}{x} \cdot \ln x$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{3}{x^2} \cdot \ln x + \frac{3}{x} \cdot \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \sqrt[x]{x^3} \cdot \frac{3 - 3\ln x}{x^2}$$

e) $\ln f(x) = \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

$$\ln f(x) = x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) + x \cdot \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} = \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$$

$$f'(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left(\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right)$$

f) $\ln f(x) = \ln (tg\, x)^x$

$\ln f(x) = x \ln (tg\, x)$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln (tg\, x) + x \cdot \frac{1 + tg^2 x}{tg\, x}$$

$$f'(x) = (tg\, x)^x \left(\ln (tg\, x) + x \cdot \frac{1 + tg^2 x}{tg\, x}\right)$$

125 **Aplicando la regla de la derivada de la función inversa, halla la derivada de estas funciones.**

a) $y = arc\, cos\, x$ **c)** $y = arc\, tg\, x$

b) $y = arc\, sen\, x$ **d)** $y = e^x$

a) $f(x) = cos\, x$

$f'(x) = -sen\, x$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(arc\, cos\, x)} = \frac{1}{-sen\, (arc\, cos\, x)} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1 - cos^2\, (arc\, cos\, x)}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

b) $f(x) = sen\ x$

$f'(x) = cos\ x$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(arc\ sen\ x)} = \frac{1}{cos\ (arc\ sen\ x)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - sen^2\ (arc\ sen\ x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

c) $f(x) = tg\ x$

$f'(x) = 1 + tg^2\ x$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(arc\ tg\ x)} = \frac{1}{1 + tg^2\ (arc\ tg\ x)} = \frac{1}{1 + x^2}$$

d) $f(x) = \ln x$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(e^x)} = \frac{1}{\frac{1}{e^x}} = e^x$$

PREPARA TU SELECTIVIDAD

1 Utilizando la definición de derivada, encuentre la derivada de la función $f(x) = \dfrac{3 + x}{x - 2}$ en el punto $x_0 = 3$.

(Murcia. Septiembre 2001. Bloque 3. Cuestión 1)

$$f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{3+3+h}{3+h-2} - 6}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{6+h}{1+h} - 6}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{6 + h - 6 - 6h}{h(1+h)} = \lim_{h \to 0} \frac{-5}{1+h} = -5$$

2 Determinar en qué puntos de la gráfica de la función $y = x^3 - 3x^2 + x + 17$, la recta tangente a la misma es paralela a la recta $y = x + 7$.

(Castilla y León. Septiembre 2007. Prueba A. Cuestión 3)

Si la recta tangente es paralela a la recta $y = x + 7$ entonces: $f'(x) = 1$.

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 1$

Entonces: $3x^2 - 6x + 1 = 1 \to x^2 - 2x = 0 \to \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

Por tanto, los puntos de la gráfica que verifican la condición son (0, 17) y (2, 15).

3 Determina la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sabiendo que su derivada segunda es constante e igual a 3 y que la recta tangente a la gráfica en el punto de abscisa $x = 1$ es $5x - y - 3 = 0$.

(Andalucía. Año 2001. Modelo 3. Opción B. Ejercicio 2)

$f''(x) = 3 \rightarrow f'(x) = 3x + k$ siendo k un número real

Siendo $5x - y - 3 = 0$ la recta tangente en $x = 1$, tenemos que: $f'(1) = 5$

Entonces: $3 + k = 5 \rightarrow k = 2 \rightarrow f'(x) = 3x + 2 \rightarrow f(x) = \dfrac{3x^2}{2} + 2x + c$ siendo c un número real.

Si la recta es tangente a la función en el punto (1, 2), este punto también pertenece a la gráfica de la función.

Así: $\dfrac{3}{2} + 2 + c = 2 \rightarrow c = -\dfrac{3}{2}$

Luego la función es: $f(x) = \dfrac{3x^2}{2} + 2x - \dfrac{3}{2}$

4 **Calcular, simplificando el resultado todo lo posible, la derivada de la función:**

$$f(x) = \ln \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$$

(Castilla y León. Junio 2000. Prueba A. Cuestión 3)

$$f'(x) = \frac{\dfrac{\operatorname{sen} x \cdot (1 + \cos x) - (1 - \cos x)(-\operatorname{sen} x)}{(1 + \cos x)^2}}{\dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \frac{\dfrac{2\operatorname{sen} x}{(1 + \cos x)^2}}{\dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} =$$

$$= \frac{2\operatorname{sen} x \cdot (1 + \cos x)}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)^2} = \frac{2\operatorname{sen} x}{1 - \cos^2 x} = \frac{2\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{2}{\operatorname{sen} x}$$

5 **Considerar las funciones definidas para $x \geq 0$:**

$$f(x) = \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} \qquad g(x) = \operatorname{arc\,cos} \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

Calcular $f'(x)$ y $g'(x)$ y expresarlas del modo más simplificado posible.
Comparar los resultados y deducir justificadamente la diferencia entre $f(x)$ y $g(x)$.

(C. Valenciana. Junio 2002. Ejercicio B. Problema 3)

$$f'(x) = \frac{\dfrac{\sqrt{1 + x^2} - x \cdot \dfrac{1}{2}(1 + x^2)^{-\frac{1}{2}} 2x}{\left(\sqrt{1 + x^2}\right)^2}}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\right)^2}} = \frac{\dfrac{\sqrt{1 + x^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{1 + x^2}}}{1 + x^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{1 + x^2}}} =$$

$$= \frac{\dfrac{1}{(1 + x^2)\sqrt{1 + x^2}}}{\sqrt{\dfrac{1}{1 + x^2}}} = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$g'(x) = -\frac{\dfrac{\sqrt{1+x^2} - x \cdot \dfrac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}2x}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}} = -\frac{\dfrac{\sqrt{1+x^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}}{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{1+x^2}}} =$$

$$= -\frac{\dfrac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{\dfrac{1}{1+x^2}}} = -\frac{1}{1+x^2}$$

$f'(x) = -g'(x) \rightarrow f(x) + k = -(g(x) + c)$ siendo $k, c \in \mathbb{R}$.

Entonces: $f(x) - g(x) = 2f(x) + 2k + c$

6 Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 6x + 8 & \text{si } x \leq -2 \\ 2x + 4 & \text{si } -2 < x \leq 0 \\ a\cos x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

a) **Estudia su continuidad en toda la recta real en función de *a*.**

b) **Estudia su derivabilidad en toda la recta real en función de *a*.**

(Asturias. Junio 2006. Bloque 5)

a) • Si $x < -2 : f(x) = x^2 + 6x + 8 \rightarrow$ Función polinómica, continua en $(-\infty, -2)$.

• Si $-2 < x < 0 : f(x) = 2x + 4 \rightarrow$ Función polinómica, continua en $(-2, 0)$.

• Si $x > 0 : f(x) = a\cos x \rightarrow$ Función trigonométrica, continua en $(0, +\infty)$.

• Para que la función sea continua en $x = 2$, los límites laterales tienen que ser iguales y coincidir con $f(2) = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} f(-2^-) = \lim\limits_{x \to -2^-} (x^2 + 6x + 8) = 0 \\ f(-2^+) = \lim\limits_{x \to -2^+} (2x + 4) = 0 \end{array}\right\} \rightarrow f(-2^-) = f(-2^+) = f(-2)$$
$$\rightarrow f(x) \text{ es continua en } x = -2.$$

• Análogamente, para que la función sea continua en $x = 0$, los límites laterales tienen que ser iguales y coincidir con $f(0) = 4$:

$$\left.\begin{array}{l} f(0^-) = \lim\limits_{x \to 0^-} (2x + 4) = 4 \\ f(0^+) = \lim\limits_{x \to 0^+} (a\cos x) = a \end{array}\right\} \rightarrow f(0^-) = f(0^+) = f(0) \rightarrow a = 4$$

Luego si $a = 4$, $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$, y si $a \neq 4$, $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$.

b) $f'(x) = \begin{cases} 2x + 6 & \text{si } x < -2 \\ 2 & \text{si } -2 < x < 0 \\ -a\operatorname{sen} x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} f'(-2^+) = 2 \\ f'(-2^-) = 2 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Las derivadas laterales existen y son iguales, luego } f(x) \text{ es derivable en } x = -2.$$

Para que la función sea derivable en $x = 0$ tiene que ser continua, por tanto, consideramos $a = 4$. Entonces:

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^+) = 0 \\ f'(0^-) = 2 \end{array}\right\} \rightarrow$$ Las derivadas laterales existen pero no son iguales, por tanto, $f(x)$ no es derivable en $x = 0$.

Luego $f(x)$ es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$ para cualquier valor de a.

7 **Sea f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por: $f(x) = x^2 - |x|$**
Estudia la derivabilidad de f.

(Andalucía. Año 2006. Modelo 2. Opción A. Ejercicio 1)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x & \text{si } x \geq 0 \\ x^2 + x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(0^-) = \lim\limits_{x \to 0^-} (x^2 + x) = 0 \\ f(0^+) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x^2 - x) = 0 \end{array}\right\} \rightarrow f(0^-) = f(0^+) = f(0) \rightarrow f(x) \text{ es continua en } x = 0.$$

Como las funciones que definen $f(x)$ son polinómicas, la función es continua en $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x > 0 \\ 2x + 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^+) = -1 \\ f'(0^-) = 1 \end{array}\right\} \rightarrow$$ Las derivadas laterales existen pero no son iguales, por tanto, $f(x)$ no es derivable en $x = 0$.

Luego, $f(x)$ es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$.

8 **Considera la función f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:**

$$f(x) = \frac{|x|}{1 + x^2}$$

Estudia su derivabilidad (calcula la derivada donde exista y justifica la no existencia de derivada donde proceda).

(Cantabria. Junio 2008. Bloque 2. Opción A)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1 + x^2} & \text{si } x \geq 0 \\ -\dfrac{x}{1 + x^2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(0^-) = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{-x}{1 + x^2} = 0 \\ f(0^+) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x}{1 + x^2} = 0 \end{array}\right\} \rightarrow f(0^-) = f(0^+) = f(0) \rightarrow f(x) \text{ es continua en } x = 0.$$

Las funciones que definen $f(x)$ son continuas, por tanto, la función es continua en $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2} & \text{si } x > 0 \\ -\dfrac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^+) = 1 \\ f'(0^-) = -1 \end{array}\right\} \rightarrow$$ Las derivadas laterales existen pero no son iguales, por tanto, $f(x)$ no es derivable en $x = 0$.

Luego, $f(x)$ es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$.