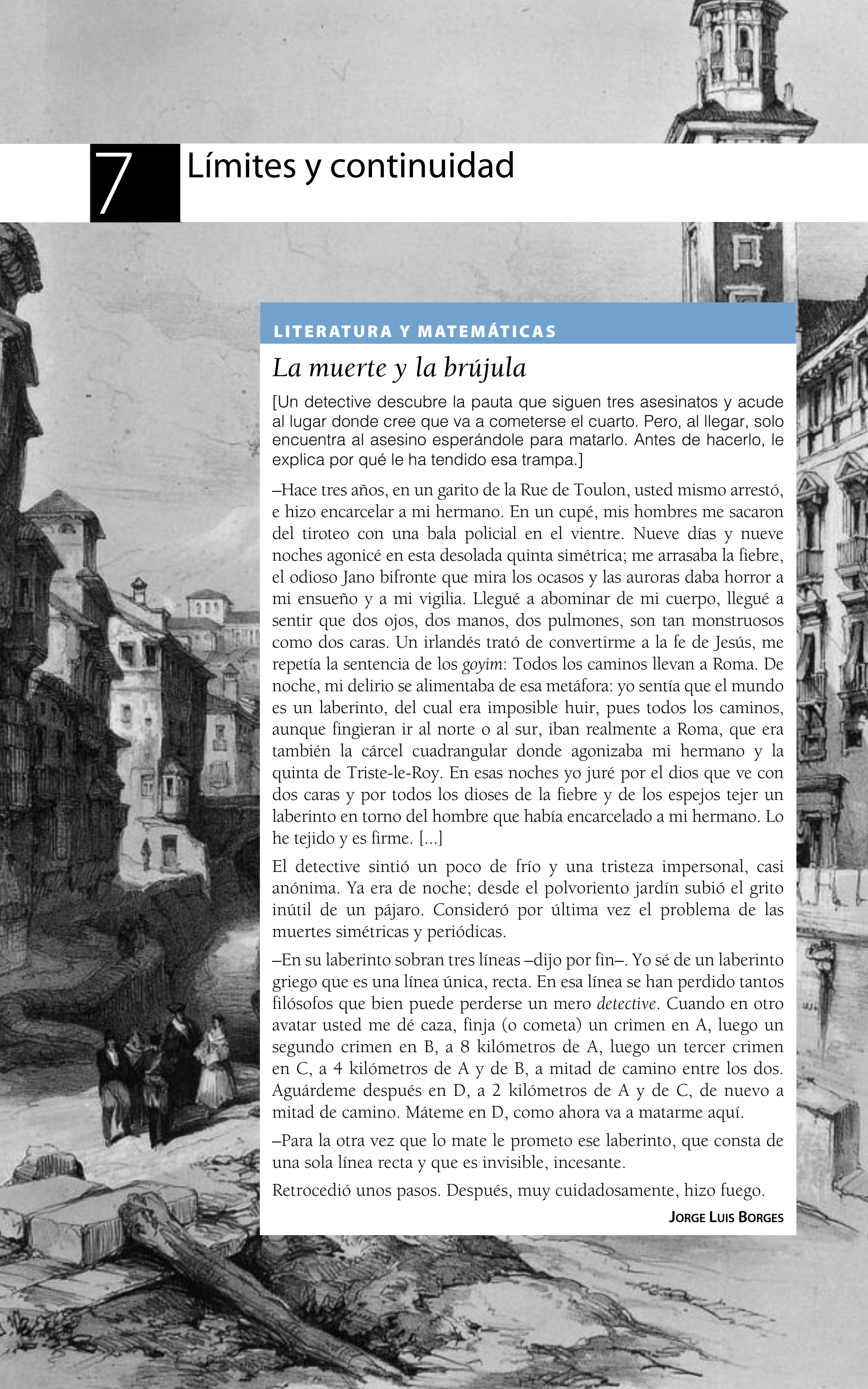


7 Límites y continuidad

LITERATURA Y MATEMÁTICAS

La muerte y la brújula

[Un detective descubre la pauta que siguen tres asesinatos y acude al lugar donde cree que va a cometerse el cuarto. Pero, al llegar, solo encuentra al asesino esperándole para matarlo. Antes de hacerlo, le explica por qué le ha tendido esa trampa.]

–Hace tres años, en un garito de la Rue de Toulon, usted mismo arrestó, e hizo encarcelar a mi hermano. En un cupé, mis hombres me sacaron del tiroteo con una bala policial en el vientre. Nueve días y nueve noches agonicé en esta desolada quinta simétrica; me arrasaba la fiebre, el odioso Jano bifronte que mira los ocasos y las auroras daba horror a mi ensueño y a mi vigilia. Llegué a abominar de mi cuerpo, llegué a sentir que dos ojos, dos manos, dos pulmones, son tan monstruosos como dos caras. Un irlandés trató de convertirme a la fe de Jesús, me repetía la sentencia de los *goyim*: Todos los caminos llevan a Roma. De noche, mi delirio se alimentaba de esa metáfora: yo sentía que el mundo es un laberinto, del cual era imposible huir, pues todos los caminos, aunque fingieran ir al norte o al sur, iban realmente a Roma, que era también la cárcel cuadrangular donde agonizaba mi hermano y la quinta de Triste-le-Roy. En esas noches yo juré por el dios que ve con dos caras y por todos los dioses de la fiebre y de los espejos tejer un laberinto en torno del hombre que había encarcelado a mi hermano. Lo he tejido y es firme. [...]

El detective sintió un poco de frío y una tristeza impersonal, casi anónima. Ya era de noche; desde el polvoriento jardín subió el grito inútil de un pájaro. Consideró por última vez el problema de las muertes simétricas y periódicas.

–En su laberinto sobran tres líneas –dijo por fin–. Yo sé de un laberinto griego que es una línea única, recta. En esa línea se han perdido tantos filósofos que bien puede perderse un mero *detective*. Cuando en otro avatar usted me dé caza, finja (o cometa) un crimen en A, luego un segundo crimen en B, a 8 kilómetros de A, luego un tercer crimen en C, a 4 kilómetros de A y de B, a mitad de camino entre los dos. Aguárdeme después en D, a 2 kilómetros de A y de C, de nuevo a mitad de camino. Máteme en D, como ahora va a matarme aquí.

–Para la otra vez que lo mate le prometo ese laberinto, que consta de una sola línea recta y que es invisible, incesante.

Retrocedió unos pasos. Después, muy cuidadosamente, hizo fuego.

JORGE LUIS BORGES

La muerte y la brújula
Jorge Luis Borges

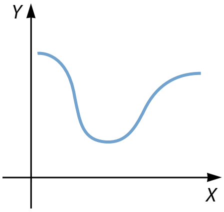
Los protagonistas de este relato de crímenes son, además del asesino, un comisario de policía y un detective. El primer crimen ocurre la noche del 3 de diciembre en la habitación del Hotel du Nord donde se alojaba la víctima, Yarmolinsky, un profesor judío que asistía a un congreso Talmúdico.
En una hoja metida en su máquina de escribir, estaba escrita esta sentencia inconclusa: «La primera letra del Nombre ha sido articulada». Un mes más tarde, también de noche, aparece muerto en un suburbio occidental un delincuente, Azevedo, con fama de delator, que es también judío. En una pared cercana habían escrito con tiza: «La segunda letra del Nombre ha sido articulada». El tercer crimen, algo dudoso, pues no apareció el cadáver, ocurrió también un mes después, la noche del 3 de febrero, carnaval, en una taberna donde una persona extraña había alquilado unos días antes una habitación. Cuando llegaron el comisario y el detective, encontraron escrita en una pizarra esta frase: «La última de las letras del Nombre ha sido articulada». También vieron una mancha de sangre y un libro en latín sobre los judíos donde la presunta víctima había subrayado este pasaje: «El día hebreo empieza al anochecer y dura hasta el siguiente anochecer». La noche del primero de marzo, el comisario recibe un sobre con una carta donde le anuncian que el día 3 de ese mes no habrá un cuarto crimen porque, como se ve en el plano que le adjunta, los tres lugares de los crímenes forman ya un «triángulo equilátero y místico». Perplejo, le remitió la carta al detective quien, tras estudiarla minuciosamente, concluye que la serie de los crímenes no estaba regida por el número 3, sino por el 4. ¿Por qué? Porque, según el calendario hebreo, al cometerse por la noche, todos los crímenes habían ocurrido el día 4 de cada mes; además, las letras del nombre de Dios son 4 –el llamado Tetragrámaton: J H V H– y finalmente los puntos cardinales –tres de ellos señalados por los vértices del triángulo– son también 4. En consecuencia, el asesino con esta carta quería engañarles: realmente iba a cometer un cuarto crimen en un sitio al sur de la ciudad que formara un rombo perfecto con los lugares de los tres crímenes anteriores. El detective localiza ese lugar en el plano –una quinta llamada Triste-le-Roy– y se dirige hacia allí con la intención de adelantarse y pillar al asesino con las manos en la masa. Pero, al llegar, es el asesino quien lo está esperando, porque él, como le explica en el párrafo seleccionado, era la auténtica víctima de aquella trama.

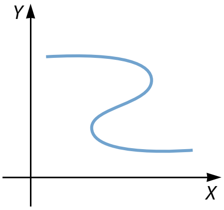
En el laberinto-trampa propuesto por el detective, las distancias de los lugares donde se cometen los crímenes con relación al primero son 8, 4 y 2.
Si continuamos indefinidamente, obtenemos la sucesión: 8, 4, 2, 1, 1/2…
Escribe el término general y calcula su límite.

$$a_n = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{8}{2^{n-1}} = 2^{4-n} \qquad \lim_{n \to \infty} 2^{4-n} = 0$$

ANTES DE COMENZAR… RECUERDA

001 Justifica si las siguientes gráficas corresponden a funciones.

a) 

b) 

a) La gráfica corresponde a una función porque a cada valor de x le corresponde un único valor de y.

b) La gráfica no corresponde a una función porque existen valores de x a los que les corresponden más de un valor de y.

002 Obtén el término general de estas sucesiones.

a) $\frac{3}{5}, \frac{7}{15}, \frac{11}{45}, \ldots$

b) $\frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{-1}{9}, \frac{-3}{16}, \ldots$

a) $a_n = \frac{3+4(n-1)}{5 \cdot 3^{n-1}} = \frac{4n-1}{5 \cdot 3^{n-1}}$

b) $a_n = \frac{3+(-2)(n-1)}{n^2} = \frac{5-2n}{n^2}$

ACTIVIDADES

001 Con la ayuda de la calculadora, halla el límite de las siguientes sucesiones.

a) $a_n = \frac{n+1}{n}$

b) $a_n = \frac{n}{n^2-1}$

c) $a_n = \frac{-2n+1}{n-2}$

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n^2-1} = 0$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{-2n+1}{n-2} = -2$

002 Aplica la definición de límite y demuestra que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n-2} = 1$$

Compruébalo para $\varepsilon = 0{,}0001$.

Buscamos h tal que para cualquier $n > h$ se cumple que:

$$|a_n - 1| < 0{,}0001 \rightarrow \left|\frac{n}{n-2} - 1\right| < 0{,}0001 \rightarrow \left|\frac{2}{n-2}\right| < 0{,}0001$$

Si tomamos $h = 20.002 \rightarrow n = 20.003 \rightarrow \frac{2}{20.001} < 0{,}0001$

Obtenemos el mismo resultado para $n = 20.004$, $n = 20.005\ldots$, es decir, para $n > h$.

003 **Determina el límite de las siguientes sucesiones de números reales.**

a) $a_n = \dfrac{n^2+1}{n}$ c) $a_n = -2n^2+3$

b) $a_n = 2^{n+1}$ d) $a_n = sen\ n$

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+1}{n} = +\infty$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} (-2n^2+3) = -\infty$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{n+1} = +\infty$ d) $\lim\limits_{n\to\infty} sen\ n$ no existe.

004 **Escribe sucesiones de números reales que cumplan que su límite, cuando n tiende a infinito, es:**

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$

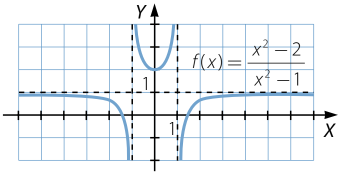
b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ d) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ no existe.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $a_n = \dfrac{3n-1}{n}$ c) $a_n = n+4$

b) $a_n = 1-n$ d) $a_n = cos\ n$

005 **Observa la gráfica y calcula los límites de la función en el infinito.**



$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-2}{x^2-1} = 1$ $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-2}{x^2-1} = 1$

006 **Aplica la definición de límite y demuestra que:**

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x-2} = 1$$

Compruébalo para $\varepsilon = 0{,}0001$.

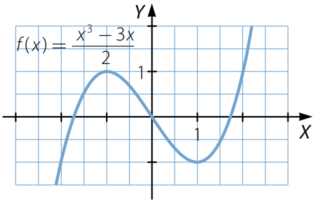
Buscamos x_0 tal que para cualquier $x > x_0$ se cumple que:

$$|f(x)-1| < 0{,}0001 \rightarrow \left|\frac{x}{x-2}-1\right| < 0{,}0001 \rightarrow \left|\frac{2}{x-2}\right| < 0{,}0001$$

Si tomamos $x_0 = 20.002 \rightarrow x = 20.003 \rightarrow \dfrac{2}{20.001} < 0{,}0001$

Obtenemos el mismo resultado para $x = 20.004$, $x = 20.005\ldots$, es decir, para todo $x > x_0$.

007 Observa la gráfica y calcula los límites de la función en el infinito.



$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 - 3x}{2} = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 3x}{2} = +\infty$$

008 Busca funciones cuyos límites sean los siguientes.

a) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

b) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

c) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

d) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

e) $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ no existe.

f) $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ no existe.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $f(x) = x^2 - x + 1$

b) $f(x) = x - x^2$

c) $f(x) = x^2 + x - 4$

d) $f(x) = x^3 - x$

e) $f(x) = \cos x$

f) $f(x) = 1 - \operatorname{sen} 2x$

009 Determina el valor de las siguientes expresiones.

a) $2 + (+\infty)$

b) $2 + (-\infty)$

c) $2 \cdot (+\infty) + (+\infty)$

d) $2 \cdot (-\infty) \cdot (+\infty)$

a) $+\infty$ b) $-\infty$ c) $+\infty$ d) $-\infty$

010 Halla el valor de estas expresiones.

a) $2^{+\infty} + (+\infty) \cdot (+\infty)$

b) $2^{-\infty} + (-\infty) \cdot (-\infty)$

c) $(+\infty)^2 + (+\infty)$

d) $(-\infty)^2 \cdot (+\infty)$

a) $+\infty$ b) $+\infty$ c) $+\infty$ d) $+\infty$

011 Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -1$ y $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$, calcula:

a) $\lim_{x \to +\infty} [f(x) + g(x)]$

b) $\lim_{x \to +\infty} [f(x) \cdot g(x)]$

c) $\lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{g(x)}$

d) $\lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{f(x)}$

a) $\lim_{x \to +\infty} [f(x) + g(x)] = -\infty$

b) $\lim_{x \to +\infty} [f(x) \cdot g(x)] = +\infty$

c) $\lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{g(x)} = -\infty$

d) $\lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{f(x)} = -1$

012 Si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -5$, halla:

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) + g(x)]$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - g(x)]$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{g(x)}$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)^{g(x)}$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) + g(x)] = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - g(x)] = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{g(x)}$ no existe.

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)^{g(x)} = 0$

013 Halla los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^7$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^7$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[7]{x}$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt[7]{x}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^7}$

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^7}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^7 = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^7 = -\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[7]{x} = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt[7]{x} = -\infty$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^7} = 0$

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^7} = 0$

014 Calcula estos límites.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} 7^x$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} 7^x$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{7}\right)^x$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{7}\right)^x$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} 7^{\frac{1}{x}}$

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} 7^{\frac{1}{x}}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} 7^x = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} 7^x = 0$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{7}\right)^x = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{7}\right)^x = 0$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} 7^{\frac{1}{x}} = 1$

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} 7^{\frac{1}{x}} = 1$

015 Halla los límites en el infinito de cada una de estas funciones.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2x}{x-1}\right)^3$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{(3x+1)x^4}{(x^2-6)(2x-1)^3}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2x}{x-1}\right)^3 = 8$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{(3x+1)x^4}{(x^2-6)(2x-1)^3} = \dfrac{3}{8}$

016 Completa $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\boxed{}}{2x^3 - x + 12}$, escribiendo en su numerador una función de modo que el resultado sea:

a) $+\infty$ b) 4 c) 0

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^4 + 5}{2x^3 - x + 12} = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + x}{2x^3 - x + 12} = 0$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{8x^3 - 3}{2x^3 - x + 12} = 4$

017 Resuelve los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 3}}{2x + 1}$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^2 + x - 1}{\sqrt{x^2 + 3}}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 + x - 1}{\sqrt{x^2 + 3}}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 - 12x + 9}{\sqrt[3]{x^5 + 5x - 2}}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 3}}{2x + 1} = \dfrac{1}{2}$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^2 + x - 1}{\sqrt{x^2 + 3}} = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 + x - 1}{\sqrt{x^2 + 3}} = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 - 12x + 9}{\sqrt[3]{x^5 + 5x - 2}} = +\infty$

018 Calcula estos límites.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x} + x}{x}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x - \sqrt{6 + x}}{2x + 4}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{7x + \sqrt{3x - 2}}{2x}$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 1} + 2x}{6x - 3}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x} + x}{x} = 1$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x - \sqrt{6 + x}}{2x + 4} = 1$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{7x + \sqrt{3x - 2}}{2x} = \dfrac{7}{2}$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 1} + 2x}{6x - 3} = \dfrac{1}{2}$

019 Calcula los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2 - 1}{x} - \dfrac{1 + 2x^2}{2x - 1} \right)$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2x - \sqrt{1 + 4x} \right)$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 - 2x} - x \right)$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{9x^2 + 3x} - 3x \right)$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x}-\dfrac{1+2x^2}{2x-1}\right)\to\infty-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-1}{x}-\frac{1+2x^2}{2x-1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2-1)(2x-1)-(1+2x^2)x}{x(2x-1)}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2-3x+1}{2x^2-x}=-\frac{1}{2}$$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2x}-x\right)\to\infty-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2x-x^2}{\sqrt{x^2-2x}+x}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x}{\sqrt{x^2-2x}+x}=-1$$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-\sqrt{1+4x}\right)\to\infty-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(2x-\sqrt{1+4x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2-1-4x}{2x+\sqrt{1+4x}}=+\infty$$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+3x}-3x\right)\to\infty-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+3x}-3x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{9x^2+3x-9x^2}{\sqrt{9x^2+3x}+3x}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{\sqrt{9x^2+3x}+3x}=\frac{1}{2}$$

020 Sustituye *a, b, c* y *d* por números de modo que:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+ax}-x\right)=1$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+bx-3}-2x\right)=-\dfrac{1}{4}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+7}-cx\right)=0$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{dx^2+x-5}-2x\right)=+\infty$

a) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+ax}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+ax-x^2}{\sqrt{x^2+ax}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax}{\sqrt{x^2+ax}+x}=$$
$$=\frac{a}{2}=1\to a=2$$

b) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+bx-3}-2x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2+bx-3-4x^2}{\sqrt{4x^2+bx-3}+2x}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{bx-3}{\sqrt{4x^2+bx-3}+2x}=\frac{b}{4}=-\frac{1}{4}\to b=-1$$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+7}-cx\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{9x^2+7-c^2x^2}{\sqrt{9x^2+7}+cx}=0\to c=3$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{dx^2+x-5}-2x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{dx^2+x-5-4x^2}{\sqrt{dx^2+x-5}+2x}=+\infty\to d\neq 4$

021 Calcula los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2x-1}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^{6x+2}$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2-\dfrac{4x-1}{4x}\right)^{3x+2}$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x}{x+3}\right)^{3x+1}$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2x-1}\to 1^{\infty}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2x-1}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}\cdot(2x-1)\right]}=e^2$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^{6x+2}\to 1^{\infty}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^{6x+2}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(-\frac{3}{x}\right)\cdot(6x+2)\right]}=e^{-18}=\dfrac{1}{e^{18}}$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2-\dfrac{4x-1}{4x}\right)^{3x+2}\to 1^{\infty}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2-\dfrac{4x-1}{4x}\right)^{3x+2}=e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\left(1-\frac{4x-1}{4x}\right)\cdot(3x+2)\right]}=e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x+2}{4x}}=e^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{e^3}$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x}{x+3}\right)^{3x+1}\to 1^{\infty}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x}{x+3}\right)^{3x+1}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{x}{x+3}-1\right)\cdot(3x+1)\right]}=e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-3(3x+1)}{x+3}}=e^{-9}=\dfrac{1}{e^9}$

022 Halla estos límites.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2}\right)^{x-1}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-x+2}{x^2+1}\right)^{x+6}$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{1}{2x}}$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2-2x+2}{2x^2+3x-2}\right)^{x^2-3x}$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2}\right)^{x-1} \to 1^{\infty}$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^{x-1} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{x^2+1}{x^2}-1\right)\cdot(x-1)\right]} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x^2}\cdot(x-1)\right]} = e^0 = 1$$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-x+2}{x^2+1}\right)^{x+6} \to 1^{\infty}$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-x+2}{x^2+1}\right)^{x+6} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{x^2-x+2}{x^2+1}-1\right)\cdot(x+6)\right]} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x^2-5x+6}{x^2+1}} =$$

$$= e^{-1} = \frac{1}{e}$$

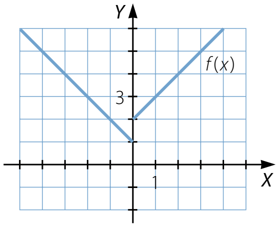
c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{1}{2x}} = 1^0 = 1$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2-2x+2}{2x^2+3x-2}\right)^{x^2-3x} = 0$

023 Observa la grafica y calcula:

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$

siendo $f(x) = \begin{cases} -x+1 & \text{si } x \le 0 \\ x+2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

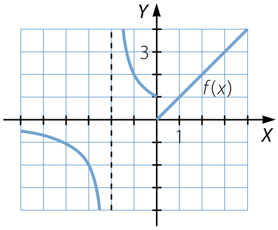


$\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = 1$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = 2$

024 Observa la grafica y halla:

$\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)$

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$



$\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = -\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = 1$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = 0$

025 Calcula el límite de la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x + 2}$ en $x = 3$ y $x = -2$.

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \frac{6}{5}$$

$$\lim_{x \to -2} f(x) = \frac{1}{0} = \infty \to \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim_{x \to -2} f(x).$$

026 Determina el límite de la función $f(x) = \dfrac{1}{sen\ x}$ en $x = \dfrac{\pi}{2}$ y $x = 0$.

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{1}{0} = \infty \to \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim_{x \to 0} f(x).$$

027 Resuelve los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x + 1}{3x + 3}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x^2 + 2x}{x^2 - 3x}$

a) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x + 1}{3x + 3} \to \dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x \to -1} \frac{x + 1}{3(x + 1)} = \lim_{x \to -1} \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x^2 + 2x}{x^2 - 3x} \to \dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{2x(x + 1)}{x(x - 3)} = \lim_{x \to 0} \frac{2(x + 1)}{x - 3} = -\frac{2}{3}$$

028 Calcula estos límites.

a) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{\sqrt{25 - x^2}}{x - 5}$

b) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2x^2 - 18}{\sqrt{x^2 - 9}}$

a) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{\sqrt{25 - x^2}}{x - 5} \to \dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{(5 + x)(5 - x)}}{-(5 - x)} = \lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{5 + x}}{-\sqrt{5 - x}} = \frac{5}{0} = \infty \to \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 5^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 5^+} f(x) \text{ no existe} \end{array}\right\}$$

$$\to \text{No existe } \lim_{x \to 5} f(x).$$

b) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2x^2 - 18}{\sqrt{x^2 - 9}} \to \dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x \to 3} \frac{2(x^2 - 9)}{\sqrt{x^2 - 9}} = \lim_{x \to 3} \left(2\sqrt{x^2 - 9}\right) = 0$$

029 **Determina si la función $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2-4}$ es continua en $x = -2$ y $x = 2$.**

$f(-2) = \dfrac{1}{0} \rightarrow$ No existe $f(-2) \rightarrow$ La función no es continua en $x = -2$.

$f(2) = \dfrac{5}{0} \rightarrow$ No existe $f(2) \rightarrow$ La función no es continua en $x = 2$.

030 **Halla si la función $f(x) = |x-3|$ es continua en $x = -3$ y $x = 0$.**

$f(-3) = |-6| = 6 \rightarrow$ Existe $f(-3)$.

$\lim\limits_{x \to -3} |x-3| = |-6| = 6 \rightarrow$ Existe $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$.

$f(-3) = \lim\limits_{x \to -3} f(x) \rightarrow$ La función es continua en $x = -3$.

031 **Determina si esta función es continua.**

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \leq -1 \\ x^2-3 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

- Si $x < -1 \rightarrow f(x) = x+1 \rightarrow f(x)$ es continua en $(-\infty, -1)$.
- Si $x > -1 \rightarrow f(x) = x^2-3 \rightarrow f(x)$ es continua en $(-1, +\infty)$.
- Si $x = -1 \rightarrow f(-1) = -1+1 = 0 \rightarrow$ Existe $f(-1)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} (x+1) = 0 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} (x^2-3) = -2 \end{array}\right\} \rightarrow \text{No existe } \lim\limits_{x \to -1} f(x).$$

La función no es continua en $x = -1$, tiene una discontinuidad de salto finito en este punto, por tanto, $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{-1\}$.

032 **Calcula a para que esta función sea continua en todo $\mathbb{R}$.**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x} & \text{si } x \leq -2 \\ -x^2+a & \text{si } x > -2 \end{cases}$$

- Si $x < -2 \rightarrow f(x) = \dfrac{x+1}{x} \rightarrow f(x)$ es continua en $(-\infty, -2)$.
- Si $x > -2 \rightarrow f(x) = -x^2+a \rightarrow f(x)$ es continua en $(-2, +\infty)$.
- Si $x = -2 \rightarrow f(x) = \dfrac{-2+1}{-2} = \dfrac{1}{2} \rightarrow$ Existe $f(-2)$.

$\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{x+1}{x} = \dfrac{1}{2}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^+} (-x^2+a) = -4+a$

$f(x)$ es continua en $x = -2$ si:

$f(-2) = \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) \rightarrow \dfrac{1}{2} = -4+a \rightarrow a = \dfrac{9}{2}$

033 **Determina si la función:**

$$f(x) = sen\ x + cos\ x$$

se anula en algún punto del intervalo (0, 4).

$f(x)$ es la suma de funciones continuas en $\mathbb{R}$, por lo tanto es continua en $\mathbb{R}$.
$f(x)$ es continua en $[0, 4]$.

$f(0) = 1 > 0$

$f(4) = sen\,4 + cos\,4 = -1{,}41 < 0$

Aplicamos el teorema de Bolzano $\rightarrow$ Existe $c \in (0, 4)$ tal que $f(c) = 0$,
es decir, la función se anula en algún punto del intervalo (0, 4).

034 **Dada la función $f(x) = \dfrac{\ln x + 2x}{x - 2}$, halla si existe algún punto c en el intervalo (0, 1) tal que $f(c) = 0$.**

$f(x)$ está definida en $(0, 2) \cup (2, +\infty) \rightarrow f(x)$ es continua en $(0, 2) \cup (2, +\infty)$,
luego, $f(x)$ no es continua en $[0, 1]$, ya que no está definida en $x = 0$.

Para aplicar el teorema de Bolzano podemos considerar el intervalo (0,1; 1).

$f(x)$ es continua en [0,1; 1].

$f(0{,}1) = 1{,}106 > 0$

$f(1) = -2 < 0$

Aplicamos el teorema de Bolzano $\rightarrow$ Existe $c \in (0{,}1;\ 1)$ tal que $f(c) = 0$,
es decir, la función se anula en algún punto del intervalo (0,1; 1).
Por tanto, también podemos asegurar que existe algún punto c en el intervalo (0, 1) tal que $f(c) = 0$.

035 **Dada la siguiente función:**

$$f(x) = sen\,x + cos\,x$$

demuestra que existe un punto $c \in (0, 4)$ tal que $f(c) = -1$.

$f(x)$ es la suma de funciones continuas en $\mathbb{R}$, por lo tanto es continua en $\mathbb{R}$.
$f(x)$ es continua en $[0, 4]$.

$f(0) = 1$

$f(4) = sen\,4 + cos\,4 = -1{,}41$

Como $f(0) > -1 > f(4)$ podemos aplicar el teorema de los valores
intermedios $\rightarrow$ Existe $c \in (0, 4)$ tal que $f(c) = -1$.

036 **Dada la función $f(x) = \dfrac{\ln x + 2x}{x - 2}$, demuestra que alcanza un máximo y un mínimo absolutos en un intervalo.**

$f(x)$ es continua en $(0, 2) \cup (2, +\infty)$, por tanto, $f(x)$ es continua en [0,1; 1].
Entonces, por el teorema de Weierstrass, existe al menos un punto donde
la función alcanza su valor máximo absoluto y otro donde toma su valor mínimo
absoluto.

037 **Determina el término general de las siguientes sucesiones, y calcula su límite.**

a) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots$

b) $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots$

c) $1, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, \frac{9}{3}, \frac{11}{3}, \frac{13}{3}, \dots$

d) $-\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, -\frac{8}{27}, \frac{16}{81}, -\frac{32}{243}, \dots$

e) $64, 32, 16, 8, 4, 2, \dots$

a) $a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0$

b) $a_n = \frac{n-1}{n}$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = 1$

c) $a_n = \frac{3+2(n-1)}{3} = \frac{2n+1}{3}$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3} = +\infty$

d) $a_n = \frac{(-2)^n}{3^n}$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-2)^n}{3^n}$ no existe.

e) $a_n = 64 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{2^6}{2^{n-1}} = 2^{7-n}$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} 2^{7-n} = 0$

038 **Halla el límite de estas sucesiones expresadas por su término general.**

a) $a_n = 3n+1$

b) $b_n = \frac{5}{n+1}$

c) $c_n = n^2 - 5n + 6$

d) $d_n = 3 - n + n^2 - n^3$

e) $e_n = 3 - \frac{n-4}{2}$

f) $f_n = (n+3)(2n-3)$

g) $g_n = 2^{n-1}$

h) $h_n = \left(\frac{3}{5}\right)^{n^2}$

i) $i_n = 3^{\frac{2}{3n-1}}$

j) $k_n = \frac{n^2+3n-2}{n}$

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (3n+1) = +\infty$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5}{n+1} = 0$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} (n^2 - 5n + 6) = +\infty$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} (3 - n + n^2 - n^3) = -\infty$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(3 - \frac{n-4}{2}\right) = -\infty$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} [(n+3)(2n-3)] = +\infty$

g) $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{n-1} = +\infty$

h) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^{n^2} = 0$

i) $\lim\limits_{n\to\infty} 3^{\frac{2}{3n-1}} = 3^0 = 1$

j) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+3n-2}{n} = +\infty$

039 Calcula los siguientes límites de sucesiones.

a) $\lim_{n\to\infty} (-n^3 + 8n^2 - n + 8)$

b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{2n^3 + 1}$

c) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2 - 3n - 2}$

d) $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 - 8n + 16}{35}$

e) $\lim_{n\to\infty} \frac{6n - 2}{3n^3 - 7n + 1}$

f) $\lim_{n\to\infty} \frac{5 - 2n + 3n^2 - n^3}{2n^2 - 5n - 4}$

a) $\lim_{n\to\infty} (-n^3 + 8n^2 - n + 8) = -\infty$

b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{2n^3 + 1} = +\infty$

c) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2 - 3n - 2} = +\infty$

d) $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 - 8n + 16}{35} = +\infty$

e) $\lim_{n\to\infty} \frac{6n - 2}{3n^3 - 7n + 1} = 0$

f) $\lim_{n\to\infty} \frac{5 - 2n + 3n^2 - n^3}{2n^2 - 5n - 4} = -\infty$

040 Calcular razonadamente el límite de la sucesión:

$$\frac{(n-2)^2}{(n+1)^3 - (n-1)^3}$$

(Aragón. Septiembre 2005. Opción B. Cuestión 3)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n-2)^2}{(n+1)^3 - (n-1)^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - 4n + 4}{n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n^3 + 3n^2 - 3n + 1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - 4n + 4}{6n^2 + 2} = \frac{1}{6}$$

041 Determina los límites de estas sucesiones.

a) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{4n^2 - 1}{5n} \cdot \frac{6n}{n^3 + 1} \right)$

b) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2 + 5}{1 - 2n} : \frac{5n^3}{n^2 + 12} \right)$

c) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n^2 + 3}{5n} + \frac{6n - n^2}{3n} \right)$

d) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n + 2}{6n^2} \right)(8n - 1)$

a) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{4n^2 - 1}{5n} \cdot \frac{6n}{n^3 + 1} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{24n^2 - 6}{5n^3 + 5} = 0$

b) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2 + 5}{1 - 2n} : \frac{5n^3}{n^2 + 12} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n^2 + 5)(n^2 + 12)}{5n^3(1 - 2n)} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^4 + 17n^2 + 60}{5n^3 - 10n^4} = -\frac{1}{10}$$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+3}{5n}+\dfrac{6n-n^2}{3n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6n^2+9+30n-5n^2}{15n}=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+30n+9}{15n}=+\infty$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(\dfrac{3n+2}{6n^2}\right)(8n-1)\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{24n^2+13n-2}{6n^2}=4$

042 Dejamos caer una pelota desde una altura de 4 metros y, tras cada rebote, la altura alcanzada se reduce a la mitad de la altura anterior.
¿Qué altura alcanzará la pelota después de cada uno de los cinco primeros rebotes? ¿Y tras el vigésimo rebote? ¿Y tras el rebote n-ésimo? Si a_n denota la altura alcanzada tras el n-ésimo rebote, obtén una cota superior y otra inferior de esta sucesión.
Calcula $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

(Galicia. Septiembre 2004. Bloque 4. Pregunta 1)

$a_1=2\text{ m}\qquad a_2=1\text{ m}\qquad a_3=\dfrac{1}{2}\text{ m}\qquad a_4=\dfrac{1}{4}\text{ m}\qquad a_5=\dfrac{1}{8}\text{ m}$

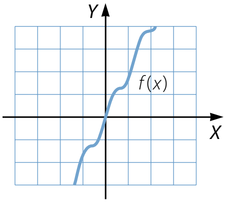
$a_{20}=2\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{19}=\dfrac{2}{2^{19}}=\dfrac{1}{262.144}\text{ m}$

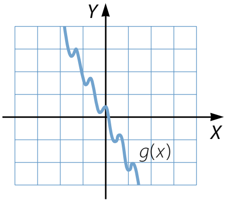
$a_n=2\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=\dfrac{2}{2^{n-1}}=\dfrac{1}{2^{n-2}}=2^{-(n-2)}$

Una cota superior de la sucesión es 4 y una inferior es 0.

$\lim\limits_{n\to\infty} 2^{-(n-2)}=0$

043 Observa las gráficas de estas funciones, y calcula los siguientes límites.





a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$

044 Halla estos límites de funciones.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^5$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^5$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x^2}$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt[3]{x^2}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^4}$

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^4}$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} 5^x$

h) $\lim\limits_{x \to -\infty} 5^x$

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x$

j) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x$

k) $\lim\limits_{x \to +\infty} 4^{x^2}$

l) $\lim\limits_{x \to -\infty} 4^{x^2}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^5 = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^5 = -\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x^2} = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt[3]{x^2} = +\infty$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^4} = 0$

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^4} = 0$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} 5^x = +\infty$

h) $\lim\limits_{x \to -\infty} 5^x = 0$

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x = 0$

j) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x = +\infty$

k) $\lim\limits_{x \to +\infty} 4^{x^2} = +\infty$

l) $\lim\limits_{x \to -\infty} 4^{x^2} = +\infty$

045 Calcula los siguientes límites de funciones.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2+1}{x-3}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2+1}{x-3}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2+1}{3x^2}$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2+1}{3x^2}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1-x^6}{3x^2+2x-1}$

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1-x^6}{3x^2+2x-1}$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1-x^4}{-x^4+2x^2-5}$

h) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1-x^4}{-x^4+2x^2-5}$

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2-2x+3}{x^3-3x^2-5}$

j) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2-2x+3}{x^3-3x^2-5}$

k) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{16}{x-2}$

l) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{16}{x-2}$

a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{x-3} = +\infty$

b) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{x-3} = -\infty$

c) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{3x^2} = \frac{1}{3}$

d) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{3x^2} = \frac{1}{3}$

e) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1-x^6}{3x^2+2x-1} = -\infty$

f) $\lim_{x\to-\infty} \frac{1-x^6}{3x^2+2x-1} = -\infty$

g) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1-x^4}{-x^4+2x^2-5} = 1$

h) $\lim_{x\to-\infty} \frac{1-x^4}{-x^4+2x^2-5} = 1$

i) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-2x+3}{x^3-3x^2-5} = 0$

j) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-2x+3}{x^3-3x^2-5} = 0$

k) $\lim_{x\to+\infty} \frac{16}{x-2} = 0$

l) $\lim_{x\to-\infty} \frac{16}{x-2} = 0$

046 Se considera la función $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$. Calcula $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

(Baleares. Septiembre 2008. Opción A. Cuestión 3)

$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0$ $\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0$

047 Halla el límite: $\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$

(Navarra. Septiembre 2005. Grupo 2. Opción C)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x(x+1)}+\sqrt{x(x-1)}}{(x^2+x)-(x^2-x)} = 1$$

048 Determina los siguientes límites de funciones.

a) $\lim_{x\to+\infty} (x^3-12x)$

b) $\lim_{x\to+\infty} (x-0{,}001x^2)$

c) $\lim_{x\to+\infty} 0{,}6^{2x-1}$

d) $\lim_{x\to+\infty} (2x-3)^x$

a) $\lim_{x\to+\infty} (x^3-12x) = +\infty$

b) $\lim_{x\to+\infty} (x-0{,}001x^2) = -\infty$

c) $\lim_{x\to+\infty} 0{,}6^{2x-1} = 0$

d) $\lim_{x\to+\infty} (2x-3)^x = +\infty$

049 Resuelve los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x - \sqrt{x^2 - 4x} \right)$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + \dfrac{2}{x} \right)^{1-x}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x + \sqrt{x^2 - 4x} \right)$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 - \dfrac{2}{x} \right)^{1-x}$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x - \sqrt{x^2 - 4x} \right) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x + \sqrt{x^2 - 4x} \right) \to -\infty + \infty$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(x + \sqrt{x^2 - 4x} \right) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - x^2 + 4x}{x - \sqrt{x^2 - 4x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{4x}{x - \sqrt{x^2 - 4x}} = 2$$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + \dfrac{2}{x} \right)^{1-x} \to 1^{\infty}$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{2}{x} \right)^{1-x} = e^{\lim\limits_{x \to -\infty} \left[\left(1 + \frac{2}{x} - 1 \right) \cdot (1-x) \right]} = e^{\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2-2x}{x}} = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 - \dfrac{2}{x} \right)^{1-x} \to 1^{\infty}$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(1 - \frac{2}{x} \right)^{1-x} = e^{\lim\limits_{x \to -\infty} \left[\left(1 - \frac{2}{x} - 1 \right) \cdot (1-x) \right]} = e^{\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-2+2x}{x}} = e^{2}$$

050 Calcula el límite: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 - 2x} - (x - 2)}{x - 2}$

(La Rioja. Septiembre 2005. Propuesta A. Ejercicio 5)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x} - (x - 2)}{x - 2} \to \infty - \infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x} - (x - 2)}{x - 2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 2x - (x-2)^2}{(x-2)\left(\sqrt{x^2 - 2x} + (x - 2) \right)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2x - 4}{(x-2)\sqrt{x^2 - 2x} + (x-2)^2} = 0$$

051 Calcula el límite: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}}$

(Navarra. Junio 2008. Grupo 1. Opción C)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}} \to \infty - \infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+1-x+1)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}\right)}{(x+2-x+2)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}\right)}{4\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)} = \frac{1}{2}$$

052 Halla el límite: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x}-\dfrac{2x^4+3x}{x^2-1}\right)$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x}-\frac{2x^4+3x}{x^2-1}\right) \to \infty - \infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x}-\frac{2x^4+3x}{x^2-1}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^4-1-2x^5-3x^2}{x(x^2-1)} = -\infty$$

053 Determina el límite: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^3+2x^2-3}{x^2-2}+\dfrac{2x^2-x}{x-1}\right)$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3+2x^2-3}{x^2-2}+\frac{2x^2-x}{x-1}\right) \to -\infty + \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3+2x^2-3}{x^2-2}+\frac{2x^2-x}{x-1}\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{x^4+x^3-2x^2-3x+3+2x^4-x^3-4x^2+2x}{(x^2-2)(x-1)} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{3x^4-6x^2-x+3}{x^3-x^2-2x+2} = -\infty$$

054 Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+1}-\sqrt{4x^2-3x+2}\right)$.

(Aragón. Septiembre 2008. Bloque 3. Opción A)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+1}-\sqrt{4x^2-3x+2}\right) \to \infty - \infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+1}-\sqrt{4x^2-3x+2}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2+1-(4x^2-3x+2)}{\sqrt{4x^2+1}+\sqrt{4x^2-3x+2}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{3x-1}{\sqrt{4x^2+1}+\sqrt{4x^2-3x+2}} = \frac{3}{4}$$

055 Calcula el límite $\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x} - x \right)$.

(Navarra. Junio 2004. Grupo 2. Opción C)

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x} - x \right) \to \infty - \infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x} - x \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 2x - x^2}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} = 1$$

056 Calcula el límite: $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}$

(Navarra. Septiembre 2004. Grupo 2. Opción C)

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x} \right) \to \infty - \infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x} \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x + \sqrt{x} - x}{\sqrt{x + \sqrt{x}} + \sqrt{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x}} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2}$$

057 Calcula: $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{2}{x} \right)^x$

(Asturias. Septiembre 2006. Bloque 5)

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{2}{x} \right)^x \to 1^\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{2}{x} \right)^x = e^{\lim_{x \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{2}{x} - 1 \right) \cdot x \right]} = e^{\lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{x}} = e^2$$

058 Halla los siguientes límites.

a) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2 + 5x}{1 + 5x} \right)^{2x - 12}$ b) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 3x} \right)^{2x + 2}$

a) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2 + 5x}{1 + 5x} \right)^{2x - 12} \to 1^\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2 + 5x}{1 + 5x} \right)^{2x - 12} = e^{\lim_{x \to +\infty} \left[\left(\frac{2 + 5x}{1 + 5x} - 1 \right) \cdot (2x - 12) \right]} =$$

$$= e^{\lim_{x \to +\infty} \frac{(2 + 5x - 1 - 5x)(2x - 12)}{1 + 5x}} = e^{\lim_{x \to +\infty} \frac{2x - 12}{1 + 5x}} = e^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{e^2}$$

b) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 3x} \right)^{2x + 2} \to 1^\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 3x} \right)^{2x + 2} = e^{\lim_{x \to +\infty} \left[\left(\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 3x} - 1 \right) \cdot (2x + 2) \right]} =$$

$$= e^{\lim_{x \to +\infty} \frac{(x^2 + 2x - 3 - x^2 - 3x)(2x + 2)}{x^2 + 3x}} = e^{\lim_{x \to +\infty} \frac{-2x^2 - 8x - 6}{x^2 + 3x}} = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$

059 Calcular $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+5}{x-1}\right)^{\frac{x^2}{x+3}}$.

(Aragón. Septiembre 2006. Opción A. Cuestión 3)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+5}{x-1}\right)^{\frac{x^2}{x+3}} \to 1^{\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+5}{x-1}\right)^{\frac{x^2}{x+3}} = e^{\lim_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{x+5}{x-1}-1\right)\cdot\frac{x^2}{x+3}\right]} = e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+5-x+1)\cdot x^2}{(x-1)(x+3)}} =$$

$$= e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{6x^2}{x^2+2x-3}} = e^6$$

060 Calcula el límite: $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+1}{3x-1}\right)^{x}$

(Navarra. Septiembre 2004. Grupo 2. Opción C)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+1}{3x-1}\right)^{x} \to 1^{\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+1}{3x-1}\right)^{x} = e^{\lim_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{3x+1}{3x-1}-1\right)\cdot x\right]} = e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{(3x+1-3x+1)\cdot x}{3x-1}} = e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{3x-1}} = e^{\frac{2}{3}}$$

061 Calcula: $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2^x-8}{2^{x+1}}\right)$

(Asturias. Junio 2007. Bloque 4)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2^x-8}{2^{x+1}}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2^x}{2^{x+1}}-\frac{2^3}{2^{x+1}}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{2^2}{2^x}\right) = \frac{1}{2}$$

062 Expresa las funciones siguientes como funciones definidas a trozos y, después, halla sus límites cuando x tiende a $-\infty$ y a $+\infty$.

a) $f(x) = |x+2| - |x-2|$

b) $f(x) = x - |3-2x|$

c) $f(x) = \left|\frac{2x+3}{x-2}\right|$

d) $f(x) = \left|\frac{x-3}{1-x}\right|$

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} -x-2-(-x+2) & \text{si } x < -2 \\ x+2-(-x+2) & \text{si } -2 \le x < 2 \\ x+2-(x-2) & \text{si } x \ge 2 \end{cases} \to f(x) = \begin{cases} -4 & \text{si } x < -2 \\ 2x & \text{si } -2 \le x < 2 \\ 4 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(-4) = -4 \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 4 = 4$$

b) $f(x)=\begin{cases} x-(3-2x) & \text{si } x<\dfrac{3}{2} \\ x-(-3+2x) & \text{si } x\geq\dfrac{3}{2} \end{cases} \rightarrow f(x)=\begin{cases} 3x-3 & \text{si } x<\dfrac{3}{2} \\ -x+3 & \text{si } x\geq\dfrac{3}{2} \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(3x-3)=-\infty \qquad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-x+3)=-\infty$

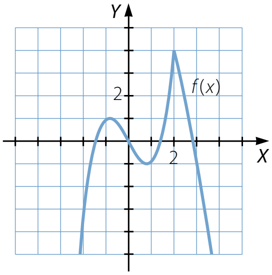
c) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x+3}{x-2} & \text{si } x<-\dfrac{3}{2} \\ -\dfrac{2x+3}{x-2} & \text{si } -\dfrac{3}{2}\leq x<2 \\ \dfrac{2x+3}{x-2} & \text{si } x>2 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+3}{x-2}=2 \qquad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+3}{x-2}=2$

d) $f(x)=\begin{cases} -\dfrac{x-3}{1-x} & \text{si } x<1 \\ \dfrac{x-3}{1-x} & \text{si } 1<x<3 \\ -\dfrac{x-3}{1-x} & \text{si } x\geq 3 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{x-3}{1-x}\right)=1 \qquad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{x-3}{1-x}\right)=1$

063 La siguiente representación es la gráfica de la función $f(x)$.



Da un valor aproximado a estos límites.

a) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

c) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

d) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

a) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=-0{,}9$

b) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

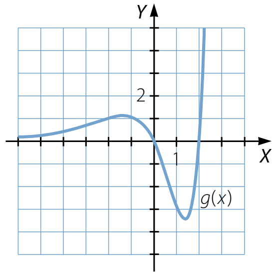
c) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=4$

d) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=-1$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

064 Esta es la gráfica de la función $g(x)$.



Da un valor aproximado de los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x \to -3} g(x)$ c) $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$ e) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$

b) $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$ d) $\lim\limits_{x \to 2} g(x)$ f) $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$

a) $\lim\limits_{x \to -3} g(x) = 0{,}7$ c) $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = -2{,}9$ e) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$ d) $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = 0$ f) $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0$

065 Si $f(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{x^2+1}}$, calcula estos límites.

a) $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ b) $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ c) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

a) $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \dfrac{9}{\sqrt{10}} = \dfrac{9\sqrt{10}}{10}$

b) $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \dfrac{-3}{\sqrt{2}} = -\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

066 Dada $f(x) = 2^{\ln x}$, determina:

a) $\lim\limits_{x \to e} f(x)$ b) $\lim\limits_{x \to -5} f(x)$ c) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

a) $\lim\limits_{x \to e} f(x) = 2^1 = 2$

b) $\lim\limits_{x \to -5} f(x)$ no existe porque no podemos calcular logaritmos de números negativos.

c) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ no existe ya que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ no existe.

067 Si tenemos la función $f(x)=\dfrac{6x-12}{x^2-3x-4}$, ¿cuáles serán sus límites cuando x tienda a 0, −1, 1 y 4?

$$\lim_{x\to 0}\frac{6x-12}{x^2-3x-4}=3$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{6x-12}{x^2-3x-4}=\frac{-18}{0}=\infty \to \left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to -1^-} f(x)=-\infty\\ \displaystyle\lim_{x\to -1^+} f(x)=+\infty\end{array}\right\}\to \text{No existe } \lim_{x\to -1} f(x).$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{6x-12}{x^2-3x-4}=1$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{6x-12}{x^2-3x-4}=\frac{12}{0}=\infty \to \left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to 4^-} f(x)=-\infty\\ \displaystyle\lim_{x\to 4^+} f(x)=+\infty\end{array}\right\}\to \text{No existe } \lim_{x\to 4} f(x).$$

068 Siendo la función $g(x)=\log(x^2-4)$, determina sus límites cuando x tienda a 5, −5, −2 y 1.

$$\lim_{x\to 5}\log(x^2-4)=\log 21=1{,}32 \qquad \lim_{x\to -5}\log(x^2-4)=\log 21=1{,}32$$

$$\lim_{x\to -2}\log(x^2-4)=\log 0 \to \left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to -2^-} g(x)=-\infty\\ \displaystyle\lim_{x\to -2^+} g(x)\text{ no existe}\end{array}\right\}\to \text{No existe } \lim_{x\to -2} g(x).$$

$\lim\limits_{x\to 1}\log(x^2-4)$ no existe.

069 Si sabemos que $\lim\limits_{x\to 5} m(x)=4$, $\lim\limits_{x\to 5} n(x)=0$ y $\lim\limits_{x\to 5} p(x)=+\infty$, calcula, si es posible, el límite cuando x tiende a 5 de las funciones.

a) $m(x)+n(x)+p(x)$
b) $m(x)\cdot n(x)-p(x)$
c) $m(x)\cdot p(x)$
d) $\dfrac{n(x)}{m(x)}$
e) $\dfrac{m(x)}{n(x)}$
f) $n(x)\cdot p(x)$
g) $\dfrac{p(x)}{m(x)}$
h) $\dfrac{n(x)}{p(x)}$
i) $\left(m(x)\right)^{n(x)}$
j) $\left(m(x)\right)^{p(x)}$
k) $\left(n(x)\right)^{p(x)}$
l) $\left(p(x)\right)^{n(x)}$

a) $\lim\limits_{x\to 5}[m(x)+n(x)+p(x)]=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to 5}[m(x)\cdot n(x)-p(x)]=-\infty$

c) $\lim\limits_{x\to 5}[m(x)\cdot p(x)]=+\infty$

d) $\lim\limits_{x\to 5}\left[\dfrac{n(x)}{m(x)}\right]=0$

e) $\lim\limits_{x\to 5}\left[\dfrac{m(x)}{n(x)}\right]=\dfrac{4}{0}\to$ No se puede calcular el límite.

f) $\lim\limits_{x \to 5} [n(x) \cdot p(x)] \to 0 \cdot +\infty$ Indeterminación

g) $\lim\limits_{x \to 5} \left[\dfrac{p(x)}{m(x)}\right] = +\infty$

h) $\lim\limits_{x \to 5} \left[\dfrac{n(x)}{p(x)}\right] = 0$

i) $\lim\limits_{x \to 5} [(m(x))^{n(x)}] = 4^0 = 1$

j) $\lim\limits_{x \to 5} [(m(x))^{p(x)}] = +\infty$

k) $\lim\limits_{x \to 5} [(n(x))^{p(x)}] = 0$

l) $\lim\limits_{x \to 5} [(p(x))^{n(x)}] \to +\infty^0$ Indeterminación

070 **Si $h(x) = \dfrac{1}{\ln x}$, calcula su límite en los puntos 6, −5, 1 y 0.**

$\lim\limits_{x \to 6} \dfrac{1}{\ln x} = \dfrac{1}{\ln 6} = 0{,}56$

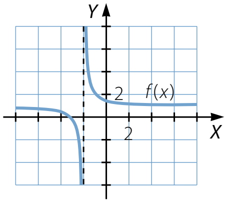
$\lim\limits_{x \to -5} \dfrac{1}{\ln x}$ no existe.

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{\ln x} = \frac{1}{0} = \infty \to \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} h(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} h(x) = +\infty \end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim_{x \to 1} h(x).$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{\ln x} = \frac{1}{\ln 0} \to \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} h(x) \text{ no existe} \\ \lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = 0 \end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim_{x \to 0} h(x).$$

071 **Observa la gráfica y determina los siguientes límites.**

a)



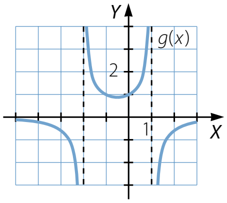
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x \to -2^-} f(x)$

$\lim\limits_{x \to -2^+} f(x)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

b)

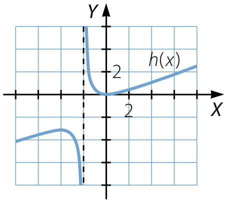


$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$

$\lim\limits_{x \to -2^-} g(x)$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to -2^+} g(x)$

$\lim\limits_{x \to 1^-} g(x)$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x)$

c)



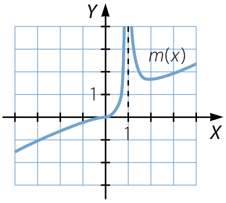
$\lim\limits_{x \to -\infty} h(x)$

$\lim\limits_{x \to -2^-} h(x)$

$\lim\limits_{x \to -2^+} h(x)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$

d)



$\lim\limits_{x \to -\infty} m(x)$

$\lim\limits_{x \to 1^-} m(x)$

$\lim\limits_{x \to 1^+} m(x)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} m(x)$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$ $\quad \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0$ $\quad \lim\limits_{x \to -2^+} g(x) = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -2^-} g(x) = -\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = -\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to -2^+} h(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -2^-} h(x) = -\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} (x) = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} m(x) = -\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to 1^+} m(x) = +\infty$

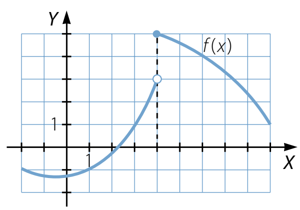
$\lim\limits_{x \to 1^-} m(x) = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} m(x) = +\infty$

072 Observa la gráfica de la función $f(x)$, y calcula los límites.

a) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

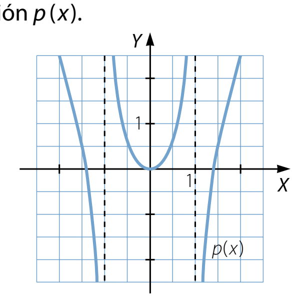
b) $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x)$

c) $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x)$



a) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -1$ $\quad$ b) $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = 3$ $\quad$ c) $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = 5$

073 Esta es la gráfica de la función $p(x)$.



Determina los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x \to 0} p(x)$

b) $\lim\limits_{x \to -1^-} p(x)$

c) $\lim\limits_{x \to -1^+} p(x)$

d) $\lim\limits_{x \to 1^-} p(x)$

e) $\lim\limits_{x \to 1^+} p(x)$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} p(x)$

a) $\lim\limits_{x \to 0} p(x) = 0$ $\quad$ c) $\lim\limits_{x \to -1^+} p(x) = +\infty$ $\quad$ e) $\lim\limits_{x \to 1^+} p(x) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -1^-} p(x) = -\infty$ $\quad$ d) $\lim\limits_{x \to 1^-} p(x) = +\infty$ $\quad$ f) $\lim\limits_{x \to +\infty} p(x) = +\infty$

074 Resuelve estos límites.

a) $\lim_{x \to 2^-} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 3}$ $\qquad \lim_{x \to 2^+} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 3}$

b) $\lim_{x \to 3^-} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 3}$ $\qquad \lim_{x \to 3^+} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 3}$

c) $\lim_{x \to 3^-} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 9}$ $\qquad \lim_{x \to 3^+} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 9}$

d) $\lim_{x \to 2^-} \frac{x^2 + x - 6}{x^3 - x^2 - 8x + 12}$ $\qquad \lim_{x \to 2^+} \frac{x^2 + x - 6}{x^3 - x^2 - 8x + 12}$

a) $\lim_{x \to 2^-} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 3} = -1$ $\qquad \lim_{x \to 2^+} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 3} = -1$

b) $\lim_{x \to 3^-} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 3} = -\infty$ $\qquad \lim_{x \to 3^+} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 3} = +\infty$

c) $\lim_{x \to 3^-} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 9} = -\infty$ $\qquad \lim_{x \to 3^+} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 9} = +\infty$

d) $$\lim_{x \to 2^-} \frac{x^2 + x - 6}{x^3 - x^2 - 8x + 12} = \lim_{x \to 2^-} \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)^2(x+3)} = \lim_{x \to 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x^2 + x - 6}{x^3 - x^2 - 8x + 12} = \lim_{x \to 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$$

075 Calcula $\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x + 1}$.

(Navarra. Junio 2001. Opción D. Pregunta 1)

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{(x-2)(x-1)}{(x-1)^2} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x-2}{x-1} = +\infty$$

076 Determina los límites siguientes y, en caso de resultar infinito, halla los límites laterales.

a) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 2}{2x^2 - 3x - 2}$ $\qquad \lim_{x \to -1} \frac{x^2 - x - 2}{2x^2 - 3x - 2}$

b) $\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 5x^2 + 6x}{x^3 + x^2 - 8x - 12}$ $\qquad \lim_{x \to -3} \frac{x^3 + 5x^2 + 6x}{x^3 + x^2 - 8x - 12}$

c) $\lim_{x \to 1} \frac{3x^3 - 18x^2 + 27x}{5x^2 - 20x + 15}$ $\qquad \lim_{x \to 3} \frac{3x^3 - 18x^2 + 27x}{5x^2 - 20x + 15}$

a) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{2x^2-3x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(2x+1)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+1}{2x+1}=\frac{3}{5}$

$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-x-2}{2x^2-3x-2}=0$

b) $\lim_{x\to -2}\frac{x^3+5x^2+6x}{x^3+x^2-8x-12}=\lim_{x\to -2}\frac{x(x+2)(x+3)}{(x-3)(x+2)^2}=\frac{-2}{0}=\infty$

$\lim_{x\to -2^-}\frac{x^3+5x^2+6x}{x^3+x^2-8x-12}=\lim_{x\to -2^-}\frac{x(x+3)}{(x-3)(x+2)}=-\infty$

$\lim_{x\to -2^+}\frac{x^3+5x^2+6x}{x^3+x^2-8x-12}=\lim_{x\to -2^+}\frac{x(x+3)}{(x-3)(x+2)}=+\infty$

$\lim_{x\to -3}\frac{x^3+5x^2+6x}{x^3+x^2-8x-12}=0$

c) $\lim_{x\to 1}\frac{3x^3-18x^2+27x}{5x^2-20x+15}=\frac{12}{0}=\infty$

$\lim_{x\to 1^-}\frac{3x^3-18x^2+27x}{5x^2-20x+15}=+\infty$

$\lim_{x\to 1^+}\frac{3x^3-18x^2+27x}{5x^2-20x+15}=-\infty$

$\lim_{x\to 3}\frac{3x^3-18x^2+27x}{5x^2-20x+15}=\lim_{x\to 3}\frac{3x(x-3)^2}{5(x-1)(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{3x(x-3)}{5(x-1)}=0$

077 Se considera la función $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$. Calcula $\lim_{x\to 1}f(x)$, $\lim_{x\to +\infty}f(x)$ y $\lim_{x\to -\infty}f(x)$.

(Baleares. Septiembre 2008. Opción B. Cuestión 3)

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2}{x-1}=\frac{1}{0}=\infty \rightarrow \left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2}{x-1}=-\infty\\ \lim_{x\to 1^+}\frac{x^2}{x-1}=+\infty\end{array}\right\}\rightarrow \text{No existe } \lim_{x\to 1}f(x).$$

$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2}{x-1}=+\infty$ $\lim_{x\to -\infty}\frac{x^2}{x-1}=-\infty$

078 Obtén los resultados de estos límites.

a) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}$

b) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$

c) $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt[3]{x^2-3x+2}}$

d) $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$

e) $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$

f) $\lim_{x\to 9}\frac{x-9}{\sqrt{x}-3}$

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} = \lim\limits_{x\to 0} \sqrt[6]{x} = 0$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt[6]{x}} = \frac{1}{0} = \infty \to \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{\sqrt[6]{x}} \text{ no existe} \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt[6]{x}} = +\infty \end{array}\right\} \to$ No existe $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt[6]{x}}$.

c) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt[3]{x^2-3x+2}} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt[3]{(x-2)(x-1)}} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt[6]{x-2}}{\sqrt[3]{x-1}} = 0$

d) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = -\frac{\sqrt{2}-2}{2}$

e) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \lim\limits_{x\to 4} \frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim\limits_{x\to 4} \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{4}$

f) $\lim\limits_{x\to 9} \frac{x-9}{\sqrt{x}-3} = \lim\limits_{x\to 9} \frac{(x-9)(\sqrt{x}+3)}{x-9} = \lim\limits_{x\to 9} (\sqrt{x}+3) = 6$

079 **Si $f(x) = \frac{x^3+11x^2+31x+21}{x^3+7x^2}$, determina:**

a) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ **c)** $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$ **e)** $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to -7} f(x)$ **d)** $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ **f)** $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

a) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^3+11x^2+31x+21}{x^3+7x^2} = \frac{240}{90} = \frac{8}{3}$

b) $\lim\limits_{x\to -7} \frac{x^3+11x^2+31x+21}{x^3+7x^2} = \lim\limits_{x\to -7} \frac{(x+1)(x+3)(x+7)}{x^2(x+7)} =$

$= \lim\limits_{x\to -7} \frac{(x+1)(x+3)}{x^2} = \frac{24}{49}$

c) $\lim\limits_{x\to -3} \frac{x^3+11x^2+31x+21}{x^3+7x^2} = 0$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3+11x^2+31x+21}{x^3+7x^2} = \frac{21}{0} = \infty \to \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \to \lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^3+11x^2+31x+21}{x^3+7x^2} = 1$

f) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x^3+11x^2+31x+21}{x^3+7x^2} = 1$

080 Si $f(x) = \dfrac{x^3 + 6x^2 + 9x}{x^2 + 10x + 21}$, calcula:

a) $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$
c) $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$
e) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$
b) $\lim\limits_{x \to -7} f(x)$
d) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$
f) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3 + 6x^2 + 9x}{x^2 + 10x + 21} = \dfrac{108}{60} = \dfrac{9}{5}$

b) $\lim\limits_{x\to -7} \dfrac{x^3 + 6x^2 + 9x}{x^2 + 10x + 21} = \lim\limits_{x\to -7} \dfrac{x(x+3)^2}{(x+3)(x+7)} = \lim\limits_{x\to -7} \dfrac{x(x+3)}{x+7} = \dfrac{28}{0} = \infty$

$\rightarrow \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -7^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to -7^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow$ No existe $\lim\limits_{x\to -7} f(x)$.

c) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^3 + 6x^2 + 9x}{x^2 + 10x + 21} = \lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x(x+3)}{x+7} = 0$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3 + 6x^2 + 9x}{x^2 + 10x + 21} = 0$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^3 + 6x^2 + 9x}{x^2 + 10x + 21} = +\infty$

f) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^3 + 6x^2 + 9x}{x^2 + 10x + 21} = -\infty$

081 Se considera la función $f(x) = \dfrac{x}{(x-1)^2}$. Calcula $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

(Baleares. Junio 2008. Opción A. Cuestión 3)

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x}{(x-1)^2} = \dfrac{1}{0} = \infty \rightarrow \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x}{(x-1)^2} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x}{(x-1)^2} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x}{(x-1)^2} = 0$

082 Calcula $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3 - 8x^2 + 7x}{x^2 - x}$.

(Castilla-La Mancha. Junio 2008. Bloque 1. Pregunta A)

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3 - 8x^2 + 7x}{x^2 - x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x(x-1)(x-7)}{x(x-1)} = \lim\limits_{x\to 0} (x-7) = -7$

083 Se considera la función $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$. Calcula $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

(Baleares. Junio 2008. Opción B. Cuestión 3)

$$\lim_{x\to -1}\frac{x}{x^2-1}=\frac{1}{0}=\infty \to \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{x}{x^2-1}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x}{x^2-1}=+\infty\end{array}\right\}\to \text{No existe } \lim_{x\to -1} f(x).$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x}{x^2-1}=\frac{1}{0}=\infty \to \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x}{x^2-1}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x}{x^2-1}=+\infty\end{array}\right\}\to \text{No existe } \lim_{x\to 1} f(x).$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x}{x^2-1}=0$$

084 Sea $f(x)=\dfrac{2}{x-3}-\dfrac{12}{x^2-9}$. Calcular el límite de la función cuando x tiende a -3.

(Asturias. Septiembre 2002. Bloque 3)

$$\lim_{x\to -3}\left(\frac{2}{x-3}-\frac{12}{x^2-9}\right)=\lim_{x\to -3}\frac{2x^2-12x+18}{(x-3)(x^2-9)}=\lim_{x\to -3}\frac{2(x-3)^2}{(x-3)^2(x+3)}=$$

$$=\lim_{x\to -3}\frac{2}{x+3}=\frac{2}{0}=\infty \to \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -3^-} f(x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to -3^+} f(x)=+\infty\end{array}\right\}\to \text{No existe } \lim_{x\to -3} f(x).$$

085 Calcula $\lim\limits_{x\to 0}(2x+1)^{\frac{1}{x}}$.

(La Rioja. Septiembre 2005. Propuesta A. Ejercicio 5)

$$\lim_{x\to 0}(2x+1)^{\frac{1}{x}}\to 1^{\infty} \qquad \lim_{x\to 0}(2x+1)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left[(2x+1-1)\cdot\frac{1}{x}\right]}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{x}}=e^2$$

086 Calcula $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}}$.

(Navarra. Junio 2001. Opción D. Pregunta 1)

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}}\to 1^{\infty}$$

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}(\cos x-1)\cdot\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\operatorname{sen}^2 x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{1-\cos^2 x}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{(1-\cos x)(1+\cos x)}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-1}{1+\cos x}}=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}=\frac{\sqrt{e}}{e}$$

087 Calcula el límite de esta función si $x \to +\infty$: $f(x) = \left(\dfrac{x^2-2}{1+x^2}\right)^{x+2}$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-2}{1+x^2}\right)^{x+2} \to 1^{\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-2}{1+x^2}\right)^{x+2} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{x^2-2}{1+x^2}-1\right)\cdot(x+2)\right]} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x^2-2-1-x^2)(x+2)}{1+x^2}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-3x-6}{1+x^2}} = e^0 = 1$$

088 Calcula $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{4x}$.

(Madrid. Junio 2003. Opción A. Ejercicio 1)

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{4x} = \lim_{x\to0}\frac{4+x-(4-x)}{4x\left(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{2x}{4x\left(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}\right)} = \lim_{x\to0}\frac{1}{2\left(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}\right)} = \frac{1}{8}$$

089 Calcula $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$.

(Andalucía. Año 2001. Modelo 4. Opción A. Ejercicio 2)

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2} = \lim_{x\to0}\frac{1-(1-x^2)}{x^2\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)} = \lim_{x\to0}\frac{x^2}{x^2\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}$$

090 Sabiendo que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\operatorname{sen} x} = 1$, halla:

a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos^2 x}{x^2}$

c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

d) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x}$

a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x\cos x} = \lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}\right) = 1$

b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos^2 x}{x^2} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} = \lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\cdot\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\right) = 1$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\cdot\dfrac{1}{1+\cos x}\right) = \dfrac{1}{2}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x(1+\cos x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{x(1+\cos x)} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\cdot\dfrac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}\right) = 0$

091 Si $g(x) = \begin{cases} x^2-1 & \text{si } x<3 \\ \dfrac{3}{x+5} & \text{si } x\geq 3 \end{cases}$, determina los límites:

a) $\lim\limits_{x\to -1} g(x)$ c) $\lim\limits_{x\to 3} g(x)$ e) $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$

b) $\lim\limits_{x\to -5} g(x)$ d) $\lim\limits_{x\to 6} g(x)$ f) $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x)$

a) $\lim\limits_{x\to -1} g(x) = \lim\limits_{x\to -1}(x^2-1) = 0$

b) $\lim\limits_{x\to -5} g(x) = \lim\limits_{x\to -1}(x^2-1) = 24$

c) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 3^-}(x^2-1) = 8 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{3}{x+5} = \dfrac{3}{8} \end{array}\right\} \to \lim\limits_{x\to 3^-} g(x) \neq \lim\limits_{x\to 3^+} g(x) \to$ No existe $\lim\limits_{x\to 3} g(x)$.

d) $\lim\limits_{x\to 6} g(x) = \lim\limits_{x\to 6} \dfrac{3}{x+5} = \dfrac{3}{11}$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3}{x+5} = 0$

f) $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to -\infty}(x^2-1) = +\infty$

092 Sea la función: $h(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{x-2} & \text{si } x<-2 \\ x^2+4x+4 & \text{si } -2\leq x<3 \\ 2^{x+1}+9 & \text{si } x>3 \end{cases}$. Calcula estos límites.

a) $\lim\limits_{x\to -5} h(x)$ c) $\lim\limits_{x\to 5} h(x)$ e) $\lim\limits_{x\to 3} h(x)$

b) $\lim\limits_{x\to 2} h(x)$ d) $\lim\limits_{x\to -2} h(x)$ f) $\lim\limits_{x\to +\infty} h(x)$

a) $\lim\limits_{x\to-5} h(x) = \lim\limits_{x\to-5} \frac{4}{x-2} = -\frac{4}{7}$

b) $\lim\limits_{x\to2} h(x) = \lim\limits_{x\to2} (x^2+4x+4) = 16$

c) $\lim\limits_{x\to5} h(x) = \lim\limits_{x\to5} (2^{x+1}+9) = 73$

d) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-2^-} h(x) = \lim\limits_{x\to-2^-} \frac{4}{x-2} = -1 \\ \lim\limits_{x\to-2^+} h(x) = \lim\limits_{x\to-2^+} (x^2+4x+4) = 0\end{array}\right\} \to \lim\limits_{x\to-2^-} h(x) \neq \lim\limits_{x\to-2^+} h(x)$

$\to$ No existe $\lim\limits_{x\to-2} h(x)$.

e) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to3^-} h(x) = \lim\limits_{x\to3^-} (x^2+4x+4) = 25 \\ \lim\limits_{x\to3^+} h(x) = \lim\limits_{x\to3^+} (2^{x+1}+9) = 25\end{array}\right\} \to \lim\limits_{x\to3^-} h(x) = \lim\limits_{x\to3^+} h(x)$

$\to \lim\limits_{x\to3} h(x) = 25$

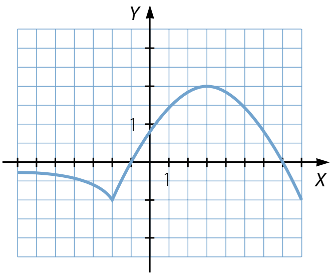
f) $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (2^{x+1}+9) = +\infty$

093 Dibuja la gráfica aproximada de una función que cumpla simultáneamente las siguientes condiciones:

$\lim\limits_{x\to3} f(x) = 2$ $\qquad \lim\limits_{x\to-1} f(x) = 0$

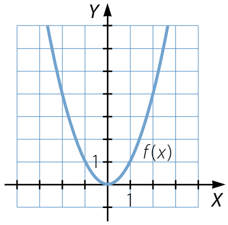
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ $\qquad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

Respuesta abierta. Por ejemplo:

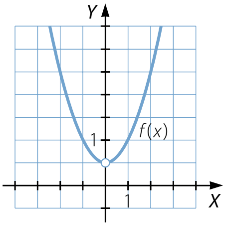


094 Decide si las siguientes funciones son continuas en los puntos que se indican. En caso de no serlo, determina el tipo de discontinuidad existente.

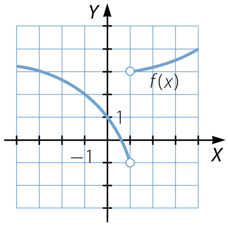
a) En $x = 0$ y $x = 2$.



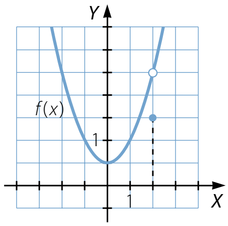
b) En $x = 0$ y $x = 2$.



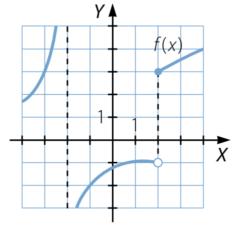
c) En $x = 1$.



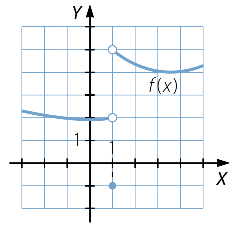
d) En $x = -1$ y $x = 2$.



e) En $x = -2$ y $x = 2$.



f) En $x = 1$.



a) • $f(0) = 0 = \lim\limits_{x \to 0} f(x) \to$ La función es continua en $x = 0$.

• $f(2) = 4 = \lim\limits_{x \to 2} f(x) \to$ La función es continua en $x = 2$.

b) • No existe $f(0)$.

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0{,}5 \to$ Existe $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0{,}5$.

La función no es continua en $x = 0$, tiene una discontinuidad evitable.

• $f(2) = 2{,}5 = \lim\limits_{x \to 2} f(x) \to$ La función es continua en $x = 2$.

c) No existe $f(1)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 3 \end{array}\right\} \to \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) \to \text{No existe } \lim\limits_{x \to 1} f(x).$$

La función no es continua en $x = 1$, tiene una discontinuidad de salto finito.

d) • $f(-1) = 1 = \lim\limits_{x \to -1} f(x) \to$ La función es continua en $x = -1$.

• $f(2) = 1{,}5$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 2{,}5 \to$ Existe $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 2{,}5$.

$f(2) \neq \lim\limits_{x \to 2} f(x) \to$ La función no es continua en $x = 2$, tiene una discontinuidad evitable.

e) • No existe $f(-2)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim\limits_{x \to -2} f(x).$$

La función no es continua en $x = -2$, tiene una discontinuidad de salto infinito.

- $f(2) = 3$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -1 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 3\end{array}\right\} \to \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) \to \text{No existe } \lim\limits_{x \to 2} f(x).$$

La función no es continua en $x = 2$, tiene una discontinuidad de salto finito.

f) $f(1) = -1$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 5\end{array}\right\} \to \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) \to \text{No existe } \lim\limits_{x \to 1} f(x).$$

La función no es continua en $x = 1$, tiene una discontinuidad de salto finito.

095 **Estudia la continuidad de las siguientes funciones.**

a) $y = x^2 - 5x + 6$

b) $y = \dfrac{1}{x^2 - 5x + 6}$

c) $y = \sqrt{x^2 - 4}$

d) $y = \sqrt{4 - x^2}$

e) $y = \ln |x|$

f) $y = \log(2 - x)$

a) La función es polinómica, por tanto es continua en $\mathbb{R}$.

b) $x^2 - 5x + 6 = 0 \to \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$

Dominio $= \mathbb{R} - \{2, 3\}$

- No existe $f(2)$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -\infty\end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim\limits_{x \to 2} f(x).$$

- No existe $f(3)$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = +\infty\end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim\limits_{x \to 3} f(x).$$

La función es continua en $\mathbb{R} - \{2, 3\}$, tiene discontinuidades de salto infinito en $x = 2$ y en $x = 3$.

c) $x^2 - 4 \geq 0 \to (x + 2)(x - 2) \geq 0 \to \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq -2 \end{cases}$

La función está definida en $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$, por tanto, es continua en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

d) $4 - x^2 \geq 0 \to (2 + x)(2 - x) \geq 0 \to -2 \leq x \leq 2$

La función está definida en $[-2, 2]$, por tanto, es continua en $(-2, 2)$.

e) No existe $f(0)$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty\end{array}\right\} \to \lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$$

La función es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$, tiene una discontinuidad de salto infinito en $x = 0$.

f) $2 - x > 0 \to x < 2$

La función está definida en $(-\infty, 2)$, por tanto es continua en $(-\infty, 2)$.

096 **¿En qué puntos presentan una discontinuidad estas funciones y de qué tipo son?**

a) $y = \dfrac{5}{x-2}$

b) $y = \dfrac{6x}{x^2 - 2x + 3}$

c) $y = \dfrac{3x-6}{x^2 - 2x + 1}$

d) $y = \dfrac{2x+2}{x^2 - 2x - 3}$

e) $y = \dfrac{x^2 - x}{2x^2 + 4x - 6}$

f) $y = \dfrac{2x^2 + 4x + 6}{x^2 - x}$

a) No existe $f(2)$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty\end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim\limits_{x\to 2} f(x)$$

La función tiene en $x = 2$ una discontinuidad de salto infinito.

b) $x^2 - 2x + 3 \neq 0$ para cualquier valor de x, así no hay puntos de discontinuidad.

c) $x^2 - 2x + 1 = 0 \to x = 1$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty\end{array}\right\} \to \lim\limits_{x\to 1} f(x) = -\infty$$

La función tiene en $x = 1$ una discontinuidad de salto infinito.

d) $x^2 - 2x - 3 = 0 \to \left\{\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3\end{array}\right.$

- No existe $f(-1)$.

$$\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \lim\limits_{x\to -1} \frac{2(x+1)}{(x+1)(x-3)} = \lim\limits_{x\to -1} \frac{2}{x-3} = -\frac{1}{2}$$

- No existe $f(3)$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = +\infty\end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim\limits_{x\to 3} f(x)$$

La función es continua en $\mathbb{R} - \{-1, 3\}$, tiene una discontinuidad evitable en $x = -1$ y una discontinuidad de salto infinito en $x = 3$.

e) $2x^2 + 4x - 6 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \end{cases}$

- No existe $f(-3)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No existe } \lim\limits_{x \to -3} f(x).$$

- No existe $f(1)$.

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x(x-1)}{2(x-1)(x+3)} = \lim_{x \to 1} \frac{x}{2(x+3)} = \frac{1}{8}$$

La función es continua en $\mathbb{R} - \{-3, 1\}$, tiene una discontinuidad evitable en $x = -3$ y una discontinuidad evitable en $x = 1$.

f) $x^2 - x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

- No existe $f(0)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No existe } \lim\limits_{x \to 0} f(x).$$

- No existe $f(1)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No existe } \lim\limits_{x \to 1} f(x).$$

La función es continua en $\mathbb{R} - \{0, 1\}$, tiene discontinuidades de salto infinito en $x = 0$ y en $x = 1$.

097 **Sea $f(x) = \dfrac{2}{x-3} - \dfrac{12}{x^2-9}$. Comprobar si la función es continua en $x = 3$.**

(Asturias. Septiembre 2002. Bloque 3)

No existe $f(3)$.

$$\lim_{x \to 3} \left(\frac{2}{x-3} - \frac{12}{x^2-9} \right) = \lim_{x \to 3} \frac{2x^2 - 12x + 18}{(x-3)(x^2-9)} = \lim_{x \to 3} \frac{2(x-3)^2}{(x-3)^2(x+3)} =$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{2}{x+3} = \frac{1}{3}$$

La función no es continua en $x = 3$, tiene una discontinuidad evitable.

098 **Si $f(x) = \dfrac{e^{3x} - e^{-3x}}{4x}$, indica de forma razonada en qué valor $x = a$ no está definida $f(x)$.**

(Castilla-La Mancha. Junio 2007. Bloque 1. Pregunta A)

La función no está definida para los valores que anulan el denominador, es decir, para $x = 0$.

099 **La función $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ no está definida para $x = 0$. Definir $f(0)$ de modo que $f(x)$ sea una función continua en ese punto.**

(Aragón. Septiembre 2006. Opción B. Cuestión 2)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x+1-1}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{1}{2}$$

La función es continua si: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$

100 **Estudiar la continuidad de la función $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}$ y clasificar sus diferentes tipos de discontinuidad.**

(Murcia. Septiembre 2006. Bloque 3. Cuestión A)

$$x^2 + 3x + 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -1 \end{cases}$$

- No existe $f(-2)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No existe } \lim_{x\to -2} f(x).$$

- No existe $f(-1)$.

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x+2)} = \lim_{x\to -1} \frac{x-1}{x+2} = -2$$

La función es continua en $\mathbb{R} - \{-2, -1\}$, tiene una discontinuidad de salto infinito en $x = -2$ y una discontinuidad evitable en $x = -1$.

101 **¿Cuáles son las diferencias entre las funciones $y = 2x - 1$ e $y = \dfrac{(2x-1)(x+2)}{x+2}$. ¿Son las dos funciones continuas?**

Si tienen alguna discontinuidad, decide de qué tipo es.

Escribe, si es posible, la segunda función como función definida a trozos utilizando la primera.

Las funciones tienen la misma gráfica salvo en el punto $x = -2$. La primera es una recta y es continua, la segunda está formada por dos semirrectas y no es continua en este punto.

$$\lim_{x\to -2} \frac{(2x-1)(x+2)}{x+2} = \lim_{x\to -2} (2x-1) = -5$$

La discontinuidad de la segunda función en $x = -2$ es evitable.

Así, la segunda función es: $f(x) = 2x - 1 \quad \text{si } x \neq -2$

102 Estudia la continuidad en $x = -1$ y $x = 2$ de la función:

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{si } x < -1 \\ x^2 + 4x - 1 & \text{si } -1 \leq x \leq 2 \\ 11 + \ln(x-1) & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Clasifica los tipos de discontinuidades.

- $f(-1) = -4$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -5 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -4 \end{array}\right\} \rightarrow \text{No existe } \lim\limits_{x \to -1} f(x).$$

La función no es continua en $x = -1$, tiene una discontinuidad de salto finito.

- $f(2) = 11$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 11 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 11 \end{array}\right\} \rightarrow \lim\limits_{x \to 2} f(x) = 11 = f(2)$$

La función es continua en $x = 2$.

103 Estudia la continuidad de la siguiente función en los puntos $x = 0$ y $x = 3$.

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{x-4} & \text{si } x < 0 \\ x - 1 & \text{si } 0 < x \leq 3 \\ \dfrac{1}{x-3} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

- No existe $g(0)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = -1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = -1 \end{array}\right\} \rightarrow \lim\limits_{x \to 0} g(x) = -1$$

La función no es continua en $x = 0$, tiene una discontinuidad evitable.

- $g(3) = 2$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} g(x) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} g(x) = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No existe } \lim\limits_{x \to 3} g(x).$$

La función no es continua en $x = 3$, tiene una discontinuidad de salto infinito.

104 Estudia si la función:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq -1 \\ 1 - x^2 & \text{si } -1 < x \leq 2 \\ -3 & \text{si } 2 < x \end{cases}$$

es continua en los puntos $x = -1$ y $x = 2$.

(Castilla-La Mancha. Junio 2005. Bloque 1. Pregunta A)

- $f(-1) = -1$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = -1\\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = 0\end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim\limits_{x\to -1} f(x).$$

La función no es continua en $x = -1$, tiene una discontinuidad de salto finito.

- $f(2) = -3$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -3\\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -3\end{array}\right\} \to \lim\limits_{x\to 2} f(x) = -3 = f(2)$$

La función es continua en $x = 2$.

105 Estudiar la continuidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} & \text{si } x \neq 3 \\ 6 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

en el punto $x = 3$.

(Galicia. Junio 2000. Bloque 1. Pregunta 2)

$f(3) = 6$

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim_{x\to 3}(x+3) = 6 = f(3)$$

La función es continua en $x = 3$.

106 Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 5 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 + k & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

determina k para que $f(x)$ sea continua en $x = 1$.

(Castilla-La Mancha. Junio 2001. Bloque 3. Pregunta A)

La función es continua si: $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$

$f(1) = 7$

Existe $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ si $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 7\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 1 + k\end{array}\right\} \to 7 = 1 + k \to k = 6$$

107 ¿Qué valor debe tomar a en la siguiente función para que sea continua en el punto $x = 4$?

$$h(x) = \begin{cases} \cos(x - 4) & \text{si } x < 4 \\ 2^{x-2a} & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

La función es continua si: $\lim_{x\to 4} h(x) = h(4)$

$h(4) = 2^{4-2a}$

Existe $\lim_{x\to 4} h(x)$ si $\lim_{x\to 4^-} h(x) = \lim_{x\to 4^+} h(x)$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 4^-} h(x) = 1\\ \lim_{x\to 4^+} h(x) = 2^{4-2a}\end{array}\right\} \to 2^{4-2a} = 1 \to 4-2a = 0 \to a = 2$$

108 **Completa la función para que sea continua en $x = 2$.**

$$p(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 1 & \text{si } x < 2\\ \boxed{} & \text{si } x = 2\\ \dfrac{1}{x-3} & \text{si } x > 2\end{cases}$$

La función es continua si: $\lim_{x\to 2} p(x) = p(2)$

Existe $\lim_{x\to 2} p(x)$ si $\lim_{x\to 2^-} p(x) = \lim_{x\to 2^+} p(x)$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 2^-} p(x) = -1\\ \lim_{x\to 2^+} p(x) = -1\end{array}\right\} \to \lim_{x\to 2} p(x) = -1$$

Entonces la función es continua si: $p(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 1 & \text{si } x < 2\\ -1 & \text{si } x = 2\\ \dfrac{1}{x-3} & \text{si } x > 2\end{cases}$

109 **Sea la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{si } x \leq 3\\ 2x - 4 & \text{si } x > 3\end{cases}$$

¿En qué puntos es continua la función?

(Castilla-La Mancha. Septiembre 2003. Bloque 2. Pregunta A)

La función está formada por dos funciones polinómicas, por tanto, continuas en los intervalos en los que están definidas. Estudiamos qué ocurre en el punto $x = 3$:

$f(3) = 0$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 3^-} f(x) = 0\\ \lim_{x\to 3^+} f(x) = 2\end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim_{x\to 3} f(x).$$

Luego la función no es continua en $x = 3$, tiene una discontinuidad de salto finito.

110 **Estudia la continuidad de esta función, y especifica los tipos de discontinuidades que presente.**

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x^2 & \text{si } x < -1 \\ 2 & \text{si } x = -1 \\ \dfrac{8}{3 - x} & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

- $f(x) = 1 + x^2$ es una función polinómica, por tanto, $f(x)$ es continua en $(-\infty, -1)$.

- $f(-1) = 2$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = 2 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = 2 \end{array}\right\} \to \lim\limits_{x \to -1} f(x) = 2$$

$\lim\limits_{x \to -1} f(x) = f(-1) \to f(x)$ es continua en $x = 2$.

- $f(x) = \dfrac{8}{3 - x}$ está definida en $\mathbb{R} - \{3\}$, por tanto, $f(x)$ es continua en $(-1, 3) \cup (3, +\infty)$.

- No existe $f(3)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim\limits_{x \to 3} f(x).$$

Luego la función no es continua en $x = 3$, tiene una discontinuidad de salto infinito.

111 **Estudia la continuidad de la función:**

$$g(x) = \begin{cases} 3 \ln (x + 2) & \text{si } x < -1 \\ 2 & \text{si } x = -1 \\ x^2 - 1 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

- $g(x) = 3 \ln(x + 2)$ está definida en $(-2, +\infty)$, por tanto, $g(x)$ es continua en $(-2, -1)$.

- $g(-1) = 2$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} g(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} g(x) = 0 \end{array}\right\} \to \lim\limits_{x \to -1} g(x) = 0$$

$\lim\limits_{x \to -1} g(x) \neq g(-1) \to g(x)$ no es continua en $x = -1$, tiene una discontinuidad evitable.

- $g(x) = x^2 - 1$ es una función polinómica, por tanto, $g(x)$ es continua en $(-1, +\infty)$.

112 **Estudia la continuidad de esta función:**

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{4}{x+3} & \text{si } x<-2\\ x^2+2x+4 & \text{si } -2\le x<1\\ \dfrac{3}{x+7} & \text{si } x>1\end{cases}$$

- $h(x)=\dfrac{4}{x+3}$ está definida en $\mathbb{R}-\{-3\}$, por tanto, $h(x)$ es continua en $(-\infty,-3)\cup(-3,-2)$.

  No existe $h(-3)$.

  $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -3^-} h(x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to -3^+} h(x)=+\infty\end{array}\right\}\to \text{No existe } \lim\limits_{x\to -3} h(x).$$

  Luego la función no es continua en $x=-3$, tiene una discontinuidad de salto infinito.

- Estudiamos qué ocurre en el punto $x=-2$:

  $h(-2)=4$

  $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -2^-} h(x)=4\\ \lim\limits_{x\to -2^+} h(x)=4\end{array}\right\}\to \lim\limits_{x\to -2} h(x)=4$$

  $\lim\limits_{x\to -2} h(x)=h(-2)\to h(x)$ es continua en $x=-2$.

- $h(x)=x^2+2x+4$ es una función polinómica, por tanto, $h(x)$ es continua en $(-2, 1)$.

- $h(x)=\dfrac{3}{x+7}$ está definida en $\mathbb{R}-\{-7\}$, por tanto, $h(x)$ es continua en $(1,+\infty)$.

- Estudiamos qué ocurre en el punto $x=1$:

  No existe $h(1)$.

  $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} h(x)=7\\ \lim\limits_{x\to 1^+} h(x)=\dfrac{3}{8}\end{array}\right\}\to \text{No existe } \lim\limits_{x\to 1} h(x).$$

  Luego la función no es continua en $x=1$, tiene una discontinuidad de salto finito.

113 **Estudiar la continuidad de la función:**

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2-x} & \text{si } x\le 1\\ -x^2+4x-2 & \text{si } x>1\end{cases}$$

(Castilla-La Mancha. Septiembre 2000. Bloque 3. Pregunta A)

- $f(x) = \dfrac{1}{2-x}$ está definida en $\mathbb{R} - \{2\}$, por tanto, $f(x)$ es continua en $(-\infty, 1)$.
- $f(x) = -x^2 + 4x - 2$ es una función polinómica, por tanto, $f(x)$ es continua en $(1, +\infty)$.
- Estudiamos qué ocurre en el punto $x = 1$:

  $f(1) = 1$

  $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 1\end{array}\right\} \to \lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$$

  $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1) \to f(x)$ es continua en $x = 1$.

114 **Se considera la función real de variable real definida por:**

$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x-2} & \text{si } x \geq 2 \\ x(x-2) & \text{si } x < 2 \end{cases}$. Estudiar su continuidad.

(Madrid. Septiembre 2002. Opción A. Ejercicio 2)

- $f(x) = \sqrt[3]{x-2}$ está definida en $\mathbb{R}$, por tanto, $f(x)$ es continua en $(2, +\infty)$.
- $f(x) = x(x-2)$ es una función polinómica, por tanto, $f(x)$ es continua en $(-\infty, 2)$.
- Estudiamos qué ocurre en el punto $x = 2$:

  $f(2) = 0$

  $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 0\end{array}\right\} \to \lim\limits_{x \to 2} f(x) = 0$$

  $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2) \to f(x)$ es continua en $x = 2$.

115 **Expresa estas funciones como funciones definidas a trozos, y estudia su continuidad.**

a) $y = |x|$
b) $y = |x + 5|$
c) $y = |3 - 2x|$
d) $y = |x^2 - x - 6|$
e) $y = |6 - x^2|$

a) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

- $f(0) = 0$

  $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0\end{array}\right\} \to \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$$

  $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) \to f(x)$ es continua en $x = 0$.

- La función está formada por funciones polinómicas, por tanto, $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.

b) $f(x) = \begin{cases} x+5 & \text{si } x \geq -5 \\ -x-5 & \text{si } x < -5 \end{cases}$

- $f(-5) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -5^-} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to -5^+} f(x) = 0 \end{array}\right\} \to \lim\limits_{x \to -5} f(x) = 0$$

$\lim\limits_{x \to -5} f(x) = f(-5) \to f(x)$ es continua en $x = -5$.

- La función está formada por funciones polinómicas, por tanto, $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.

c) $f(x) = \begin{cases} 3-2x & \text{si } x \leq \dfrac{3}{2} \\ 2x-3 & \text{si } x > \dfrac{3}{2} \end{cases}$

- $f\left(\dfrac{3}{2}\right) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \frac{3}{2}^-} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to \frac{3}{2}^+} f(x) = 0 \end{array}\right\} \to \lim\limits_{x \to \frac{3}{2}} f(x) = 0$$

$\lim\limits_{x \to \frac{3}{2}} f(x) = f\left(\dfrac{3}{2}\right) \to f(x)$ es continua en $x = \dfrac{3}{2}$.

- La función está formada por funciones polinómicas, por tanto, $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.

d) $x^2 - x - 6 = 0 \to \begin{cases} x = -2 \\ x = 3 \end{cases}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 6 & \text{si } x \leq -2 \\ -x^2 + x + 6 & \text{si } -2 < x \leq 3 \\ x^2 - x - 6 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

- $f(-2) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = 0 \end{array}\right\} \to \lim\limits_{x \to -2} f(x) = 0$$

$\lim\limits_{x \to -2} f(x) = f(-2) \to f(x)$ es continua en $x = -2$.

- $f(3) = 0$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 0\\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 0\end{array}\right\} \to \lim\limits_{x\to 3} f(x) = 0$$

$\lim\limits_{x\to 3} f(x) = f(3) \to f(x)$ es continua en $x = 3$.

- La función está formada por funciones polinómicas, por tanto, $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.

e) $6 - x^2 = 0 \to x = \pm\sqrt{6}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 6 & \text{si } x \le -\sqrt{6} \\ 6 - x^2 & \text{si } -\sqrt{6} < x \le \sqrt{6} \\ x^2 - 6 & \text{si } x > \sqrt{6} \end{cases}$$

- $f\left(-\sqrt{6}\right) = 0$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to (-\sqrt{6})^-} f(x) = 0\\ \lim\limits_{x\to (-\sqrt{6})^+} f(x) = 0\end{array}\right\} \to \lim\limits_{x\to -\sqrt{6}} f(x) = 0$$

$\lim\limits_{x\to -\sqrt{6}} f(x) = f\left(-\sqrt{6}\right) \to f(x)$ es continua en $x = -\sqrt{6}$.

- $f\left(\sqrt{6}\right) = 0$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to (\sqrt{6})^-} f(x) = 0\\ \lim\limits_{x\to (\sqrt{6})^+} f(x) = 0\end{array}\right\} \to \lim\limits_{x\to \sqrt{6}} f(x) = 0$$

$\lim\limits_{x\to \sqrt{6}} f(x) = f\left(\sqrt{6}\right) \to f(x)$ es continua en $x = \sqrt{6}$.

- La función está formada por funciones polinómicas, por tanto, $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.

116 **Se considera la función $f(x) = \left|\operatorname{sen} 4x - \dfrac{1}{2}\right|$. Estudia su continuidad en el intervalo $(0, \pi)$.**

(Cantabria. Junio 2001. Bloque 1. Opción B)

$$\operatorname{sen} 4x - \frac{1}{2} = 0 \to \operatorname{sen} 4x = \frac{1}{2} \to \begin{cases} 4x = \dfrac{\pi}{6} \to x = \dfrac{\pi}{24} \\[2ex] 4x = \dfrac{5\pi}{6} \to x = \dfrac{5\pi}{24} \end{cases} \text{en el intervalo } (0, \pi)$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} - \operatorname{sen} 4x & \text{si } 0 < x < \dfrac{\pi}{6} \\[2ex] \operatorname{sen} 4x - \dfrac{1}{2} & \text{si } \dfrac{\pi}{6} \le x \le \dfrac{5\pi}{6} \\[2ex] \dfrac{1}{2} - \operatorname{sen} 4x & \text{si } \dfrac{5\pi}{6} < x < \pi \end{cases}$$

- $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}^-} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}^+} f(x) = 0 \end{array}\right\} \to \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} f(x) = 0$$

$$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} f(x) = f\left(\frac{\pi}{6}\right) \to f(x) \text{ es continua en } x = \frac{\pi}{6}.$$

- $f\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \frac{5\pi}{6}^-} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to \frac{5\pi}{6}^+} f(x) = 0 \end{array}\right\} \to \lim\limits_{x \to \frac{5\pi}{6}} f(x) = 0$$

$$\lim\limits_{x \to \frac{5\pi}{6}} f(x) = f\left(\frac{5\pi}{6}\right) \to f(x) \text{ es continua en } x = \frac{5\pi}{6}.$$

La función es continua en $(0, \pi)$.

117 **Encontrar el valor de k para el cual la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{6 - x}{2} & \text{si } x < 2 \\ x^2 + kx & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ es continua.**

(Aragón. Junio 2008. Bloque 3. Opción B)

- La función está formada por funciones polinómicas, por tanto, es continua en los intervalos en los que están definidas. Estudiamos el punto en el que cambia su expresión algebraica.
- La función es continua en $x = 2$ si: $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$

  $f(2) = 4 + 2k$

  Existe $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ si $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 4 + 2k \end{array}\right\} \to 2 = 4 + 2k \to 2k = -2 \to k = -1$$

118 **Se sabe que la función $f: (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por:**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{si } -1 < x < 0 \\ \dfrac{x^2 + a}{x + 1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

es continua en $(-1, +\infty)$. Halla el valor de a.

(Andalucía. Junio 2004. Opción B. Ejercicio 1)

Como las funciones son continuas en los intervalos en los que están definidas, $f(x)$ es continua en $(-1, +\infty)$ si es continua en $x = 0$, es decir, si $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$.

$f(0) = a$

Existe $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ si $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 3 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = a \end{array}\right\} \rightarrow a = 3$$

119 **Dada la función:**

$$f(x) = \begin{cases} 5 + 2\,sen\,x & \text{si } x \leq 0 \\ -x^2 + ax + b & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

¿Para qué valores de los parámetros a y b es continua la función $f(x)$?

(Canarias. Junio 2000. Opción A. Cuestión 1)

Para cualquier valor de los parámetros a y b las funciones son continuas en los intervalos en los que están definidas.

Estudiamos qué ocurre en el punto $x = 0$:

$f(0) = 5$

Existe $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ si $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 5 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = b \end{array}\right\} \rightarrow b = 5$$

Luego $f(x)$ es continua si $b = 5$, independientemente del valor de a.

120 **Dada la función** $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x \leq -2 \\ ax^2 + bx & \text{si } -2 < x \leq 4 \\ x - 4 & \text{si } 4 < x \end{cases}$**, determina a y b de modo que sea continua.**

(Castilla-La Mancha. Septiembre 2001. Bloque 2. Pregunta A)

- Como las funciones son continuas en los intervalos en los que están definidas, $f(x)$ es continua si es continua en $x = -2$ y en $x = 4$.
- La función es continua en $x = -2$ si: $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = f(-2)$.

  $f(-2) = -3$

  Existe $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$ si $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^+} f(x)$.

  $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -3 \\ \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = 4a - 2b \end{array}\right\} \rightarrow 4a - 2b = -3$$

- La función es continua en $x = 4$ si: $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = f(4)$

  $f(4) = 16a + 4b$

  Existe $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$ si $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 4^+} f(x)$.

  $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = 16a + 4b \\ \lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = 0 \end{array}\right\} \to 16a + 4b = 0$$

Entonces: $\left.\begin{array}{r} 4a - 2b = -3 \\ 16a + 4b = 0 \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} a = -\dfrac{1}{4} \\ b = 1 \end{array}\right.$

121 **Calcular los valores de los parámetros *a* y *b* para que la función siguiente resulte continua en todos los puntos.**

$$f(x) = \begin{cases} ax - b & \text{si } x < -1 \\ ax^2 - bx + 3 & \text{si } -1 \le x \le 2 \\ -bx^3 + a & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

(Canarias. Junio 2003. Opción B. Cuestión 1)

Como las funciones son continuas en los intervalos en los que están definidas, $f(x)$ es continua si es continua en $x = -1$ y en $x = 2$.

- La función es continua en $x = -1$ si: $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = f(-1)$

  $f(-1) = a + b + 3$

  Existe $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ si $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$.

  $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -a - b \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = a + b + 3 \end{array}\right\} \to -a - b = a + b + 3 \to 2a + 2b = -3$$

- La función es continua en $x = 2$ si: $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$

  $f(2) = 4a - 2b + 3$

  Existe $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ si $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$.

  $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 4a - 2b + 3 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -8b + a \end{array}\right\} \to 4a - 2b + 3 = -8b + a \to 3a + 6b = -3$$

Entonces: $\left.\begin{array}{r} 2a + 2b = -3 \\ 3a + 6b = -3 \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} a = -2 \\ b = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

122 **Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función continua definida por:**

$$f(x) = \begin{cases} |2 - x| & \text{si } x < a \\ x^2 - 5x + 7 & \text{si } x \ge a \end{cases}$$

donde *a* es un número real. Determina *a*.

(Andalucía. Año 2003. Modelo 3. Opción B. Ejercicio 2)

- Si $a \leq 2$, entonces la función es de la forma: $f(x) = \begin{cases} 2-x & \text{si } x < a \\ x^2 - 5x + 7 & \text{si } x \geq a \end{cases}$

  Al ser funciones continuas en los intervalos en los que están definidas, $f(x)$ es continua si es continua en $x = a$, es decir, si: $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

  $f(a) = a^2 - 5a + 7$

  Existe $\lim_{x \to a} f(x)$ si $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$.

  $$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to a^-} f(x) = 2 - a \\ \lim_{x \to a^+} f(x) = a^2 - 5a + 7 \end{array}\right\} \to 2 - a = a^2 - 5a + 7 \to a^2 - 4a + 5 = 0$$

  $\to$ No tiene solución.

- Si $a > 2$ la expresión de la función es: $f(x) = \begin{cases} 2-x & \text{si } x \leq 2 \\ -2+x & \text{si } 2 < x < a \\ x^2 - 5x + 7 & \text{si } x \geq a \end{cases}$

Como las funciones son continuas en los intervalos en los que están definidas, $f(x)$ es continua si es continua en $x = 2$ y en $x = a$.

La función es continua en $x = 2$ porque $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2) = 0$.

Estudiamos la función en $x = a$:

$f(a) = a^2 - 5a + 7$

Existe $\lim_{x \to a} f(x)$ si $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to a^-} f(x) = -2 + a \\ \lim_{x \to a^+} f(x) = a^2 - 5a + 7 \end{array}\right\} \to -2 + a = a^2 - 5a + 7 \to a^2 - 6a + 9 = 0 \to a = 3$$

123 **Para cualquier valor real de *a*, se considera la función:**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{si } -\infty < x \leq 0 \\ \text{sen } ax & \text{si } 0 < x < \pi \\ (x - \pi)^2 + 1 & \text{si } \pi \leq x < +\infty \end{cases}$$

Determinar los valores de *a* para los cuales $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$.

(Cantabria. Septiembre 2000. Bloque 1. Opción B)

Para cualquier valor de a las funciones son continuas en los intervalos en los que están definidas. Por tanto, $f(x)$ es continua si lo es en $x = 0$ y en $x = \pi$.

- $f(0) = 0$

  Existe $\lim_{x \to 0} f(x)$ si $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x)$.

  $$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 0^-} f(x) = 0 \\ \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 \end{array}\right\} \to \lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$$

  $f(x)$ es continua en $x = 0$ para cualquier valor de a.

- La función es continua en $x = \pi$ si: $\lim\limits_{x \to \pi} f(x) = f(\pi)$

$f(\pi) = 1$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \pi^-} f(x) = sen\ a\pi \\ \lim\limits_{x \to \pi^+} f(x) = 1 \end{array}\right\} \to sen\ a\pi = 1 \to a\pi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \to a = \frac{1}{2} + 2k, \text{ siendo } k \in \mathbb{Z}$$

124 **Considera la función f: $(-\infty, 10) \to \mathbb{R}$ definida por:**

$$f(x) = \begin{cases} a^x - 6 & \text{si } x < 2 \\ |x - 5| & \text{si } 2 \le x < 10 \end{cases}$$

Determina el valor de $a > 0$ sabiendo que f es continua.

(Andalucía. Año 2001. Modelo 6. Opción A. Ejercicio 1)

Como $f(x)$ está formada por funciones continuas en los intervalos en los que están definidas, es continua en $(-\infty, 10)$ si lo es en $x = 2$, es decir, si: $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$

$f(2) = 3$

Existe $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ si $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = a^2 - 6 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 3 \end{array}\right\} \to a^2 - 6 = 3 \to a^2 = 9 \to a = \pm 3$$

Como $a > 0$ la función es continua si $a = 3$.

125 **Demuestra que la función $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 - 3}{2x + 1}$ se anula en el intervalo [1, 3].**
Menciona los resultados teóricos en que te apoyas para hacer tus afirmaciones.

$f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$, luego es continua en $[1, 3]$.

$f(1) = -1 < 0$

$f(3) = \dfrac{15}{7} > 0$

Aplicamos el teorema de Bolzano $\to$ Existe $c \in (1, 3)$, tal que $f(c) = 0$, es decir, la función se anula en algún punto del intervalo $(1, 3)$.

126 **Sea $f(x) = 2 - x + \ln x$ con $x \in (0, +\infty)$. Probar que existe un punto $c \in \left[\frac{1}{e^2}, 1\right]$ tal que $f(c) = 0$.**

(Castilla y León. Septiembre 2008. Prueba B. Problema 2)

$f(x)$ es continua en $(0, +\infty)$, luego es continua en $\left[\frac{1}{e^2}, 1\right]$.

$f\left(\dfrac{1}{e^2}\right) = -\dfrac{1}{e^2} < 0$

$f(1) = 1 > 0$

Aplicamos el teorema de Bolzano → Existe $c \in \left(\frac{1}{e^2}, 1\right)$, tal que $f(c) = 0$,

es decir, la función se anula en algún punto del intervalo $\left(\frac{1}{e^2}, 1\right)$.

127 **Demuestra que existe al menos un número real *x* para el que se verifica $sen\ x = x - 2$.**

(Baleares. Septiembre 2001. Opción B. Cuestión 1)

Consideramos la función $f(x) = sen\ x - x + 2$.
$f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$, luego es continua en [2, 3].
$f(2) = sen\ 2 = 0{,}909 > 0$
$f(3) = sen\ 3 - 1 = -0{,}858 < 0$
Aplicamos el teorema de Bolzano → Existe $c \in (2, 3)$, tal que $f(c) = 0$,
es decir, la función se anula en algún punto del intervalo (2, 3),
por tanto, la ecuación tiene al menos una solución en este intervalo.

128 **Determinar si el polinomio $x^4 - 4x^2 - 1$ tiene alguna raíz real negativa.**

(Extremadura. Junio 2003. Repertorio B. Ejercicio 1)

Consideramos la función $f(x) = x^4 - 4x^2 - 1$.
$f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$, luego es continua en $[-3, -2]$.
$f(-3) = 44 > 0$
$f(-2) = -1 < 0$
Aplicamos el teorema de Bolzano → Existe $c \in (-3, -2)$, tal que $f(c) = 0$,
es decir, la función se anula en algún punto del intervalo $(-3, -2)$,
luego el polinomio tiene alguna raíz real negativa.

129 **Se considera la ecuación $x^3 + x^2 + mx - 6 = 0$. Utilizando el teorema de Bolzano, demuestra:**

a) Si $m > -3$ entonces la ecuación tiene al menos una raíz real menor que 2.
b) Si $m < -3$ entonces la ecuación tiene al menos una raíz real mayor que 2.

(Baleares. Junio 2003. Opción B. Cuestión 3)

a) Consideramos la función $f(x) = x^3 + x^2 + mx - 6$.
$f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$, luego $f(x)$ es continua en [0, 2].
$f(0) = -6 < 0$
$f(2) = 2m + 6 > 0 \rightarrow 2m > -6 \rightarrow m > -3$
Aplicamos el teorema de Bolzano → Existe $c \in (0, 2)$, tal que $f(c) = 0$,
es decir, la función se anula en algún punto del intervalo (0, 2),
por tanto, la ecuación tiene al menos una raíz real menor que 2.

b) Consideramos la función $f(x) = x^3 + x^2 + mx - 6$ continua en $\mathbb{R}$.
$f(2) = 2m + 6 < 0 \rightarrow 2m < -6 \rightarrow m < -3$
Al ser $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \rightarrow$ Existe un valor $b > 2$, tal que $f(x)$ es continua en $[2, b]$ y $f(b) > 0$.
Entonces, aplicando el teorema de Bolzano, tenemos que existe $c \in (2, b)$,
tal que $f(c) = 0$, es decir, la función se anula en algún punto del intervalo $(2, b)$
con $b > 2$, por tanto, la ecuación tiene al menos una raíz real mayor que 2.

130 **Probar que la ecuación $x = \cos x$ tiene solución positiva.**

(Extremadura. Septiembre 2004. Repertorio B. Ejercicio 1)

Consideramos la función $f(x) = x - \cos x$.

$f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$, luego $f(x)$ es continua en $[0, 1]$.

$f(0) = -1 < 0$

$f(1) = 1 - \cos 1 = 0{,}459 > 0$

Aplicamos el teorema de Bolzano $\rightarrow$ Existe $c \in (0, 1)$, tal que $f(c) = 0$, es decir, la función se anula en algún punto del intervalo $(0, 1)$, por tanto, la ecuación tiene al menos una solución positiva.

131 **¿Puede asegurarse, utilizando el teorema de Bolzano, que la función $f(x) = tg\, x$ tiene una raíz en el intervalo $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$? Razona la respuesta.**

(Galicia. Junio 2003. Bloque 3. Pregunta 2)

Consideramos la función $f(x) = tg\, x$.

$f(x)$ no está definida en $x = \frac{\pi}{2}$, por tanto, la función no es continua en $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ y no puede aplicarse el teorema de Bolzano, así que no puede asegurarse que la función tenga una raíz en este intervalo.

132 **Calcular, con un error menor que una décima, una raíz positiva del polinomio $x^3 + x - 1$.**

(Extremadura. Septiembre 2001. Repertorio A. Ejercicio 1)

Consideramos la función $f(x) = x^3 + x - 1$ continua en $\mathbb{R}$.

$f(0) = -1 < 0$

$f(1) = 1 > 0$

Como $f(x)$ es continua en $[0, 1]$ podemos aplicar el teorema de Bolzano $\rightarrow$ Existe $c \in (0, 1)$, tal que $f(c) = 0$.

$f(0{,}5) = -0{,}375 < 0$

Como $f(x)$ es continua en $[0{,}5; 1]$ podemos aplicar el teorema de Bolzano $\rightarrow$ Existe $c \in (0{,}5; 1)$, tal que $f(c) = 0$.

$f(0{,}9) = 0{,}629 > 0$

Como $f(x)$ es continua en $[0{,}5; 0{,}9]$ podemos aplicar el teorema de Bolzano $\rightarrow$ Existe $c \in (0{,}5; 0{,}9)$, tal que $f(c) = 0{,}184$.

$f(0{,}6) = -0{,}184 < 0$

Como $f(x)$ es continua en $[0{,}6; 0{,}9]$ podemos aplicar el teorema de Bolzano $\rightarrow$ Existe $c \in (0{,}6; 0{,}9)$, tal que $f(c) = 0$.

$f(0{,}7) = 0{,}043 > 0$

Como $f(x)$ es continua en $[0{,}6; 0{,}7]$ podemos aplicar el teorema de Bolzano $\rightarrow$ Existe $c \in (0{,}6; 0{,}7)$, tal que $f(c) = 0$.

133 **Demuestra que existe un punto $x = c$ en el que la función $f(x) = x^2 + x \cdot 2^x$ toma el valor 2. Encuéntralo, aproximando su expresión hasta las centésimas.**

Si $f(c) = 2 \rightarrow f(c) - 2 = 0$

Consideramos la función $g(x) = x^2 + x \cdot 2^x - 2$.

$g(x)$ es continua en $\mathbb{R}$, luego $g(x)$ es continua en $[0, 1]$.

$g(0) = -2 < 0$

$g(1) = 1 > 0$

Aplicamos el teorema de Bolzano $\rightarrow$ Existe $c \in (0, 1)$, tal que $g(c) = 0$, es decir, la función se anula en algún punto del intervalo $(0, 1)$, por tanto, $f(c) - 2 = 0 \rightarrow f(c) = 2$.

$g(0{,}5) = -1{,}043 < 0$

$g(0{,}9) = 0{,}489 > 0$

$g(0{,}6) = -0{,}73 < 0$

$g(0{,}8) = 0{,}032 > 0$

$g(0{,}7) = -0{,}372 < 0$

$g(0{,}75) = -0{,}176 < 0$

$g(0{,}79) = -0{,}009 < 0$

Como $g(x)$ es continua en $[0{,}79; 0{,}8]$ podemos aplicar el teorema de Bolzano $\rightarrow$ Existe $c \in (0{,}79; 0{,}8)$, tal que $g(c) = 0$, por tanto, $f(x)$ toma el valor 2 en algún punto del intervalo $(0{,}79; 0{,}8)$.

134 **Dadas las funciones $f(x) = x \text{ sen } x$ y $g(x) = \ln x$, justifica que existe un punto del intervalo $[2, 3]$ donde ambas funciones toman el mismo valor.**

Consideramos la función $h(x) = x \text{ sen } x - \ln x$.

$f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$ y $g(x)$ es continua en $(0, +\infty)$, por tanto, $h(x)$ es continua en $[2, 3]$.

$h(2) = 1{,}125 > 0$

$h(3) = -0{,}675 < 0$

Aplicamos el teorema de Bolzano $\rightarrow$ Existe $c \in (2, 3)$, tal que $h(c) = 0$, es decir, la función se anula en algún punto del intervalo $(2, 3)$, por tanto, $h(c) = f(c) - g(c) = 0 \rightarrow f(c) = g(c)$.

135 **Demuéstrese que las gráficas de las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = \frac{1}{x}$ se cortan en un punto $x > 0$.**

(Castilla y León. Junio 2004. Prueba A. Cuestión 2)

Consideramos la función $h(x) = e^x - \frac{1}{x}$.

$f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$ y $g(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$, por tanto, $h(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$.

$h(0{,}5) = -0{,}351 < 0$

$h(1) = 1{,}718 > 0$

Aplicamos el teorema de Bolzano $\rightarrow$ Existe $c \in (0{,}5; 1)$, tal que $h(c) = 0$, es decir, la función se anula en algún punto del intervalo $(0{,}5; 1)$, por tanto, $h(c) = f(c) - g(c) = 0 \rightarrow f(c) = g(c)$, es decir, las funciones se cortan en un punto de este intervalo.

136 Dada la función $f(x) = x\ sen\left(\frac{\pi}{4}x\right)$, demuestra que existe $\alpha \in (0, 4)$ tal que $f(\alpha) = f(\alpha + 1)$. Menciona los resultados teóricos que utilices.

(Navarra. Junio 2007. Grupo 2. Opción C)

Consideramos la función $g(x) = x\ sen\left(\frac{\pi}{4}x\right) - (x+1)\ sen\left(\frac{\pi}{4}(x+1)\right)$.

$f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$, por tanto, $g(x)$ es continua en $[0, 4]$.

$$g(0) = -\frac{\sqrt{2}}{2} < 0 \qquad g(4) = \frac{5\sqrt{2}}{2} > 0$$

Aplicamos el teorema de Bolzano $\rightarrow$ Existe $\alpha \in (0, 4)$, tal que $g(\alpha) = 0$,
es decir, la función se anula en algún punto del intervalo $(0, 4)$,
por tanto: $g(\alpha) = f(\alpha) - f(\alpha + 1) = 0 \rightarrow f(\alpha) = f(\alpha + 1)$

PREPARA TU SELECTIVIDAD

1 Calcula:

a) $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{2+n}{1+n}\right)^{1-5n}$ b) $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{n^4 + 2n^3 - 3} - \sqrt{n^4 - n}}{n+5}$

(Madrid. Año 2008. Modelo. Opción A. Ejercicio 2)

a) $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{2+n}{1+n}\right)^{1-5n} \rightarrow 1^{\infty}$

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{2+n}{1+n}\right)^{1-5n} = e^{\lim\limits_{n \to +\infty} \left[\left(\frac{2+n}{1+n} - 1\right) \cdot (1-5n)\right]} = e^{\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{(2+n-1-n)(1-5n)}{1+n}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1-5n}{1+n}} = e^{-5} = \frac{1}{e^5}$$

b) $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{n^4 + 2n^3 - 3} - \sqrt{n^4 - n}}{n+5} \rightarrow \infty - \infty$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{n^4 + 2n^3 - 3} - \sqrt{n^4 - n}}{n+5} =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{n^4 + 2n^3 - 3} - \sqrt{n^4 - n}\right)\left(\sqrt{n^4 + 2n^3 - 3} + \sqrt{n^4 - n}\right)}{(n+5)\left(\sqrt{n^4 + 2n^3 - 3} + \sqrt{n^4 - n}\right)} =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{n^4 + 2n^3 - 3 - n^4 + n}{(n+5)\left(\sqrt{n^4 + 2n^3 - 3} + \sqrt{n^4 - n}\right)} =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{2n^3 + n - 3}{(n+5)\left(\sqrt{n^4 + 2n^3 - 3} + \sqrt{n^4 - n}\right)} = 1$$

2 Calcule:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2-5n+4}-n\right)$ b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2^n-8}{2^{n+1}}$

(Galicia. Septiembre 2005. Bloque 4. Pregunta 1)

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2-5n+4}-n\right)\to\infty-\infty$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2-5n+4}+n\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2-5n+4}+n\right)\left(\sqrt{n^2-5n+4}+n\right)}{\sqrt{n^2-5n+4}+n}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2-5n+4-n^2}{\sqrt{n^2-5n+4}+n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{-5n+4}{\sqrt{n^2-5n+4}+n}=-\frac{5}{2}$$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2^n-8}{2^{n+1}}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2^n}{2^{n+1}}-\dfrac{2^3}{2^{n+1}}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{2^2}{2^n}\right)=\dfrac{1}{2}$

3 Determina el valor de *a* para el cual:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(2x-\sqrt{4x^2+ax+1}\right)=1$$

(La Rioja. Junio 2000. Propuesta A. Ejercicio 4)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(2x-\sqrt{4x^2+ax+1}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(2x-\sqrt{4x^2+ax+1}\right)\left(2x+\sqrt{4x^2+ax+1}\right)}{2x+\sqrt{4x^2+ax+1}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2-4x^2-ax-1}{2x+\sqrt{4x^2+ax+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-ax-1}{2x+\sqrt{4x^2+ax+1}}=$$

$$=-\frac{a}{4}=1\to a=-4$$

4 Determina el valor de *a* para el cual:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+3}{x}\right)^{ax}=e$$

(La Rioja. Junio 2001. Propuesta A. Ejercicio 4)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+3}{x}\right)^{ax}\to1^{\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+3}{x}\right)^{ax}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{x+3}{x}-1\right)\cdot ax\right]}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x+3-x)\cdot ax}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3ax}{x}}=$$

$$=e^{3a}=e\to3a=1\to a=\frac{1}{3}$$

5 Estudia si la función:

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{si } x\le -1 \\ 1-x^2 & \text{si } -1<x\le 2 \\ -3 & \text{si } 2<x \end{cases}$$

es continua en los puntos $x=-1$ y $x=2$.

(Castilla-La Mancha. Junio 2005. Bloque 1. Pregunta A)

- $f(-1)=-1$

  $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = -1 \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = 0 \end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim\limits_{x\to -1} f(x) \to f(x) \text{ no es continua en } x=-1.$$

  La función tiene una discontinuidad de salto finito en el punto $x=-1$.

- $f(2)=-3$

  $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -3 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -3 \end{array}\right\} \to \lim\limits_{x\to 2} f(x) = -3 = f(2) \to f(x) \text{ es continua en } x=2.$$

6 Determinar los valores de a y b para que la función siguiente sea continua en todos los puntos.

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+b & \text{si } x<0 \\ x-a & \text{si } 0\le x<1 \\ \dfrac{a}{x}+b & \text{si } 1\le x \end{cases}$$

(Canarias. Junio 2004. Opción A. Cuestión 1)

$f(x)$ está formada por dos funciones polinómicas, por tanto, continuas, y una función racional que no está definida en $x=0$, pero que es continua en el intervalo $(1,+\infty)$. Así la función es continua en todos los puntos si lo es en los puntos en los que cambia su expresión algebraica.

- La función es continua en $x=0$ si: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$

  $f(0)=-a$ y existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ si $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

  $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = b \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -a \end{array}\right\} \to b=-a$$

- La función es continua en $x=1$ si: $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$

  $f(1)=a+b$ y existe $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ si $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$.

  $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 1-a \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = a+b \end{array}\right\} \to 1-a=a+b$$

  Entonces: $$\left.\begin{array}{r} b=-a \\ 2a+b=1 \end{array}\right\} \to \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}$$

7 **Busca algún criterio que te permita afirmar que la ecuación:**

$$x^3 + x^2 - 7x + 1 = 0$$

tiene al menos una solución en el intervalo (0, 1). ¿Qué te dice ese criterio para el intervalo (−1, 0)? Razona la respuesta.

(La Rioja. Septiembre 2007. Propuesta A. Ejercicio 3)

Consideramos la función $f(x) = x^3 + x^2 - 7x + 1$.

$f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$, luego $f(x)$ es continua en $[0, 1]$.

$f(0) = 1 > 0$

$f(1) = -4 < 0$

Aplicamos el teorema de Bolzano $\rightarrow$ Existe $c \in (0, 1)$, tal que $f(c) = 0$, es decir, la función se anula en algún punto del intervalo (0, 1), luego la ecuación tiene alguna solución en este intervalo.

$f(-1) = 8 > 0 \rightarrow$ No podemos aplicar el teorema de Bolzano en $(-1, 0)$ porque $f(0)$ y $f(-1)$ no tienen signos distintos.

8 **Demostrar que la ecuación $x^3 + x - 5 = 0$ tiene al menos una solución en el intervalo (1, 2).**

(Castilla y León. Junio 2008. Prueba B. Cuestión 3)

Consideramos la función $f(x) = x^3 + x - 5$.

$f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$, luego $f(x)$ es continua en $[1, 2]$.

$f(1) = -3 < 0$

$f(2) = 5 > 0$

Aplicamos el teorema de Bolzano $\rightarrow$ Existe $c \in (1, 2)$, tal que $f(c) = 0$, es decir, la función se anula en algún punto del intervalo (1, 2), por tanto, la ecuación tiene al menos una solución en este intervalo.