# 2 Determinantes

**LITERATURA Y MATEMÁTICAS**

## *El tío Petros y la conjetura de Goldbach*

En nuestra primera noche juntos, mientras cenábamos en el comedor de la universidad para conocernos mejor, le dije con naturalidad [a mi compañero de habitación]:

–Puesto que eres un genio de las matemáticas, Sammy, estoy seguro de que podrás probar con facilidad que todo número par mayor que 2 es la suma de dos primos.

Se echó a reír.

–Si pudiera probar eso, tío, no estaría aquí cenando contigo; ya sería catedrático, quizás incluso tendría la medalla Fields, el Nobel de las matemáticas.

Antes de que terminara de hablar, en un instante de revelación, adiviné la horrible verdad. Sammy la confirmó con sus siguientes palabras:

–La afirmación que acabas de hacer es la conjetura de Goldbach, ¡uno de los problemas irresueltos más difíciles de todos los campos de las matemáticas!

Mis reacciones pasaron por las fases denominadas (si no recuerdo mal lo que aprendí en Psicología Elemental en la universidad) «las cuatro etapas del duelo»: negación, ira, depresión y aceptación.

De ellas, la primera fue la que duró menos.

–No… ¡no es posible! […]

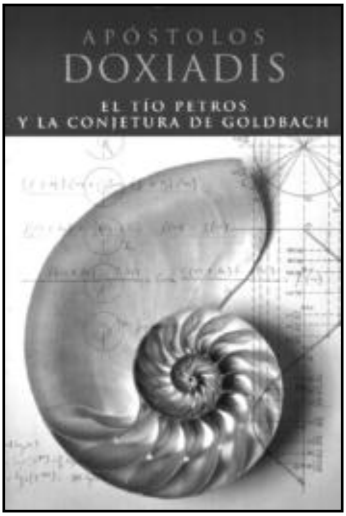
–¿Qué quieres decir con que no es posible? –preguntó–. ¡Lo es! La conjetura de Goldbach, que así se llama la hipótesis, pues nunca ha sido demostrada, es que todos los números pares son la suma de dos primos. Lo afirmó por primera vez un matemático llamado Goldbach en una carta dirigida a Euler. Aunque se ha demostrado que es verdad incluso en números primos altísimos, nadie ha conseguido formular una prueba general. […]

Mi nuevo compañero de cuarto, totalmente estupefacto ante el hecho de que una hipótesis de teoría de números pudiera provocar semejante arrebato de pasión mediterránea, me rogó que le contara qué me pasaba; pero yo no estaba en condiciones de dar explicaciones..

**Apóstolos Doxiadis**

# El tío Petros y la conjetura de Goldbach

## Apóstolos Doxiadis




Petros Papachristos vivía en una casa a las afueras de Atenas, retirado del mundo, sin mujer ni hijos, ocupado sólo en cuidar el jardín y jugar al ajedrez. Había sido un matemático notable, aunque para sus dos hermanos menores, que mantenían con su esfuerzo la empresa heredada del padre, era el «fiasco de la familia». En cambio, uno de sus sobrinos, el narrador de la historia contenida en esta novela, lo admiraba por su pasada reputación. Cuando acabó el penúltimo curso del bachillerato, un día le preguntó si también él podría llegar a ser un buen matemático. El tío Petros le contestó:

–No quiero verte haciendo unos estudios que te conducirán al fracaso y la desdicha. En consecuencia, te pido que me hagas la firme promesa de que no te convertirás en matemático a menos que descubras que tienes un talento extraordinario. ¿Aceptas?

El joven acepta el desafío que consiste en resolver a lo largo del verano sin consultar los libros el siguiente problema: demostrar que todo entero par mayor que 2 es igual a la suma de dos primos.

Después de llenar durante los meses estivales cientos de cuartillas que acabaron en la papelera, el joven no logró demostrar esa sencilla conjetura. Admitió su incapacidad y, cumpliendo su promesa, se matriculó en la licenciatura de Económicas, en una de las mejores universidades norteamericanas. En su tercer año, le tocó compartir habitación con Sammy Epstein, un muchacho famoso entre los estudiantes del primer ciclo porque era un prodigio de las matemáticas. Su primer encuentro con él es el que se describe en el texto extraído de la novela.

Cuando el joven descubre la «broma» que le ha gastado su tío, decide vengarse y ésa es la trama de la segunda parte de esta maravillosa novela, en la que se narra muy bien la lucha de una persona por construir matemáticas: sus tanteos, sus desánimos, sus éxitos y sus fracasos.

**Halla los números primos que cumplen la conjetura de Goldbach para los números pares 4 y 8 y forma una matriz de orden 2 con ellos. A continuación, calcula el valor de la expresión $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ para esa matriz, para su traspuesta y para la que resulta de sumarle a la primera columna la segunda. ¿Qué observas? ¿Por qué crees que ocurre esto?**

Respuesta abierta. Por ejemplo: $4 = 1 + 3$ $\quad 8 = 1 + 7$

La matriz que forman estos números primos es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$

Así: $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 7 - 3 = 4$

La matriz traspuesta es: $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$

Entonces: $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 7 - 3 = 4$

La matriz que resulta de sumarle a la primera columna la segunda es: $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$

Así: $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 28 - 24 = 4$

## ANTES DE COMENZAR… RECUERDA

001 **Comprueba si existen combinaciones lineales entre las filas de estas matrices.**

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

a) Para comprobarlo estudiamos si: $F_1 = k_1F_2 + k_2F_3$

Consideramos los elementos de las columnas 1 y 3 ya que los de la segunda son todos nulos, y por tanto, verifican cualquier combinación.

$$\left.\begin{array}{r} -1 = 5k_1 + 3k_2 \\ 2 = -2k_1 - 2k_2 \end{array}\right\} \to k_1 = 1 \quad k_2 = -2$$

Entonces: $F_1 = F_2 - 2F_3 \to$ existe una combinación lineal entre las filas de esta matriz.

b) Para comprobarlo estudiamos si: $F_1 = k_1F_2 + k_2F_3 + k_3F_4$

Tomamos los elementos de las tres primeras columnas:

$$\left.\begin{array}{r} -2 = -3k_1 - k_2 - 4k_3 \\ 0 = 2k_1 + 2k_2 \\ 1 = k_1 + 2k_3 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} -2 = -3k_1 - k_2 - 4k_3 \\ 0 = 2k_1 + 2k_2 \\ 0 = -k_1 - k_2 \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} k_1 = -k_2 \\ k_3 = -\dfrac{1}{2}k_1 + \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

Si $k_1 = 1 \to k_2 = -1 \to k_3 = 0 \to F_1 = F_2 - F_3$

Esta combinación lineal entre las filas también se verifica con los elementos de la última columna, por tanto, existe una combinación entre las filas de esta matriz.

002 **Calcula la matriz inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, y comprueba que se cumple que $AA^{-1} = I$ y que $A^{-1}A = I$.**

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \to A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## ACTIVIDADES

001 Calcula el valor de los determinantes de estas matrices.

a) $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 7 & 12 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

a) $|A| = -24 - 7 = -31$

b) $|A| = 30 - 6 - 20 - 4 = 0$

002 Calcula $x$ para que estos determinantes valgan cero.

a) $\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 8 & x^2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & x & 2 \\ -1 & 1 & x \end{vmatrix}$

a) $-2x^2 + 8 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$

b) $3x^2 - 2 - 2x - 6 = 0 \rightarrow 3x^2 - 2x - 8 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -\dfrac{4}{3} \end{cases}$

003 Halla el determinante de la matriz traspuesta de estas matrices.

a) $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

a) $|A^t| = |A| = -10 + 4 = -6$

b) $|A^t| = |A| = 8 + 24 - 4 = 16$

004 Si $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -1$, calcula:

a) $\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} c & a \\ d & b \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1$

b) $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -1$

c) $\begin{vmatrix} c & a \\ d & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1$

005 Calcula el determinante de $A$ y, a partir de él, halla $|B|$.

$$A=\begin{pmatrix}-2 & -1 & 0\\ -4 & 5 & 7\\ 8 & 3 & 6\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 8 & 10 & 14\\ -8 & 3 & 6\end{pmatrix}$$

$$|A| = -60 - 56 + 42 - 24 = -98$$

$$|B| = \begin{vmatrix}2 & -1 & 0\\ 8 & 10 & 14\\ -8 & 3 & 6\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}-2 & -1 & 0\\ -8 & 10 & 14\\ 8 & 3 & 6\end{vmatrix} = -2\cdot\begin{vmatrix}-2 & -1 & 0\\ -4 & 5 & 7\\ 8 & 3 & 6\end{vmatrix} = -2\cdot(-98) = 196$$

006 Si $\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix} = -2$, calcula:

a) $\begin{vmatrix}a & -2b\\ c & -2d\end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix}-b & a\\ -d & c\end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix}0 & 3b\\ 0 & 3d\end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix}a & -2b\\ c & -2d\end{vmatrix} = -2\cdot\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix} = 4$

c) $\begin{vmatrix}0 & 3b\\ 0 & 3d\end{vmatrix} = 0$

b) $\begin{vmatrix}-b & a\\ -d & c\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}b & a\\ d & c\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix} = -2$

007 Si $\begin{vmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{vmatrix} = 3$, calcula $\begin{vmatrix}a & b+2a-c & c\\ d & e+2d-f & f\\ g & h+2g-i & i\end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix}a & b+2a-c & c\\ d & e+2d-f & f\\ g & h+2g-i & i\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}a & b+2a & c\\ d & e+2d & f\\ g & h+2g & i\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{vmatrix} = 3$$

008 Halla estos determinantes.

a) $\begin{vmatrix}a & a\\ b & b\end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix}a & -2a\\ b & -2b\end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix}-a & 3a\\ -b & 3b\end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix}a & a\\ b & b\end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix}a & -2a\\ b & -2b\end{vmatrix} = 0$ c) $\begin{vmatrix}-a & 3a\\ -b & 3b\end{vmatrix} = 0$

009 Calcula estos determinantes.

a) $\begin{vmatrix}a & d & a+d\\ b & e & b+e\\ c & f & c+f\end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix}a & 7 & -a\\ b & 5 & -b\\ c & 1 & -c\end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix}a & d & a+d\\ b & e & b+e\\ c & f & c+f\end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix}a & 7 & -a\\ b & 5 & -b\\ c & 1 & -c\end{vmatrix} = 0$

010 **Comprueba que las dos matrices cumplen que $|AB| = |A| \cdot |B|$.**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow |AB| = 36$$

$$\left.\begin{array}{l} |A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \\ |B| = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -12 \end{array}\right\} \rightarrow |A| \cdot |B| = 36$$

011 **Determina el menor complementario de $a_{21}$.**

a) $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 7 & 12 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

a) $\alpha_{21} = 1$

b) $\alpha_{21} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4 - 6 = -10$

012 **Halla los elementos cuyo adjunto es negativo.**

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) $A_{12} = -1, A_{21} = -3$ y $A_{22} = -1$

b) $A_{11} = -1, A_{21} = -1, A_{23} = -2, A_{32} = -2$ y $A_{33} = -2$

013 **Resuelve estos determinantes, aplicando la definición y desarrollando por alguna de sus columnas.**

a) $\begin{vmatrix} 0 & -2 & 7 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -2 & 5 & 7 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 7 & 12 \end{vmatrix}$

a) Utilizando la definición: $|A| = -21 - 4 = -25$

Desarrollando por la primera columna: $|A| = (-1)(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -2 & 7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4 - 21 = -25$

b) Utilizando la definición: $|A| = 15 + 7 - 6 + 10 = 26$

Desarrollando por la segunda columna:

$$|A| = 5(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} -2 & 7 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 25 + 1 = 26$$

c) Utilizando la definición: $|A| = -24 - 7 = -31$

Desarrollando por la primera columna: $|A| = -2 \cdot 12 + 7 \cdot (-1)^{2+1} \cdot 1 = -31$

014 Resuelve estos determinantes.

a) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

a) $$\begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - 2 \cdot (-13) = 41$$

b) $$\begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \cdot 4 = -8$$

015 Resuelve los siguientes determinantes de orden 4.

a) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 & -1 \\ -3 & -3 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

a) $$\begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 & -1 \\ -3 & -3 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ -3 & -3 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & 9 & -2 \\ -1 & -4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -3 & 2 \\ -2 & -4 & 9 \\ -1 & -4 & 3 \end{vmatrix} = -55$$

b) $$\begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -(-3) = 3$$

016 Calcula $x$ para que se cumpla que el resultado de este determinante sea $-20$.

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & x & x \end{vmatrix} = -20$$

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & x & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & 2 & -2 \\ x-1 & x+3 & -x & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 2 \\ x-1 & x+3 & -x \end{vmatrix} = 16x + 44$$

$16x + 44 = -20 \rightarrow x = -4$

017 Halla todos los menores de esta matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & -1 \\ -3 & -3 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Menores de orden 1: 0, 2, −3, −1, −3, −3, 2, 0, −2, 0, 3, −2, −1, −2, 0 y −1

Menores de orden 2: $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} = 6, \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -9, \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -3,$

$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -5, \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -3, \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2, \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -6, \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -5,$

$\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 6, \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -9, \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 6, \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -4, \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 4,$

$\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 3, \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 6, \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -4, \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -3,$

$\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 4, \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -6, \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -2, \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6, \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4,$

$\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 9, \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 3, \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2, \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 3, \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 4,$

$\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 3, \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2, \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 2, \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -3, \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -1,$

$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -6, \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -4$ y $\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 3$

Menores de orden 3: $\begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -3 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 28, \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -3 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -6,$

$\begin{vmatrix} 0 & -3 & -1 \\ -3 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -5, \begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 1, \begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -3 & -3 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -13,$

$\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -3 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -9, \begin{vmatrix} 0 & -3 & -1 \\ -3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 7, \begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -3 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 3,$

$\begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -18, \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -4, \begin{vmatrix} 0 & -3 & -1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -9,$

$\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -24, \begin{vmatrix} -3 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -1, \begin{vmatrix} -3 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 12,$

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 9 \text{ y } \begin{vmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 17$$

Menor de orden 4:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 & -1 \\ -3 & -3 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 & 1 \\ -3 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 15$$

018 **Calcula el rango de estas matrices.**

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 6 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \\ 0 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -12 \neq 0 \rightarrow$ El rango de la matriz es 2.

b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow$ El rango de la matriz es 2.

019 **Calcula el rango de estas matrices.**

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & -1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & -3 & -1 & 6 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -5 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \rightarrow$ El rango de la matriz es 3.

b) $\begin{vmatrix} -5 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \rightarrow$ El rango de la matriz es 3.

020 **Calcula $x$ para que el rango de estas matrices sea 3.**

a) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & -1 \\ -3 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & x & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & x & 2 & -3 \end{pmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -3 & -3 & 4 \\ 0 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$ Para que el rango de la matriz sea 3, el otro menor de orden 3 tiene que ser distinto de cero.

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -3 & -3 & 2 \\ 0 & -4 & x \end{vmatrix} = 6x - 36 \neq 0 \rightarrow x \neq 6$$

b) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 32 \neq 0 \rightarrow$ El rango de la matriz es 3 para cualquier valor de $x$.

021 **Determina la matriz de los adjuntos de las siguientes matrices.**

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) $\text{Adj}\,(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ b) $\text{Adj}\,(B) = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\text{Adj}\,(C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

022 **Comprueba que se cumple que $A \cdot \text{Adj}\,(A)^t = |A| \cdot I$, siendo $I$ la matriz identidad de orden 3 y $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.**

$|A| = -4$

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & -3 \\ 12 & 9 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = -4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

023 **Calcula la matriz inversa de estas matrices.**

a) $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -3 & -1 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

a) $$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{Adj}\,(A)^t = \frac{1}{-4} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & -3 \\ 12 & 9 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ -3 & -\frac{9}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

b) $$B^{-1} = \frac{1}{|B|}\text{Adj}\,(B)^t = \frac{1}{22} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -5 & 1 & 2 \\ 12 & -2 & -4 & -8 \\ 11 & -11 & -11 & 0 \\ -21 & 9 & 7 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{22} & -\frac{5}{22} & \frac{1}{22} & \frac{1}{11} \\ \frac{6}{11} & -\frac{1}{11} & -\frac{2}{11} & -\frac{4}{11} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{21}{22} & \frac{9}{22} & \frac{7}{22} & -\frac{4}{11} \end{pmatrix}$$

024 **Calcula $x$ para que estas matrices tengan inversa. Determina la inversa cuando exista.**

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 3 & x+1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & x & x \end{pmatrix}$

a) $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 3 & x+1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4x + 8$

La matriz $A$ tiene inversa si $|A| \neq 0 \rightarrow x \neq -2$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,\text{Adj}\,(A)^t = \frac{1}{4x+8} \cdot \begin{pmatrix} x & 2 & 2x+2 \\ -4 & 4 & -4 \\ -x-4 & 2 & 2x+2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{x}{4x+8} & \frac{1}{2x+4} & \frac{x+1}{2x+4} \\ -\frac{1}{x+2} & \frac{1}{x+2} & -\frac{1}{x+2} \\ -\frac{x+4}{4x+8} & \frac{1}{2x+4} & \frac{x+1}{2x+4} \end{pmatrix} \text{ si } x \neq -2$$

b) $|B| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & x & x \end{vmatrix} = -5x - 5$

La matriz $B$ tiene inversa si $|B| \neq 0 \rightarrow x \neq -1$

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|}\,\text{Adj}\,(B)^t = \frac{1}{-5x-5} \cdot \begin{pmatrix} -x & -x & -1 \\ -2x+5 & 3x+10 & -7 \\ 2x & -3x-5 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{x}{5x+5} & \frac{x}{5x+5} & \frac{1}{5x+5} \\ \frac{2x-5}{5x+5} & -\frac{3x+10}{5x+5} & \frac{7}{5x+5} \\ -\frac{2x}{5x+5} & \frac{3x+5}{5x+5} & -\frac{2}{5x+5} \end{pmatrix} \text{ si } x \neq -1$$

025 **Calcula los siguientes determinantes.**

a) $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} a & 2 \\ b & -3 \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} a-4 & 2 \\ 6 & a-3 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 12 & -4 \\ -9 & 3 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & x \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} a+1 & a-1 \\ 1-a & a+1 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 1$ c) $\begin{vmatrix} a & 2 \\ b & -3 \end{vmatrix} = -3a - 2b$ e) $\begin{vmatrix} a-4 & 2 \\ 6 & a-3 \end{vmatrix} = a^2 - 7a$

b) $\begin{vmatrix} 12 & -4 \\ -9 & 3 \end{vmatrix} = 0$ d) $\begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & x \end{vmatrix} = 0$ f) $\begin{vmatrix} a+1 & a-1 \\ 1-a & a+1 \end{vmatrix} = 2a^2 + 2$

026 Calcula *a, b, c, d…* para que se cumplan las igualdades.

a) $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -3 & a \end{vmatrix} = 26$

b) $\begin{vmatrix} b & 4 \\ 3b & -3 \end{vmatrix} = 45$

c) $\begin{vmatrix} c & 3c-1 \\ 4 & c \end{vmatrix} = 32$

d) $\begin{vmatrix} \dfrac{1}{d} & -\dfrac{2}{d} \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 7$

e) $\begin{vmatrix} \sqrt{e} & 2 \\ 2 & \sqrt{e-6} \end{vmatrix} = 0$

f) $\begin{vmatrix} \operatorname{sen} f & \cos f \\ \cos f & -\operatorname{sen} f \end{vmatrix} = 0$

a) $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -3 & a \end{vmatrix} = 4a + 6 = 26 \rightarrow a = 5$

b) $\begin{vmatrix} b & 4 \\ 3b & -3 \end{vmatrix} = -15b = 45 \rightarrow b = -3$

c) $\begin{vmatrix} c & 3c-1 \\ 4 & c \end{vmatrix} = c^2 - 12c + 4 = 32 \rightarrow \begin{cases} c = -2 \\ c = 14 \end{cases}$

d) $\begin{vmatrix} \dfrac{1}{d} & -\dfrac{2}{d} \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = \dfrac{14}{d} = 7 \rightarrow d = 2$

e) $\begin{vmatrix} \sqrt{e} & 2 \\ 2 & \sqrt{e-6} \end{vmatrix} = \sqrt{e^2 - 6e} - 4 = 0 \rightarrow e = 8$

f) $\begin{vmatrix} \operatorname{sen} f & \cos f \\ \cos f & -\operatorname{sen} f \end{vmatrix} = -\operatorname{sen}^2 f - \cos^2 f = -1 \neq 0 \rightarrow$ No tiene solución.

027 Obtén el valor de los siguientes determinantes.

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 5 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} -1 & 4 & 6 \\ 2 & -3 & 1 \\ -8 & 17 & 9 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} a & 2 & 4 \\ 0 & b & 3 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} x-1 & 2 & x \\ x+1 & 4 & 3 \\ -2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} -a & b & c \\ -b & c & a \\ -c & a & b \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 11$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 11$

c) $\begin{vmatrix} -1 & 4 & 6 \\ 2 & -3 & 1 \\ -8 & 17 & 9 \end{vmatrix} = 0$

d) $\begin{vmatrix} a & 2 & 4 \\ 0 & b & 3 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc$

e) $\begin{vmatrix} x-1 & 2 & x \\ x+1 & 4 & 3 \\ -2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 4x$

f) $\begin{vmatrix} -a & b & c \\ -b & c & a \\ -c & a & b \end{vmatrix} = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

028 Halla los valores reales de $a$, $b$, $c$ y $d$ para que se cumplan las igualdades.

a) $\begin{vmatrix} 3 & a & -1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & a & -2 \end{vmatrix} = 2$

c) $\begin{vmatrix} c-1 & c+2 & 0 \\ c & -1 & 4 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = -197$

b) $\begin{vmatrix} -2 & b & -1 \\ b & 1 & b \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -5$

d) $\begin{vmatrix} d & d^2 & d-1 \\ 2 & -1 & 0 \\ d & 0 & d \end{vmatrix} = -18$

a) $\begin{vmatrix} 3 & a & -1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & a & -2 \end{vmatrix} = -4 + 3a = 2 \rightarrow a = 2$

b) $\begin{vmatrix} -2 & b & -1 \\ b & 1 & b \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = b^2 + 5b - 1 = -5 \rightarrow \begin{cases} b = -1 \\ b = -4 \end{cases}$

c) $\begin{vmatrix} c-1 & c+2 & 0 \\ c & -1 & 4 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = c^2 + 23c + 3 = -197 \rightarrow$ No tiene solución.

d) $\begin{vmatrix} d & d^2 & d-1 \\ 2 & -1 & 0 \\ d & 0 & d \end{vmatrix} = -d - 2d^3 = -18 \rightarrow d = 2$

029 Calcula el valor del determinante de la matriz $A + B$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

*(Navarra. Septiembre 2005. Grupo 1. Opción B)*

$$A + B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow |A + B| = 1$$

030 Calcula el valor del determinante de la matriz $AB$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 13 & -1 \\ -1 & 7 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 9 \\ 1 & -1 & 17 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

*(Navarra. Septiembre 2004. Grupo 1. Opción B)*

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 34 \\ 11 & -16 & 231 \\ 9 & -4 & 108 \end{pmatrix} \rightarrow |AB| = 10$$

031 ¿Qué relación deben guardar $m$ y $n$ para que el determinante $\begin{vmatrix} m & -1 & 4 \\ n & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$ sea nulo?

$$\begin{vmatrix} m & -1 & 4 \\ n & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 20n - 45 - 15m = 0 \rightarrow 4n = 9 + 3m$$

032 Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Comprueba si se verifican las siguientes igualdades. Si alguna se verifica, decide si se trata de alguna propiedad general de los determinantes.

a) $|2A| = 2|A|$

b) $|A + B| = |A| + |B|$

c) $|C - 2B| = |C| - 2|B|$

d) $|AB| = |A| \cdot |B|$

a) $|2A| = \begin{vmatrix} 6 & 10 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 44 \qquad 2|A| = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 11 = 22$

La igualdad no se cumple.

b) $|A + B| = \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -15 \qquad |A| + |B| = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 11 - 14 = -3$

La igualdad no se cumple.

c) $|C - 2B| = \begin{vmatrix} 10 & -11 \\ -10 & 1 \end{vmatrix} = -100 \qquad |C| - 2|B| = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} =$

$= 6 - 2(-14) = 34$

La igualdad no se cumple.

d) $|AB| = \begin{vmatrix} 9 & 17 \\ 8 & -2 \end{vmatrix} = -154 \qquad |A| \cdot |B| = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 11 \cdot (-14) = -154$

La igualdad se cumple porque es una de las propiedades de los determinantes.

033 Observa que si $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$, se cumple que $|A + B| = |A| + |B|$.

¿Es siempre cierto para cualesquiera dos matrices cuadradas de la misma dimensión? En caso afirmativo, justifícalo y, en caso negativo, facilita un contraejemplo.

$$|A + B| = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 13 & 3 \end{vmatrix} = 5$$

$$|A| + |B| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 3 = 5$$

La igualdad se cumple en este caso pero no siempre, el apartado b) del ejercicio anterior es un contraejemplo.

034 Calcula el valor del determinante $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ -2 & 8 & 0 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix}$.

Comprueba que si realizamos las siguientes operaciones, su valor no varía.

a) $F_2 + 2F_3$ b) $C_1 - 3C_3$ c) $F_3 - F_2 + F_1$ d) $C_2 - 3C_1 + 2C_3$

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ -2 & 8 & 0 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 34$$

a) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 8 & 2 & 4 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 34$

c) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ -2 & 8 & 0 \\ 10 & -6 & 3 \end{vmatrix} = 34$

b) $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 1 \\ -2 & 8 & 0 \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 34$

d) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 14 & 0 \\ 5 & -14 & 2 \end{vmatrix} = 34$

035 Calcula cada uno de estos determinantes para comprobar que:

$$\begin{vmatrix} a+1 & 3 & 0 \\ b+2 & 1 & 4 \\ 3+c & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 3 & 0 \\ b & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ c & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a+1 & 3 & 0 \\ b+2 & 1 & 4 \\ 3+c & 2 & -1 \end{vmatrix} = -a - 1 + 36 + 12c - 8a - 8 + 3b + 6 = 33 - 9a + 3b + 12c$$

$$\begin{vmatrix} a & 3 & 0 \\ b & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ c & 2 & -1 \end{vmatrix} = (36 - 9a + 3b) + (12c - 3) = 33 - 9a + 3b + 12c$$

036 Si $M$ es una matriz cuadrada y $|M| = 6$, ¿qué puedes decir del determinante de $M^3$? ¿Y del determinante de $2M$?

$|M^3| = |M| \cdot |M| \cdot |M| = |M|^3 = 6^3 = 216$

Si $n$ es el orden de la matriz cuadrada $M$ entonces: $|2M| = 2^n|M| = 2^n \cdot 6 = 2^{n+1} \cdot 3$

037 ¿Qué propiedades de los determinantes se han empleado en cada una de las igualdades siguientes?

a) $\begin{vmatrix} a+b & 3a \\ c+d & 3c \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} a+b & a \\ c+d & c \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 31 & 23 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 342 & 513 & 214 \\ 34 & 51 & 21 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 4 & -5 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 3 & -5 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 3 & -5 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

a) Propiedad 3 — Propiedad 5 — Propiedad 2
b) Propiedad 5 ($F_1 - 10F_2$)
c) Propiedad 5 ($F_1 - 10F_2$; $F_2 - 10F_3$)
d) Propiedad 9 — Propiedad 6

**038** **Demuestra, sin calcular el valor de los determinantes, que el primero es múltiplo de 6 y el segundo de 5.**

**a)** $\begin{vmatrix} 2 & 9 & 21 \\ 5 & 2 & -3 \\ 6 & 8 & -12 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ 4 & 21 & 2 \\ 11 & 4 & 3 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 2 & 9 & 21 \\ 5 & 2 & -3 \\ 6 & 8 & -12 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 9 & 7 \\ 5 & 2 & -1 \\ 6 & 8 & -4 \end{vmatrix} = 6 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 9 & 7 \\ 5 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ 4 & 21 & 2 \\ 11 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 7 & -1 \\ 25 & 21 & 2 \\ 15 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 7 & -1 \\ 5 & 21 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}$

**039** **Sabiendo que** $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5$**, determina sin desarrollarlos el valor de los siguientes determinantes:**

**a)** $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & -6 & -4 \\ 6 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \\ 4 & -4 & 1 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 8 & 1 & 4 \\ -5 & -3 & -4 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} 6 & 4 & 1 \\ 4 & -4 & -3 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & -6 & -4 \\ 6 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -4 \\ 6 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6 \cdot 5 = 30$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \\ 4 & -4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5$

c) $\begin{vmatrix} 8 & 1 & 4 \\ -5 & -3 & -4 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5$

d) $\begin{vmatrix} 6 & 4 & 1 \\ 4 & -4 & -3 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 6 & 1 & 4 \\ 4 & -3 & -4 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -4 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \cdot 5 = -10$

040 Siendo $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 8$, determina sin desarrollar:

a) $\begin{vmatrix} 2a & 3b \\ 2c & 3d \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} a-3b & b \\ c-3d & d \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} c & d \\ a+2c & b+2d \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 2a & 3b \\ 2c & 3d \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 6 \cdot 8 = 48$

c) $\begin{vmatrix} a-3b & b \\ c-3d & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 8$

b) $\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -8$

d) $\begin{vmatrix} c & d \\ a+2c & b+2d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -8$

041 Conocido que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 5 & 0 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$, calcula el valor del siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 5a & -5b & 5c \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

*(Canarias. Junio 2007. Opción A. Cuestión 3)*

$$\begin{vmatrix} 5a & -5b & 5c \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} a & -b & c \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -5 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b & c \\ 5 & 0 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

042 Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 6$, determina sin desarrollar el valor de los siguientes determinantes.

a) $\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ d/3 & e/3 & f/3 \\ g & h & i \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 2b & c+3a & a/5 \\ 2e & f+3d & d/5 \\ 2h & i+3g & g/5 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a+d & b+e & c+f \\ a+d+g & b+e+h & c+f+i \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ \frac{d}{3} & \frac{e}{3} & \frac{f}{3} \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ \frac{d}{3} & \frac{e}{3} & \frac{f}{3} \\ g & h & i \end{vmatrix} = \frac{2}{3} \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \frac{2}{3} \cdot 6 = 4$

b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a+d & b+e & c+f \\ a+d+g & b+e+h & c+f+i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ a+d+g & b+e+h & c+f+i \end{vmatrix} =$

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 6$$

c) $\begin{vmatrix} 2b & c+3a & \frac{a}{5} \\ 2e & f+3d & \frac{d}{5} \\ 2h & i+3g & \frac{g}{5} \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} b & c+3a & \frac{a}{5} \\ e & f+3d & \frac{d}{5} \\ h & i+3g & \frac{g}{5} \end{vmatrix} = \frac{2}{5}\cdot\begin{vmatrix} b & c+3a & a \\ e & f+3d & d \\ h & i+3g & g \end{vmatrix} = \frac{2}{5}\cdot\begin{vmatrix} b & c & a \\ e & f & d \\ h & i & g \end{vmatrix} =$

$$= -\frac{2}{5}\cdot\begin{vmatrix} b & a & c \\ e & d & f \\ h & g & i \end{vmatrix} = \frac{2}{5}\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \frac{2}{5}\cdot 6 = \frac{12}{5}$$

043 **Justifica sin desarrollar que los siguientes determinantes son nulos.**

a) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -6 \\ 5 & 4 & -10 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 8 & 6 & 7 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 8 & 5 & 9 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 9 & 14 & 3 \end{vmatrix}$

a) El determinante es nulo porque: $C_3 = -2C_1$

b) El determinante es nulo porque: $F_3 = F_1 + F_2$

c) El determinante es nulo porque:

$$C_3 = \frac{1}{2}C_1 + C_2 \rightarrow \begin{vmatrix} 8 & 5 & 9 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

d) El determinante es nulo porque:

$$F_3 = 3F_2 - 2F_1 \rightarrow \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 9 & 14 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

044 **Demuestra sin desarrollar que los siguientes determinantes son nulos.**

a) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a+2d & b+2e & c+2f \\ d-a & e-b & f-c \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} x+y & y+z & z+x \\ z & x & y \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a+2d & b+2e & c+2f \\ d-a & e-b & f-c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d & 2e & 2f \\ d-a & e-b & f-c \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ d-a & e-b & f-c \end{vmatrix} =$

$$= 2\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$$

b) $\begin{vmatrix} x+y & y+z & z+x \\ z & x & y \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} x+y & y+z & z+x \\ z & x & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} x+y & x-z & y-z \\ z & z-x & z-y \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$

$$= 2(x-z)(y-z)\cdot\begin{vmatrix} x+y & 1 & 1 \\ z & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

045 Aplicando propiedades de los determinantes, comprueba que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-a)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b+a & c+a \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

046 Trata de convertir el siguiente determinante en el determinante de una matriz triangular, y así demostrar la igualdad:

$$\begin{vmatrix} a & a+b & b \\ b & a & b \\ 2a & 3a & a+b \end{vmatrix} = (a-b)^3$$

$$\begin{vmatrix} a & a+b & b \\ b & a & b \\ 2a & 3a & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a+b & b \\ b & a & b \\ a & 2a-b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-b & a+b & b \\ 0 & a & b \\ 0 & 2a-b & a \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a-b & a & b \\ 0 & a-b & b \\ 0 & a-b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-b & a & b \\ 0 & a-b & b \\ 0 & 0 & a-b \end{vmatrix} = (a-b)^3$$

047 Si la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ tiene determinante $n$, averigua el valor del determinante de las siguientes matrices:

$$B = \begin{pmatrix} 6d & 4e & 2f \\ 3g & 2h & i \\ 9a & 6b & 3c \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} d+f & e & f+e \\ a+c & b & c+b \\ g+i & h & i+h \end{pmatrix}$$

*(Cantabria. Junio 2000. Bloque 2. Opción A)*

$$|B| = \begin{vmatrix} 6d & 4e & 2f \\ 3g & 2h & i \\ 9a & 6b & 3c \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 9a & 6b & 3c \\ 3g & 2h & i \\ 6d & 4e & 2f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9a & 6b & 3c \\ 6d & 4e & 2f \\ 3g & 2h & i \end{vmatrix} = 3\cdot 2\cdot\begin{vmatrix} 3a & 2b & c \\ 3d & 2e & f \\ 3g & 2h & i \end{vmatrix} =$$

$$= 6\cdot 3\cdot 2\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 36n$$

048 Sea $A$ la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & 27 \end{pmatrix}$.

Sea $B$ la matriz que resulta al realizar en $A$ las siguientes transformaciones: primero se multiplica $A$ por sí misma; después, se cambian de lugar la fila segunda y la tercera, y finalmente, se multiplican todos los elementos de la segunda columna por $-2$.

Calcular el determinante de la matriz $B$, usando para ello las propiedades de los determinantes.

*(País Vasco. Junio 2007. Bloque A. Cuestión A)*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & 27 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 34 & 102 \\ 14 & 90 & 282 \\ 36 & 250 & 804 \end{pmatrix} \rightarrow B = \begin{pmatrix} 6 & -68 & 102 \\ 36 & -500 & 804 \\ 14 & -180 & 282 \end{pmatrix}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 6 & -68 & 102 \\ 36 & -500 & 804 \\ 14 & -180 & 282 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 34 & 102 \\ 36 & 250 & 804 \\ 14 & 90 & 282 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 34 & 102 \\ 14 & 90 & 282 \\ 36 & 250 & 804 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & 27 \end{vmatrix}^2 =$$

$$= 2 \cdot \left( \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 6 & 24 \end{vmatrix} \right)^2 = 2 \cdot \left( \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 24 \end{vmatrix} \right)^2 = 2 \cdot \left( 2 \cdot 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \right)^2 = 2 \cdot 12^2 = 288$$

049 Sea $A$ una matriz cuadrada de orden 3.

a) Si sabemos que el determinante de la matriz $2A$ es $|2A| = 8$. ¿Cuánto vale el determinante de $A$? Escribe la propiedad de los determinantes que hayas usado para obtener este valor.

b) Calcula para qué valores de $x$ se cumple que $|2A| = 8$, siendo $A$ la matriz $A = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ x+1 & 2 & 2 \\ x & 2-x & 1 \end{pmatrix}$.

*(Extremadura. Septiembre 2007. Opción A. Ejercicio 3)*

a) $|2A| = 2^3 \cdot |A| = 8 \rightarrow |A| = 1$

Si en una matriz cuadrada multiplicamos por un mismo número todos los elementos de una misma fila (o columna), su determinante queda multiplicado por ese número.

b) $|A| = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ x+1 & 2 & 2 \\ x & 2-x & 1 \end{vmatrix} = x^2 - 2x + 1$

$|2A| = 8 \rightarrow |A| = 1 \rightarrow x^2 - 2x + 1 = 1 \rightarrow x^2 - 2x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

050 Halla el valor de los siguientes determinantes, desarrollando por la fila o columna que más te interese.

a) $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 & 4 \\ -1 & -5 & 0 & 6 \\ -2 & -4 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ -3 & -2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 & 4 \\ -1 & -5 & 0 & 6 \\ -2 & -4 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 & 2 \\ -1 & -5 & 0 & 6 \\ -2 & -4 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 \\ -1 & -5 & 6 \\ -2 & -4 & 2 \end{vmatrix} =$

$= 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 \\ -1 & -5 & 6 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 34$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ -3 & -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & 8 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -2 & 4 & 8 \end{vmatrix} = -2(48 + 4 - 6) = -92$

051 Dado el determinante $\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -6 \end{vmatrix}$, calcúlalo:

a) Usando la regla de Sarrus.

b) Desarrollando por los elementos de la primera columna.

a) $\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -6 \end{vmatrix} = 7 + 6 - 9 - 84 = -80$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -6 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -9 + 2(-39) + 7 = -80$

052 Obtén el valor del determinante $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & 6 & 5 \end{vmatrix}$:

a) Mediante la regla de Sarrus.

b) *Haciendo ceros* en la tercera fila y desarrollando por ella.

a) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & 6 & 5 \end{vmatrix} = 60 - 3 + 24 - 8 - 10 + 54 = 117$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & 6 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -17 & -13 \\ 2 & -8 & -13 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -17 & -13 \\ -8 & -13 \end{vmatrix} = 221 - 104 = 117$

053 Calcula el valor del determinante de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

*(Navarra. Septiembre 2006. Grupo 1. Opción B)*

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 2 = 1$$

054 Averigua, sin realizar ninguna operación, el valor que debe tener $a$ para que $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ -3 & 0 & a & 2 \\ 2 & 3 & -4 & 6 \\ 5 & 3 & -10 & 4 \end{vmatrix}$ se anule.

$$F_2 = F_2 + F_4 - F_3 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & a-6 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & 6 \\ 5 & 3 & -10 & 4 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow a = 6$$

055 Halla el valor de $a$ que hace que la matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & a \end{pmatrix}$ no sea regular.

*(Navarra. Junio 2006. Grupo 1. Opción B)*

Una matriz $A$ no es regular si $|A| = 0$.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & a+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & a+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a+2 \\ 0 & 2 & -a \\ 1 & -1 & a+2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & a+2 \\ 2 & -a \end{vmatrix} = 0 \rightarrow a = -2$$

056 Comprueba que $\begin{vmatrix} x+2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x+2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x+2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (x+1)^3$.

$$\begin{vmatrix} x+2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x+2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x+2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x+1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+1 & 0 & 0 \\ 0 & x+1 & 0 \\ 0 & 0 & x+1 \end{vmatrix} = (x+1)^3$$

**057** Comprueba que la ecuación: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & 2 & -3 & 4 \\ x^2 & 4 & 9 & 16 \\ x^3 & 8 & -27 & 64 \end{vmatrix} = 0$ tiene solo tres soluciones sin necesidad de calcular el determinante. ¿Cuáles son?

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & 2 & -3 & 4 \\ x^2 & 4 & 9 & 16 \\ x^3 & 8 & -27 & 64 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & 2-x & -3-x & 4-x \\ x^2 & 4-x^2 & 9-x^2 & 16-x^2 \\ x^3 & 8-x^3 & -27-x^3 & 64-x^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-x & -3-x & 4-x \\ 4-x^2 & 9-x^2 & 16-x^2 \\ 8-x^3 & -27-x^3 & 64-x^3 \end{vmatrix} =$$

$$= (2-x)(3+x)(4-x) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2+x & 3-x & 4+x \\ x^2+2x+4 & -x^2+3x-9 & x^2+4x+16 \end{vmatrix}$$

Las tres soluciones son: $x = 2$, $x = -3$, $x = 4$.

**058** Desarrolla el determinante y comprueba que es nulo.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 & -1 \\ 4 & 2 & 0 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 & -1 \\ 4 & 0 & -4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

**059** Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2a & a & a & a \\ a & 2a & a & a \\ a & a & 2a & a \\ a & a & a & 2a \end{pmatrix}$. Calcular el valor de su determinante en función de $a$.

*(Asturias. Septiembre 2002. Bloque 1)*

$$\begin{vmatrix} 2a & a & a & a \\ a & 2a & a & a \\ a & a & 2a & a \\ a & a & a & 2a \end{vmatrix} = a^4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = a^4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= a^4 \cdot \left( - \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = a^4 \cdot (1+4) = 5a^4$$

**060** Obtener, en función de $a$, $b$ y $c$, el determinante de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \end{pmatrix}$$

*(La Rioja. Septiembre 2007. Propuesta A. Ejercicio 1)*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1+a & -a & -a & -a \\ 1 & b & 0 & 0 \\ 1 & 0 & c & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a & -a & -a \\ b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -abc \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -abc$$

061 En este ejercicio los números $x$, $y$, $z$ y $u$ son todos distintos de cero. Justificar, sin efectuar su desarrollo, que el siguiente determinante vale 0.

$$P(x) = \begin{vmatrix} yz & xz & xy \\ u & u & u \\ \frac{1}{x} & \frac{1}{y} & \frac{1}{z} \end{vmatrix}$$

*(Canarias. Junio 2003. Opción A. Cuestión 3)*

$$\begin{vmatrix} yz & xz & xy \\ u & u & u \\ \frac{1}{x} & \frac{1}{y} & \frac{1}{z} \end{vmatrix} = u \cdot \begin{vmatrix} yz & xz & xy \\ 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{x} & \frac{1}{y} & \frac{1}{z} \end{vmatrix} = \frac{u}{x} \cdot \begin{vmatrix} yz & xz & xy \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{x}{y} & \frac{x}{z} \end{vmatrix} = \frac{u}{xy} \cdot \begin{vmatrix} yz & xz & xy \\ 1 & 1 & 1 \\ y & x & \frac{xy}{z} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{u}{xyz} \cdot \begin{vmatrix} yz & xz & xy \\ 1 & 1 & 1 \\ yz & xz & xy \end{vmatrix} = 0$$

062 Averiguar según el valor de $a$ el número de raíces reales que tiene la ecuación.

$$\begin{vmatrix} x^2 & a & a & a \\ a & x^2 & a & a \\ a & a & x^2 & a \\ a & a & a & x^2 \end{vmatrix} = 0$$

*(Cantabria. Septiembre 2000. Bloque 2. Opción B)*

$$\begin{vmatrix} x^2 & a & a & a \\ a & x^2 & a & a \\ a & a & x^2 & a \\ a & a & a & x^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2 & a & a & a \\ a-x^2 & x^2-a & 0 & 0 \\ a-x^2 & 0 & x^2-a & 0 \\ a-x^2 & 0 & 0 & x^2-a \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x^2+3a & a & a & a \\ 0 & x^2-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^2-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x^2-a \end{vmatrix} = (x^2+3a)(x^2-a)^3 = 0$$

- Si $a = 0 \rightarrow x^8 = 0 \rightarrow$ La ecuación tiene una única solución real ($x = 0$).
- Si $a > 0 \rightarrow$ La ecuación tiene dos soluciones reales ($x = \pm\sqrt{a}$)
- Si $a < 0 \rightarrow$ La ecuación tiene dos soluciones reales ($x = \pm\sqrt{-3a}$)

063 Se considera la función:

$$f(x)=\begin{vmatrix} a & b & -2a & 3b \\ -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$$

Sabiendo que $f(0)=-3$ y $f(1)=f(-1)$, determinar $a$ y $b$.

*(Cantabria. Junio 2000. Bloque 2. Opción B)*

$$\text{Si } f(0)=-3 \to \begin{vmatrix} a & b & -2a & 3b \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -3b\cdot\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 3b=-3 \to b=-1$$

$$\text{Así: } f(x)=\begin{vmatrix} a & -1 & -2a & -3 \\ -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$$

$$f(1)=\begin{vmatrix} a & -1 & -2a & -3 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = a\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -2a & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= a+(-4-2a)=-4-a$$

$$f(-1)=\begin{vmatrix} a & -1 & -2a & -3 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = a\cdot\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -2a & -3 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= a(-1)+(-4+2a)=a-4$$

$$-4-a=a-4 \to a=0$$

064 Sea $A$ una matriz cuadrada de orden 2 verificando que $2A^2=A$. Calcular razonadamente los posibles valores del determinante de $A$.

*(Castilla y León. Junio 2001. Prueba A. Cuestión 1)*

$$|A|=|2\cdot A^2|=2^2|A^2|=4|A|^2$$

$$|A|=4|A|^2 \to 4|A|^2-|A|=0 \to \begin{cases} |A|=0 \\ 4|A|-1=0 \to |A|=\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

065 Estudia el rango de estas matrices.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 6 & -9 \\ -8 & 12 \\ 12 & -18 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 1 & 4 & 5 \\ 8 & 11 & -11 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ -2 & 8 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 24 & 3 & 19 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 6 & 3 \\ 4 & -8 & -24 & 1 \end{pmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = 12 \neq 0 \rightarrow$ El rango de la matriz es 2.

b) $\begin{vmatrix} 6 & -9 \\ -8 & 12 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 6 & -9 \\ 12 & -18 \end{vmatrix} = 0 \qquad 6 \neq 0 \rightarrow$ El rango de la matriz es 1.

c) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 1 & 4 & 5 \\ 8 & 11 & -11 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 7 \neq 0 \rightarrow$ El rango de la matriz es 2.

d) $\begin{vmatrix} 1 & -4 & 0 \\ -2 & 8 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -39 \neq 0 \rightarrow$ El rango de la matriz es 3.

e) $\begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 2 & 24 & 3 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 18 \neq 0 \rightarrow$ El rango de la matriz es 2.

f) $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -13 \neq 0 \rightarrow$ El rango de la matriz es 2.

**066** **Calcular el rango de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -5 \\ -1 & 1 & -3 & -3 \\ 2 & 4 & 0 & -6 \\ 3 & 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.**

***(Castilla y León. Junio 2008. Prueba B. Cuestión 2)***

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & -5 \\ -1 & 1 & -3 & -3 \\ 2 & 4 & 0 & -6 \\ 3 & 2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & -5 \\ -4 & -8 & 0 & 12 \\ 2 & 4 & 0 & -6 \\ 7 & 14 & 0 & -21 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 & -5 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 & -5 \\ -1 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \rightarrow$ El rango de la matriz es 2.

**067** **Los rangos de estas matrices son 2, 3 y 4. Averigua, sin realizar operaciones, cuál corresponde a cada una.**

a) $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 & 12 \\ -4 & -3 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 8 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 & 12 \\ -4 & -3 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) 3 b) 2 c) 4

068 **Comprueba que la matriz $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 6 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ tiene rango 2. Añade dos filas que no sean nulas ni iguales a las anteriores de modo que el rango siga siendo 2.**

$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = -20 \neq 0 \rightarrow$ El rango de la matriz es 2.

Respuesta abierta. Por ejemplo: $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 6 & -3 & 2 \\ -4 & 2 & 2 \\ 8 & -4 & 6 \end{pmatrix}$

069 **Dada la matriz $\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 9 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, añade una columna de modo que el rango sea 3. Demuéstralo.**

Respuesta abierta. Por ejemplo: $\begin{pmatrix} 4 & -6 & 1 \\ -6 & 9 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 4 & -6 & 1 \\ -6 & 9 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -12 \neq 0 \rightarrow$ El rango de la matriz es 3.

070 **Comprueba que la siguiente matriz $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ -6 & -2 & 3 & -1 \\ 12 & 4 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ es de rango 2.**

**Encuentra dos columnas linealmente independientes, y expresa las otras dos como combinación lineal de las primeras.**

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -6 & -2 & 3 \\ 12 & 4 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -6 & -2 & -1 \\ 12 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -6 & 3 & -1 \\ 12 & -3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 4 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \rightarrow$ El rango de la matriz es 2.

Respuesta abierta. Por ejemplo: Las columnas $C_2$ y $C_3$ son linealmente independientes.

$C_1 = 3C_2 \qquad C_4 = 2C_2 + C_3$

071 **¿Para qué valor de *m* el rango de esta matriz es 2?** $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 4 & m & 6 \\ -5 & 3 & -7 \end{pmatrix}$

Para que el rango de la matriz sea 2, el menor de orden 3 tiene que ser igual a 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 4 & m & 6 \\ -5 & 3 & -7 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -7m - 120 + 72 + 30m - 18 + 112 = 0$$
$$\rightarrow 23m + 46 = 0 \rightarrow m = -2$$

Si $\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -18 \neq 0 \rightarrow$ El rango de la matriz es 2.

072 **Obtener el valor de *a* para que el rango de la matriz *A* sea igual a 2.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 6 & a \end{pmatrix}$$

***(La Rioja. Junio 2003. Propuesta A. Ejercicio 1)***

Para que el rango de la matriz sea 2, los menores de orden 3 tienen que ser iguales a 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & 6 & a \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -12 + 6 - 6a = 0 \rightarrow -6 - 6a = 0 \rightarrow a = -1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 7 \neq 0 \rightarrow \text{El rango de la matriz es 2.}$$

073 **Calcula el rango de cada matriz en función de cada uno de los parámetros.**

a) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & a \\ -5 & -6 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} b & 2 & -1 \\ 3 & 2 & b+1 \\ 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & c & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & -d & 3 & -2 \\ -3 & 6 & -9 & 6 \\ d & -4 & 6 & -4 \end{pmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -8 \neq 0 \rightarrow \text{Rango } (A) \geq 2$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & a \\ -5 & -6 & 2 \end{vmatrix} = -48 - 16a$$

- Si $a \neq -3 \rightarrow$ El menor de orden 3 es distinto de cero. El rango de la matriz es 3.
- Si $a = -3 \rightarrow$ El menor de orden 3 es nulo. El rango de la matriz es 2.

b) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \rightarrow \text{Rango } (A) \geq 2$

$$\begin{vmatrix} b & 2 & -1 \\ 3 & 2 & b+1 \\ 7 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 10b - 6b^2 \qquad -6b^2 + 10b + 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} b = 2 \\ b = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

- Si $b \in \mathbb{R} - \left\{2, -\dfrac{1}{3}\right\} \rightarrow$ El menor de orden 3 es distinto de cero. El rango de la matriz es 3.
- Si $b = 2$ o $b = -\dfrac{1}{3} \rightarrow$ El menor de orden 3 es nulo. El rango de la matriz es 2.

c) $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \rightarrow \text{Rango } (A) \geq 2$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 3 & c & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 6 - 3c$$

- Si $c \neq 2 \rightarrow$ El menor de orden 3 es distinto de cero. El rango de la matriz es 3.
- Si $c = 2 \rightarrow$ El menor de orden 3 es nulo. El rango de la matriz es 2.

d) $\begin{vmatrix} 1 & d & 3 \\ -3 & 6 & -9 \\ d & -4 & 6 \end{vmatrix} = 9d^2 - 36d + 36 = 9(d-2)^2$

$$\begin{vmatrix} 1 & -d \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 3d = 0 \qquad \begin{vmatrix} -3 & 6 \\ d & -4 \end{vmatrix} = 12 - 6d = 0$$

- Si $d \neq 2 \rightarrow$ Hay menores de orden 3 distintos de cero. El rango de la matriz es 3.
- Si $d = 2 \rightarrow$ Todos los menores de orden 2 y 3 son nulos. El rango de la matriz es 1.

074 **Estudia el rango de las matrices según los valores de los parámetros.**

a) $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & a \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & b & 0 \\ 1 & 0 & b \\ b+1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \rightarrow \text{Rango } (A) \geq 2$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 4a - 12 \qquad \begin{vmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & a \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3a - 23$$

Para cualquier valor de $a$ al menos uno de los menores de orden 3 es distinto de cero. El rango de la matriz es 3.

b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow \text{Rango } (A) \geq 2$

$$\begin{vmatrix} 1 & b & 0 \\ 1 & 0 & b \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = b^2 - 2b \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & b \\ b+1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2b^2 + 2b - 4 = 2(b-1)(b+2)$$

Para cualquier valor de $b$ al menos uno de los menores de orden 3 es distinto de cero. El rango de la matriz es 3.

075 **Estudia el rango de la matriz para los distintos valores del parámetro.**

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -3 & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow \text{Rango } (A) \geq 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \rightarrow \text{Rango } (A) \geq 3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -3 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 5+a \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -3 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5+a \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & a \end{vmatrix} = 20 - 2a$$

- Si $a \neq 10 \rightarrow$ El menor de orden 4 es distinto de cero. El rango de la matriz es 4.
- Si $a = 10 \rightarrow$ El menor de orden 4 es nulo. El rango de la matriz es 3.

076 **Si el rango de $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$ es 2, ¿cuál será el rango de la matriz**

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d-a & e-b & f-c \\ 2a-d & 2b-e & 2c-f \end{pmatrix}?$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d-a & e-b & f-c \\ 2a-d & 2b-e & 2c-f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 2a-d & 2b-e & 2c-f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 2a & 2b & 2c \end{vmatrix} = 0$$

$\rightarrow$ El rango de la matriz es menor que 3.

Como el rango de $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$ es 2, las dos primeras filas de la matriz cuadrada son linealmente independientes, por tanto, esta matriz tiene rango 2.

077 Si la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tiene rango 1 y la matriz $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ tiene rango 2, explicar qué valores puede tener el rango de las matrices:

$$C = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & y \\ 0 & 0 & z & w \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ x & y & 0 & 0 \\ z & w & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ x & 0 & y & 0 \\ z & 0 & w & 0 \end{pmatrix}$$

*(Cantabria. Septiembre 2000. Bloque 2. Opción A*

Por ser la matriz $A$ de rango 1, las dos primeras filas de las matrices $C$, $D$ y $E$ son linealmente dependientes y al menos uno de los valores de la matriz $A$ es distinto de cero.

Al tener la matriz $B$ rango 2, las dos últimas filas de las matrices $C$, $D$ y $E$ son linealmente independientes, por tanto, las tres matrices tienen al menos rango 2.

Si en la matriz $C$ elegimos un menor de orden 3 que contenga las dos últimas filas será de la forma:

$$\begin{vmatrix} n & 0 & 0 \\ 0 & x & y \\ 0 & z & w \end{vmatrix} = n \cdot \begin{vmatrix} x & y \\ z & w \end{vmatrix} \neq 0$$

Siendo $n$ uno de los elementos de la matriz $A$. Como las dos primeras filas son linealmente dependientes el menor de orden 4 es nulo, por tanto, el rango de la matriz $C$ es 3.

Si elegimos en la matriz $D$ un menor de orden 3 que contenga las dos últimas filas serán de la forma:

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ x & y & 0 \\ z & w & 0 \end{vmatrix} = 0 \ \text{ y } \ \begin{vmatrix} c & d & 0 \\ x & y & 0 \\ z & w & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Como las dos primeras filas son linealmente dependientes, el menor de orden 4 es nulo, por tanto, el rango de la matriz $D$ es 2.

Si elegimos en la matriz $E$ un menor de orden 3 que contenga las dos últimas filas será de la forma:

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ x & 0 & y \\ z & 0 & w \end{vmatrix} = -b \cdot \begin{vmatrix} x & y \\ z & w \end{vmatrix} \ \text{ o } \ \begin{vmatrix} c & d & 0 \\ x & 0 & y \\ z & 0 & w \end{vmatrix} = -d \cdot \begin{vmatrix} x & y \\ z & w \end{vmatrix}$$

Por tanto, dependiendo de si los valores de $b$ o $d$ son nulos o no, los menores de orden 3 serán distintos de cero o no. Luego, la matriz $E$ puede tener rango 3.

Como las dos primeras filas son linealmente dependientes, el menor de orden 4 es nulo, por tanto, el rango de la matriz $E$ puede ser 2 o 3.

078 Encuentra los valores de $m$ y $n$ que hacen que estas matrices tengan:

$$A = \begin{pmatrix} m & 0 & n \\ m & m & 4 \\ 0 & m & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} m & 0 & n & 2 \\ m & m & 4 & 4 \\ 0 & m & 2 & n \end{pmatrix}$$

a) Rango $(A) = 2$ y Rango $(B) = 3$

b) Rango $(A) =$ Rango $(B) = 2$

c) Rango $(A) =$ Rango $(B) = 3$

$$\begin{vmatrix} m & 0 & n \\ m & m & 4 \\ 0 & m & 2 \end{vmatrix} = m^2 \cdot (n-2) \qquad \begin{vmatrix} 0 & n & 2 \\ m & 4 & 4 \\ m & 2 & n \end{vmatrix} = -m \cdot (n-2)^2$$

a) No podemos encontrar valores de $m$ y $n$ que verifiquen las dos condiciones, por tanto, el rango de $A$ no puede ser 2 si el de $B$ es 3.

b) Si $m \neq 0$ y $n = 2 \rightarrow \begin{vmatrix} m & 0 \\ m & m \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow$ Rango $(A) \geq 2$

$n = 2 \rightarrow$ Los menores de orden 3 son nulos y los rangos de las matrices son 2.

c) Si $m \neq 0$ y $n \neq 2 \rightarrow$ Los menores de orden 3 son distintos de cero y los rangos de las matrices son 3.

079 **Halla el rango de la matriz $M$ en función de los valores del parámetro $x$.**

$$M = \begin{pmatrix} 2x-6 & x & -1 \\ x & x & -1 \\ 4 & 4 & x-4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2x-6 & x & -1 \\ x & x & -1 \\ 4 & 4 & x-4 \end{vmatrix} = x^3 - 10x^2 + 28x - 24 = (x-2)^2(x-6)$$

- Si $x \in \mathbb{R} - \{2, 6\} \rightarrow$ El menor de orden 3 es distinto de cero. El rango de la matriz es 3.
- Si $x = 2 \rightarrow \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -8 \neq 0 \rightarrow$ El menor de orden 3 es nulo y hay un menor de orden 2 distinto de cero. El rango de la matriz es 2.
- Si $x = 6 \rightarrow \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 16 \neq 0 \rightarrow$ El menor de orden 3 es nulo y hay un menor de orden 2 distinto de cero. El rango de la matriz es 2.

080 **Calcula el rango de la matriz $A$ según los valores del parámetro $k$.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -k & 2 \\ 1 & -1 & -1 & k-1 \end{pmatrix}$$

*(Baleares. Septiembre 2003. Opción A. Cuestión 2)*

$$\begin{vmatrix} 1 & k & -1 \\ 2 & 1 & -k \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -k^2 + k + 2 = -(k-2)(k+1)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & k & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & k-1 \end{vmatrix} = -2k^2 + 5k - 2 = (k-2)(1-2k)$$

- Si $k \neq 2 \rightarrow$ Hay un menor de orden 3 distinto de cero. El rango de la matriz es 3.
- Si $k = 2 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \rightarrow$ Los menores de orden 3 son nulos y al menos hay un menor de orden 2 distinto de cero. El rango de la matriz es 2.

081 **Estudia el rango de la siguiente matriz para los distintos valores de sus parámetros.**

$$\begin{pmatrix} a+1 & 1 & -a & b \\ 1 & a+1 & 0 & 2b \\ a & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a+1 & 1 & -a \\ 1 & a+1 & 0 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = a(a+1)^2 \qquad \begin{vmatrix} a+1 & 1 & b \\ 1 & a+1 & 2b \\ a & 1 & 0 \end{vmatrix} = -b(a^2+a+1)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -a & b \\ a+1 & 0 & 2b \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -b(a+1) \qquad \begin{vmatrix} a+1 & -a & b \\ 1 & 0 & 2b \\ a & 1 & 0 \end{vmatrix} = -b(2a^2+2a+1)$$

- Si $a \in \mathbb{R} - \{-1, 0\}$, para cualquier valor de $b$, hay un menor de orden 3 distinto de cero. El rango de la matriz es 3.
- Si $a = 0$ y $b \neq 0 \rightarrow$ El segundo menor de orden 3 es distinto de cero. El rango de la matriz es 3.
- Si $a = 0$ y $b = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow$ El rango de la matriz es 2.
- Si $a = -1 \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow$ El rango es mayor o igual que 2: el rango es 2 si $b = 0$ y es 3 si $b \neq 0$.

082 **Calcula el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ -1 & 2\lambda & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ en función del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$.**

***(Castilla-La Mancha. Junio 2007. Bloque 3. Pregunta A)***

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ -1 & 2\lambda & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4\lambda^2 - 2\lambda = 2\lambda(2\lambda - 1)$$

- Si $\lambda \in \mathbb{R} - \left\{0, \frac{1}{2}\right\} \rightarrow$ El menor de orden 3 es distinto de cero. El rango de la matriz es 3.
- Si $\lambda = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow$ El rango de la matriz es 2.
- Si $\lambda = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{3}{2} \neq 0 \rightarrow$ El rango de la matriz es 2.

083 **Estudiar el rango de la matriz que sigue, mediante transformaciones de filas y columnas, indicando en cada caso las transformaciones realizadas.**

$$A = \begin{pmatrix} b & a & a \\ a & b & a \\ a & a & b \end{pmatrix}$$

***(País Vasco. Junio 2000. Bloque E. Cuestión E)***

Si restamos la primera columna a las dos últimas:

$$\begin{pmatrix} b & a-b & a-b \\ a & b-a & 0 \\ a & 0 & b-a \end{pmatrix}$$

Si sumamos las dos últimas filas a la primera:

$$\begin{pmatrix} 2a+b & 0 & 0 \\ a & b-a & 0 \\ a & 0 & b-a \end{pmatrix}$$

- Si $a = b = 0 \rightarrow$ El rango de la matriz es 0.
- Si $a = b \neq 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 3a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ El rango de la matriz es 1.
- Si $b = -2a \neq 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & -3a & 0 \\ a & 0 & -3a \end{pmatrix} \rightarrow$ El rango de la matriz es 2.
- Si $a \neq b$ y $b \neq -2a \rightarrow$ Las tres filas son linealmente independientes. El rango de la matriz es 3.

084 **Si** $A = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ b+1 & a & 0 & 0 \\ 0 & b+1 & 0 & a \\ 0 & 0 & a & b \end{pmatrix}$**:**

**a) Prueba que para cualquier valor de $a$ y $b$, Rango $(A) \geq 2$.**

**b) Determina un par de valores reales para los cuales sea Rango $(A) = 3$ y otro par de valores de $a$ y $b$ de forma que Rango $(A) = 4$.**

***(Cantabria. Junio 2001. Bloque 2. Opción A)***

a) Si $a = b = 0 \rightarrow b + 1 \neq 0 \rightarrow$ Rango $(A) \geq 1$

$$\begin{vmatrix} b+1 & a \\ 0 & b+1 \end{vmatrix} = (b+1)^2$$

$$\begin{vmatrix} b & 0 \\ a & b \end{vmatrix} = b^2$$

Como ambos menores no pueden ser nulos para cualquier valor de $a$ y $b \rightarrow$ Rango $(A) \geq 3$

b) Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$\begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ b+1 & a & 0 & 0 \\ 0 & b+1 & 0 & a \\ 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = a\cdot\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ b+1 & 0 & a \\ 0 & a & b \end{vmatrix} + b\cdot\begin{vmatrix} b+1 & a & 0 \\ 0 & b+1 & a \\ 0 & 0 & b \end{vmatrix} = -a^4 + b^2(b+1)^2$$

- Para que Rango $(A) < 4$ el determinante tiene que valer cero:
  $a^4 = b^2(b+1)^2 \rightarrow a^2 = b(b+1)$

  Como $\begin{vmatrix} a & 0 & b \\ b+1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^3$, para que el Rango $(A) = 3$ basta con tomar un valor de $a$ que sea distinto de cero: si $b = 1$ y $a = \sqrt{2}$ el rango de la matriz es 3.
- Para que Rango $(A) = 4$ basta con que $-a^4 + b^2(b+1)^2 \neq 0$, por ejemplo, para $a = 1$ y $b = 1$ la matriz tiene rango 4.

085 **Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.**

**Vemos que ambas tienen rango máximo, o sea, 2. Determina los valores de $c$ tales que la matriz $A + cB$ ya no tenga rango 2. ¿Cuál es el rango que tienen las respectivas matrices suma?**

***(Aragón. Septiembre 2003. Opción B. Cuestión 1)***

$$A + cB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+c & -1 \\ 4+4c & 2-c \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1+c & -1 \\ 4+4c & 2-c \end{vmatrix} = (1+c)\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2-c \end{vmatrix} = (1+c)(6-c)$$

Si $c = 6$ o $c = -1 \rightarrow$ El menor de orden 2 es nulo y la matriz $A + cB$ no tiene rango 2.

Como $-1 \neq 0 \rightarrow$ El rango de las matrices $A + 6B$ y $A - B$ es 1.

086 **a) Si $A$ es una matriz y $a \in \mathbb{R}$, ¿cuándo se cumple que Rango $(aA)$ = Rango $(A)$?**

**b) Estudie, en función de los valores de $a$, el rango de la matriz: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -a \\ a & -1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$**

***(Murcia. Junio 2001. Bloque 1. Cuestión 2)***

a)
- Si $A$ es la matriz nula, su rango es 0 y el rango de la matriz $aA$ también es 0 para cualquier valor de $a$.
- Si $a \neq 0 \rightarrow$ El número de filas o columnas linealmente independientes de $A$ y de $aA$ coincide. Los rangos de ambas matrices son iguales.
- Si $a = 0 \rightarrow$ La matriz $aA$ tiene rango 0 y solo coincide con el rango de $A$ si esta matriz es nula.

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ a & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 - 2a$

- Si $a \neq -1 \rightarrow$ Hay un menor de orden 3 distinto de cero. El rango de la matriz es 3.
- Si $a = -1 \rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \rightarrow$ El rango de la matriz es 2.

087 **Toma una matriz cuadrada de orden 2 y calcula su matriz adjunta. Compara sus determinantes. Haz lo mismo con una matriz cuadrada de orden 3. Establece una hipótesis general y trata de demostrarla.**

Respuesta abierta. Por ejemplo:

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ una matriz cuadrada de orden 2.

$$\text{Adj}\,(A) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad |A| = 7 \qquad |\text{Adj}\,(A)| = 7$$

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ una matriz cuadrada de orden 3.

$$\text{Adj}\,(A) = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad |A| = 2 \qquad |\text{Adj}\,(A)| = 4$$

Si $A$ es una matriz cuadrada de orden $n$:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}\,(A)^t \rightarrow |A^{-1}| = \left(\frac{1}{|A|}\right)^n \cdot \left|\text{Adj}\,(A)^t\right|$$

Como $\left|\text{Adj}\,(A)^t\right| = \left|\text{Adj}\,(A)\right|$ tenemos que:

$$|A^{-1}| = \left(\frac{1}{|A|}\right)^n \cdot \left|\text{Adj}\,(A)\right| = \frac{1}{|A|^n} \cdot \left|\text{Adj}\,(A)\right|$$

Como $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|} \rightarrow \dfrac{1}{|A|} = \dfrac{1}{|A|^n} \cdot \left|\text{Adj}\,(A)\right| \rightarrow \left|\text{Adj}\,(A)\right| = |A|^{n-1}$

088 **Halla la matriz inversa de estas matrices:**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -7 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 3 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

a) $|A| = 2 \neq 0 \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -\dfrac{5}{2} & \dfrac{3}{2} \end{pmatrix}$

b) $|B| = 1 \neq 0 \rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -2 & 7 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

c) $|C| = -20 \neq 0 \rightarrow C^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{20} & \frac{7}{20} \end{pmatrix}$

d) $|D| = 10 \neq 0 \rightarrow D^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{11}{10} & -\frac{9}{10} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{9}{10} & -\frac{11}{10} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{3}{10} & -\frac{7}{10} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$

089 ¿Para qué valores del parámetro $a$ la matriz no tiene inversa? Calcula la matriz inversa cuando $a = 2$.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \\ a+1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

$|M| = a - a^2$

La matriz no tiene inversa si su determinante es nulo, es decir, si $a = 0$ o $a = 1$.

Si $a = 2 \rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow |M| = -2 \rightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

090 Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2a & a & a & a \\ a & 2a & a & a \\ a & a & 2a & a \\ a & a & a & 2a \end{pmatrix}$.

Encuentra su inversa, si existe, cuando $a = 1$.

***(Asturias. Septiembre 2002. Bloque 1)***

$|A| = 5a^4$

Si $a = 1 \rightarrow |A| = 5 \rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

091 Para cada número real $\lambda$, $M(\lambda)$ es la matriz $M(\lambda) = \begin{pmatrix} 4 & 3 & \lambda \\ 2 & 1 & 2 \\ \lambda & \lambda & -1 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) Obtener el determinante de la matriz $M(\lambda)$, y justificar que para cualquier número real $\lambda$ existe la matriz $M(\lambda)^{-1}$ inversa de $M(\lambda)$.

b) Calcular la matriz $M(0)^{-1}$.

c) Si $A = M(8)$, $B = M(4)$ y $C = M(3)$, calcular el determinante de la matriz producto $A \cdot B^{-1} \cdot C^{-1}$.

***(C. Valenciana. Junio 2002. Ejercicio B. Problema 1)***

a) $|M(\lambda)| = \lambda^2 - 2\lambda + 2$

La ecuación $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ no tiene solución, por tanto, el determinante de la matriz es distinto de cero y siempre existe la matriz inversa.

b) $M(0) = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow |M(0)| = 2 \rightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 3 \\ 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

c) $A = M(8) \rightarrow |A| = 50$

$B = M(4) \rightarrow |B| = 10$

$C = M(3) \rightarrow |C| = 5$

$|A \cdot B^{-1} \cdot C^{-1}| = |A| \cdot |B^{-1}| \cdot |C^{-1}| = |A| \cdot \frac{1}{|B|} \cdot \frac{1}{|C|} = 50 \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{5} = 1$

**092** **$A$, $B$ y $C$ son tres matrices cuadradas tales que $|A| = 5$, $|B| = 4$ y $|C| = 2$. Decide razonadamente el valor de los siguientes determinantes.**

**a) $|A^t|$** **c) $|AB^{-1}|$** **e) $|(BC)^{-1}|$**

**b) $|B^{-1}|$** **d) $|AB^{-1}|$** **f) $|C^{-1}B^t|$**

a) $|A^t| = |A| = 5$

b) $|B^{-1}| = \frac{1}{|B|} = \frac{1}{4}$

c) $|AB^{-1}| = |A| \cdot |B^{-1}| = |A| \cdot \frac{1}{|B|} = 5 \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$

d) $|A^{-1}B| = |A^{-1}| \cdot |B| = \frac{1}{|A|} \cdot |B| = \frac{1}{5} \cdot 4 = \frac{4}{5}$

e) $|(BC)^{-1}| = \frac{1}{|BC|} = \frac{1}{|B| \cdot |C|} = \frac{1}{4 \cdot 2} = \frac{1}{8}$

f) $|C^{-1}B^t| = |C^{-1}| \cdot |B^t| = \frac{1}{|C|} \cdot |B| = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$

**093** **a) Comprueba que la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ cumple que $A^3 = -A - I$**

**y calcula la matriz inversa de $A$.**

**b) Si $A$ es cualquier matriz de $n$ filas y $n$ columnas tal que $A^3 = -A - I$ y se sabe que det $(A) = m$, calcula el valor del determinante de $A + I$ en función de $m$. ($I$ representa la matriz unidad.)**

***(Cantabria. Junio 2002. Bloque 2. Opción B)***

a) $A^2 = AA = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$-A - I = -\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = -A - I \rightarrow -A^3 - A = I \rightarrow A(-A^2 - I) = I \rightarrow A^{-1} = -A^2 - I$$

$$A^{-1} = -\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $|A + I| = |-A^3| = -|A|^3 = -m^3$

094 Calcula las matrices *X*, *Y*, *Z* y *T* que cumplen las ecuaciones.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 15 & 5 \\ 30 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot Y = \begin{pmatrix} 11 & 10 & 0 \\ 14 & 4 & 16 \end{pmatrix}$

c) $Z \cdot \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 66 & 14 \\ -13 & -3 \end{pmatrix}$

d) $T \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 9 \\ 0 & -11 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$

a) $X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 15 & 5 \\ 30 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15 & 5 \\ 30 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$

b) $Y = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 11 & 10 & 0 \\ 14 & 4 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{3}{16} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11 & 10 & 0 \\ 14 & 4 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

c) $Z = \begin{pmatrix} 66 & 14 \\ -13 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 66 & 14 \\ -13 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

d) $T = \begin{pmatrix} 17 & 9 \\ 0 & -11 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 17 & 9 \\ 0 & -11 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{11} & -\frac{2}{11} \\ -\frac{2}{11} & \frac{5}{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

095 Determina las matrices $X, Y, Z\dots$ en las ecuaciones.

a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 14 & 9 \\ -17 & -10 \\ 17 & 11 \end{pmatrix}$

b) $Y \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & -4 & -2 \\ 13 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -10 & -10 \\ -10 & 10 & -10 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot Z = \begin{pmatrix} -7 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} \cdot T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & 28 & 111 \\ 54 & 52 & 194 \end{pmatrix}$

a) $$X = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 14 & 9 \\ -17 & -10 \\ 17 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 14 & 9 \\ -17 & -10 \\ 17 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

b) $$Y = \left[\begin{pmatrix} 10 & -10 & -10 \\ -10 & 10 & -10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & -4 & -2 \\ 13 & -2 & -3 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -6 & -8 \\ -23 & 12 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 8 & 6 & \frac{3}{2} \\ -4 & -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 9 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

c) $$Z = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \frac{7}{8} & -\frac{3}{4} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{8} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ -18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d) $$T = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 32 & 28 & 111 \\ 54 & 52 & 194 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 32 & 28 & 111 \\ 54 & 52 & 194 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} & \frac{7}{4} \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 10 & 4 & 28 \\ -8 & 12 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} & \frac{7}{4} \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 9 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

096 Siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 11 & 12 \\ -1 & -4 & 17 \\ 2 & 12 & 2 \end{pmatrix}$, encuentra dos matrices $C$ y $D$ tales que:

$$CA = B \qquad DB = A$$

¿Qué relación hay entre $C$ y $D$?

$$C = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 11 & 12 \\ -1 & -4 & 17 \\ 2 & 12 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 11 & 12 \\ -1 & -4 & 17 \\ 2 & 12 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{76} \begin{pmatrix} 35 & -23 & 9 \\ -2 & 10 & 6 \\ 15 & 1 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = AB^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 11 & 12 \\ -1 & -4 & 17 \\ 2 & 12 & 2 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{76} \begin{pmatrix} 212 & -122 & -235 \\ -36 & 20 & 46 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -5 & 3 & 6 \\ 3 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$CD = BA^{-1}AB^{-1} = BIB^{-1} = BB^{-1} = I \rightarrow C$ y $D$ son inversas.

097 Se consideran las matrices cuadradas reales de orden 2,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcular:

a) La matriz $P^{-1}$.

b) La matriz real cuadrada $X$ de orden 2, tal que $P^{-1}XP = Q$.

c) La matriz cuadrada $(PQP^{-1})^2$.

*(C. Valenciana. Septiembre 2003. Ejercicio B. Problema 1)*

a) $|P| = -1 \neq 0 \rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

b) $P^{-1}XP = Q \rightarrow X = PQP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$$

c) $(PQP^{-1})^2 = X^2 = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & -10 \\ 30 & -11 \end{pmatrix}$

098 Sea $k$ un número natural y sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Calcular $A^k$.

b) Hallar la matriz $X$ que verifica la ecuación: $A^kX = BC$

*(Madrid. Junio 2001. Opción A. Ejercicio 2)*

a) $$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces: $$A^k = \begin{pmatrix} 1 & k & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $$A^kX = BC \rightarrow X = (A^k)^{-1}BC = \begin{pmatrix} 1 & -k & -k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -k & -k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

099 Determina la matriz $X$ que verifica la ecuación $AX = X - B$ siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

*(Andalucía. Junio 2002. Opción B. Ejercicio 3)*

$$AX = X - B \rightarrow AX - X = -B \rightarrow (A - I)X = -B \rightarrow X = (A - I)^{-1}(-B)$$

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow (A - I)^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

100 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$:

a) Halla la inversa de $A - BC$.

b) Resuelve la ecuación matricial $AX - BCX = A$.

*(Castilla-La Mancha. Septiembre 2001. Bloque 1. Pregunta B)*

a) $$A - BC = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -4 & 3 & -4 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|A - BC| = -1 \neq 0 \rightarrow (A - BC)^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -3 \\ 5 & -1 & -2 \\ -6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

b) $AX - BCX = A \rightarrow (A - BC)X = A$

$$X = (A - BC)^{-1}A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -3 \\ 5 & -1 & -2 \\ -6 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -13 & 21 \\ 8 & -9 & 16 \\ -10 & 12 & -18 \end{pmatrix}$$

101 Responde razonadamente:

a) Si $A$ tiene inversa, ¿cuál es el rango de $A^{-1}$?

b) ¿Es cierto que siempre Rango $(A)$ = Rango $(A^t)$?

c) ¿Es siempre cierto que, si $A$ y $B$ son matrices de la misma dimensión, Rango $(A + B)$ = Rango $(A)$ + Rango $(B)$?

d) ¿Y que Rango $(A^2)$ = Rango $(A)$?

a) Si $A$ tiene inversa, verifica que:

$$|A| \neq 0 \rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \neq 0 \rightarrow \text{Rango } (A^{-1}) = \text{Rango } (A)$$

b) Sí, ya que el rango corresponde al número de filas o columnas linealmente independientes y esta relación no cambia al trasponerlas.

c) No. Por ejemplo, si $A$ y $B$ son dos matrices de orden 2 con rango 2, la matriz suma $A + B$ también es una matriz de orden 2 que no puede tener rango $2 + 2 = 4$.

d) No. Por ejemplo: si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ de modo que el rango de $A$ es 1 y el de $A^2$ es 0. Solo es cierto cuando $A$ es una matriz regular.

102 a) Calcula la matriz inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Escribe en forma matricial el siguiente sistema y resuélvelo usando la matriz $A^{-1}$ hallada en el apartado anterior:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 1 \\ y + z = -2 \\ x + z = 3 \end{array}\right\}$$

*(Andalucía. Junio 2007. Opción B. Ejercicio 3)*

a) $|A| = 2 \neq 0 \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

103 a) Sean $F_1$, $F_2$, $F_3$ las filas primera, segunda y tercera, respectivamente, de una matriz cuadrada $M$ de orden 3, con det $(M) = -2$. Calcula el valor del determinante de la matriz que tiene por filas $F_1 - F_2$, $2F_1$, $F_2 + F_3$.

b) Dada la matriz $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, halla dos matrices $X$ e $Y$ que verifican:

$$\left.\begin{array}{r} X + Y^{-1} = C \\ X - Y^{-1} = C^t \end{array}\right\}$$

siendo $C^t$ la matriz traspuesta de $C$.

*(Galicia. Junio 2007. Bloque 1. Opción 1)*

a) Si escribimos:

$\det(M) = \det(F_1, F_2, F_3) = -2$

Entonces:

$\det(F_1 - F_2, 2F_2, F_2 + F_3) = 2\det(F_1 - F_2, F_2, F_2 + F_3) = 2\det(F_1, F_2, F_2 + F_3) =$
$= 2\det(F_1, F_2, F_3) = 2(-2) = -4$

b) Si sumamos las ecuaciones tenemos:

$$2X = C + C^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$X + Y^{-1} = C \rightarrow Y^{-1} = C - X \rightarrow Y = (C - X)^{-1}$$

$$C - X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \rightarrow Y = (C - X)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

104 Sean $F_1$, $F_2$, $F_3$ y $F_4$ las filas de una matriz cuadrada $P$ de orden $4 \times 4$, cuyo determinante vale 3. Calcula razonadamente el valor del determinante de la inversa de $P$, el valor del determinante de la matriz $\alpha P$, donde $\alpha$ denota un número real no nulo, y el valor del determinante de la matriz cuyas filas son $2F_1 - F_4$, $F_3$, $7F_2$ y $F_4$.

***(Galicia. Junio 2001. Bloque 1. Pregunta 2)***

$$|P| = 3 \rightarrow |P^{-1}| = \frac{1}{|P|} = \frac{1}{3} \qquad |\alpha P| = \alpha^4 |P| = 3\alpha^4$$

$$\begin{aligned} \det(2F_1 - F_4, F_3, 7F_2, F_4) &= 7\det(2F_1 - F_4, F_3, F_2, F_4) = -7\det(2F_1 - F_4, F_2, F_3, F_4) = \\ &= -7\det(2F_1, F_2, F_3, F_4) = -14\det(F_1, F_2, F_3, F_4) = \\ &= -14 \cdot 3 = -42 \end{aligned}$$

## PREPARA TU SELECTIVIDAD

1 Sea $P(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 3 & 3 & x & 3 \\ 3 & 3 & 3 & x \end{vmatrix}$.

Halla dos raíces de este polinomio de grado cuatro.

***(La Rioja. Junio 2007. Propuesta A. Ejercicio 2)***

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 3 & 3 & x & 3 \\ 3 & 3 & 3 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1-x & x-1 & 0 & 0 \\ 3-3x & 0 & x-3 & 0 \\ 3-3x & 0 & 0 & x-3 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 1-x & 0 & 0 \\ 3-3x & x-3 & 0 \\ 3-3x & 0 & x-3 \end{vmatrix} + (x-1) \cdot \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 3-3x & x-3 & 0 \\ 3-3x & 0 & x-3 \end{vmatrix} =$$

$$= (x-1)(x-3)^2 + (x-1)\left[x(x-3)^2 - 2(x-3)(3-3x)\right] =$$

$$= (x-1)(x-3)^2 + (x-1)(x-3)\left[x(x-3) - 2(3-3x)\right] =$$

$$= (x-1)(x-3)\left[(x-3) + (x^2 - 3x - 6 + 6x)\right] =$$

$$= (x-1)(x-3)(x^2 + 4x - 9)$$

por tanto, $x = 1$ y $x = 3$ son dos raíces del polinomio.

2 Utiliza las propiedades de los determinantes para desarrollar el siguiente:

$$\begin{vmatrix} x & 2x+1 & 3x+2 \\ x & 2x+3 & 3x+4 \\ x & 2x+5 & 3x+6 \end{vmatrix}$$

Enuncia las propiedades que has utilizado.

*(Castilla-La Mancha. Junio 2003. Bloque 1. Pregunta B)*

$$\begin{vmatrix} x & 2x+1 & 3x+2 \\ x & 2x+3 & 3x+4 \\ x & 2x+5 & 3x+6 \end{vmatrix} = x \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2x+1 & 3x+2 \\ 1 & 2x+3 & 3x+4 \\ 1 & 2x+5 & 3x+6 \end{vmatrix} = x \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2x+1 & 3x+2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

En primer lugar, utilizamos la siguiente propiedad: si todos los elementos de una columna de la matriz están multiplicados por un mismo número, su determinante queda multiplicado por ese número. A continuación, a las dos últimas filas le restamos la primera fila de la matriz por la propiedad que dice que el determinante no varía si a una fila le sumamos una combinación lineal de las demás. Por último, el determinante es nulo porque tiene dos filas iguales.

3 Teniendo en cuenta que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = 7$, calcular el valor del siguiente determinante sin desarrollarlo:

$$\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ a+p & b+q & c+r \\ -x+a & -y+b & -z+c \end{vmatrix}$$

*(Aragón. Septiembre 2006. Opción B. Cuestión 1)*

$$\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ a+p & b+q & c+r \\ -x+a & -y+b & -z+c \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ a+p & b+q & c+r \\ -x+a & -y+b & -z+c \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ -x+a & -y+b & -z+c \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ -x & -y & -z \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = -3 \cdot 7 = -21$$

4 Hallar los valores de $k$ para que la matriz $\begin{pmatrix} -k & 4 & 5 & 6 \\ -k & 1 & 2 & 3 \\ -k & -k & 0 & -1 \\ -k & -k & -k & -1 \end{pmatrix}$:

a) No tenga inversa.

b) Tenga rango 3.

*(Canarias. Septiembre 2006. Opción B. Cuestión 3)*

a) $\begin{vmatrix} -k & 4 & 5 & 6 \\ -k & 1 & 2 & 3 \\ -k & -k & 0 & -1 \\ -k & -k & -k & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -k & 4 & 5 & 6 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & -k-4 & -5 & -7 \\ 0 & -k-4 & -k-5 & -7 \end{vmatrix} =$

$$= -k \cdot \begin{vmatrix} -3 & -3 & -3 \\ -k-4 & -5 & -7 \\ -k-4 & -k-5 & -7 \end{vmatrix} = 3k \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k+4 & 5 & 7 \\ k+4 & k+5 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= 3k \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k-3 & -2 & 0 \\ k-3 & k-2 & 0 \end{vmatrix} = 3k \cdot \begin{vmatrix} k-3 & -2 \\ k-3 & k-2 \end{vmatrix} =$$

$$= 3k[(k-3)(k-2) + 2(k-3)] = 3k^2(k-3)$$

Si $k = 0$ o si $k = 3 \rightarrow$ El determinante es nulo. La matriz no tiene inversa.

b) Si $k = 0$ o si $k = 3 \rightarrow$ El menor de orden 4 es igual a cero.
Comprobamos si hay un menor de orden 3 no nulo.

- Si $k = 0$:

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \rightarrow \text{El rango de la matriz es 3.}$$

- Si $k = 3$:

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -12 \neq 0 \rightarrow \text{El rango de la matriz es 3.}$$

5 **Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -a \\ 2a & 1 & -1 \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}$:**

**a) Determinar el rango de $M$ según los valores del parámetro $a$.**

**b) Determinar para qué valores de $a$ existe matriz inversa de $M$. Calcular dicha matriz inversa para $a = 2$.**

***(Madrid. Junio 2006. Opción B. Ejercicio 3)***

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -a \\ 2a & 1 & -1 \\ 2 & a & 1 \end{vmatrix} = 2a - 2a^3 = 2a(1 - a^2)$

b) - Si $a \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\} \rightarrow$ El menor de orden 3 es distinto de cero. El rango de la matriz es 3.

- Si $a = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow$ El rango de la matriz es 2.

- Si $a = 1 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow$ El rango de la matriz es 2.

- Si $a = -1 \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \rightarrow$ El rango de la matriz es 2.

6 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ y $T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ se pide:

a) Probar que la matriz $T$ tiene inversa, $T^{-1}$, y calcular dicha inversa $T^{-1}$.

b) Dada la ecuación con matriz incógnita $B$, $A = T^{-1}BT$, calcular el determinante de $B$.

c) Obtener los elementos de la matriz $B$ considerada en el apartado b).

*(C. Valenciana. Junio 2006. Ejercicio B. Problema 1)*

a) $|T| = -1 \neq 0 \rightarrow T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

b) $A = T^{-1}BT \rightarrow B = TAT^{-1} \rightarrow |B| = |T| \cdot |A| \cdot |T^{-1}| = |T| \cdot |A| \cdot \dfrac{1}{|T|} = |A| = 2$

c) $B = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$