12 Integrales definidas

LITERATURA Y MATEMÁTICAS

Los crímenes de Oxford

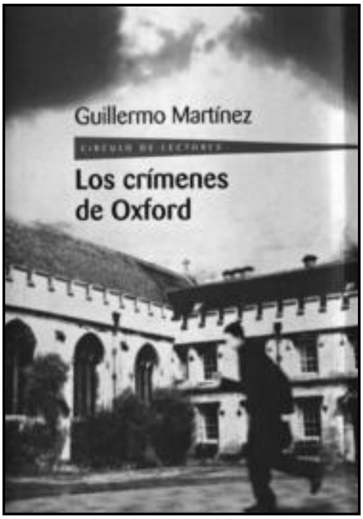
[En Oxford han ocurrido tres asesinatos y su autor, antes o después de cometer cada uno, le ha enviado a un profesor de matemáticas un símbolo. Un joven que le ayuda en la investigación de estos sucesos trata de descubrir el cuarto símbolo, pues piensa que conociéndolo tal vez se pueda evitar el cuarto crimen.]

Fui a la sección de historia de la matemática, y seguí con un dedo los títulos en los lomos. Un libro sobresalía un poco de los demás, como si alguien lo hubiera consultado recientemente y no hubiera sido lo bastante cuidadoso al volverlo a su lugar. […] La ilustración de la tapa era una pirámide de diez puntos envuelta en llamas. El título –*La hermandad de los pitagóricos*– quedaba por muy poco fuera del alcance del fuego. […]

Fui hasta uno de los escritorios de la biblioteca y lo abrí bajo la lámpara. No tuve que pasar más de dos o tres páginas. Allí estaba. Allí había estado todo el tiempo, en su simplicidad abrumadora. Las nociones más antiguas y elementales de la matemática, no separadas del todo todavía de sus vestiduras místicas. La representación de los números en la doctrina pitagórica como principios arquetípicos de las potencias divinas. El círculo era el Uno, la unidad en su perfección, la mónada, el principio de todo, encerrado y completo en su propia línea. El Dos era el símbolo de la multiplicidad, de todas las oposiciones y dualidades, de los engendramientos. Se formaba con la intersección de dos círculos y la figura oval, como una almendra, encerrada en el centro, era llamada *Vesica Piscis*, la vejiga del pez. El Tres, la tríada, era la unión entre dos extremos, la posibilidad de dar orden y armonía a las diferencias. Era el espíritu que abraza lo mortal con lo inmortal en un todo. Pero también, el Uno era el punto, el Dos era la recta que unía dos puntos, el Tres era el triángulo y era al mismo tiempo el plano. Uno, dos, tres, aquello era todo, la serie no era más que la sucesión de los números naturales. Di vuelta a la página para estudiar el símbolo que representaba al número Cuatro. Era la *tetractis*, la pirámide de diez puntos que había visto en la tapa, el emblema y la figura sagrada de la secta. Los diez puntos eran la suma de uno, más dos, más tres, más cuatro. Representaban a la materia y a los cuatro elementos. Los pitagóricos creían que toda la matemática estaba cifrada en aquel símbolo, que era a la vez el espacio tridimensional y la música de las esferas celestes.

GUILLERMO MARTÍNEZ

Los crímenes de Oxford
Guillermo Martínez



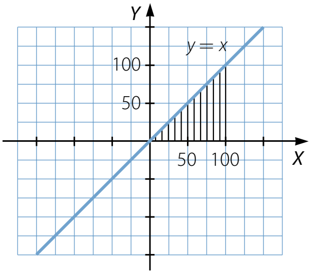
La primera víctima, una mujer mayor, inválida y enferma de cáncer, vivía con su única nieta en una casa donde la encontró Arthur Seldom asfixiada con un cojín, según le informó después la policía. Seldom mantenía una relación amistosa con las dos mujeres desde hacía muchos años y había ido a visitarlas –le dijo al inspector– porque en su despacho apareció una nota con este mensaje: «El primero de la serie», debajo, la dirección de la casa, una hora –3 p.m.– y un círculo negro. A los pocos días apareció, pegada en la puerta del Instituto, una nota: «El segundo de la serie». Raddiffe Hospital, 2.15 p.m., y un dibujo que podía representar esquemáticamente un pez. A esa hora, en ese hospital falleció un hombre de más de noventa años.

El profesor Seldom había escrito un libro sobre sucesiones de símbolos regidos por una regla lógica, en el que dedicaba un capítulo a las pautas de los crímenes en serie. Estos estudios avalaban su hipótesis de que el asesino utiliza sus crímenes como un desafío intelectual. Pero antes de que hubieran determinado el tercer símbolo, ocurre la tercera muerte, acompañada con dos notas. La primera decía: «El tercero de la serie» y la segunda contenía sólo una palabra: «triángulo». Seldom descubre que estos tres símbolos corresponden a la representación pitagórica de los números, un hecho que también confirma, como se lee el párrafo seleccionado, el joven matemático que le acompaña. Por lo tanto, el cuarto símbolo debía de ser la tetractis. Cuando se lo comunican al inspector, decide publicar en la primera página de un periódico local la historia completa de las tres muertes con los tres símbolos, y, en las páginas interiores, una nota del profesor sobre la tetractis. Cree que el asesino se dará cuenta de que ha sido derrotado intelectualmente y dejará de matar. La realidad, sin embargo, pronto destruye esta esperanza, porque a los pocos días, un autobús con diez niños cae desde un puente y mueren todos. Lo más curioso es que una persona, antes del suceso, había dejado en el servicio de emergencia de un hospital este mensaje: «El cuarto de la serie es la *tetractis*. Diez puntos en el triángulo ciego». Con estas diez muertes acaba la «serie de Oxford». ¿Quién es el asesino? ¿Qué lo indujo a cometer estos crímenes? Conocer el desenlace de la novela es el merecido premio para quienes la lean.

Considera la progresión aritmética: 1, 2, 3, 4, … y calcula la suma de todos los números naturales comprendidos entre 1 y 100. ¿Cómo podríamos sumar *todos* los números reales comprendidos entre 1 y 100? Una interpretación geométrica del problema te ayudará a resolverlo.

Por ser una progresión aritmética la suma vale:

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{100\,(1 + 100)}{2} = 5.050$$



La suma de todos los números reales comprendidos entre 1 y 100 es la suma de las infinitas alturas de la figura representada. Al ser un conjunto de números no numerable, siempre existe un número que podemos sumar y por tanto, la suma de los números reales comprendidos en cualquier intervalo es infinita.

Integrales definidas

ANTES DE COMENZAR… RECUERDA

001 Calcula la suma de los 10 primeros términos de la progresión:

3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35, 39, …

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{10(3+39)}{2} = 210$$

002 Dada la progresión aritmética con $a_n = 10 - 5n$, halla la suma de los 25 primeros términos.

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{25(5-115)}{2} = -1.375$$

003 Determina los puntos de corte en cada caso.

a) $f(x) = 3x^2 - 4$
$g(x) = x$

b) $f(x) = 3x^2 + 2x - 6$
$g(x) = 4x^2 + x - 8$

a) $3x^2 - 4 = x \rightarrow 3x^2 - x - 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \dfrac{4}{3} \end{cases}$

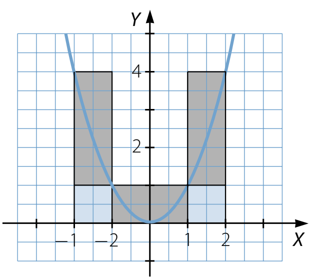
Los puntos de corte son: $(-1, -1)$ y $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$

b) $3x^2 + 2x - 6 = 4x^2 + x - 8 \rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$

Los puntos de corte son: $(-1, -5)$ y $(2, 10)$.

ACTIVIDADES

001 Representa gráficamente la función $f(x) = x^2$ en el intervalo $[-2, 2]$.
Toma una partición de este intervalo y calcula sus sumas inferiores y superiores.

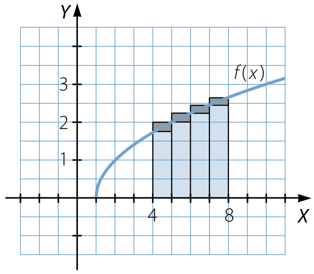


Tomamos la partición $P = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

$$S = \sum_{i=1}^{4} M_i(x_i - x_{i-1}) = 4 + 1 + 1 + 4 = 10$$

$$s = \sum_{i=1}^{4} m_i(x_i - x_{i-1}) = 1 + 0 + 0 + 1 = 2$$

002 **Representa gráficamente la función $f(x) = \sqrt{x-1}$ en el intervalo [4, 8]. Toma dos particiones de este intervalo y calcula sus sumas inferiores y superiores.**



Tomamos, por ejemplo, la partición $P = \{4, 5, 6, 7, 8\}$.

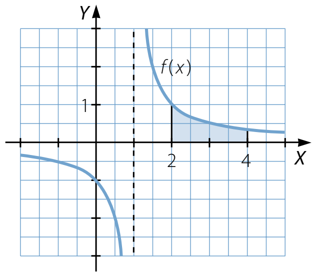
$$S = \sum_{i=1}^{4} M_i(x_i - x_{i-1}) = 2 + \sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{7}$$

$$s = \sum_{i=1}^{4} m_i(x_i - x_{i-1}) = \sqrt{3} + 2 + \sqrt{5} + \sqrt{6}$$

003 **Representa gráficamente la función $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ en el intervalo [2, 4].**

a) Toma dos particiones de este intervalo, siendo una más fina que la otra.

b) Determina las sumas inferiores y superiores de cada partición.



a) Tomamos la partición $P = \{2, 3, 4\}$.

Una partición más fina $P_1 = \{2; 2{,}5; 3; 3{,}5; 4\}$.

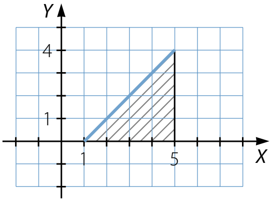
b) $$S_P = \sum_{i=1}^{2} M_i(x_i - x_{i-1}) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$s_P = \sum_{i=1}^{2} m_i(x_i - x_{i-1}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

$$S_{P_1} = \sum_{i=1}^{4} M_i(x_i - x_{i-1}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{77}{60}$$

$$s_{P_1} = \sum_{i=1}^{4} m_i(x_i - x_{i-1}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{57}{60}$$

004 **Calcula, utilizando la fórmula, la superficie del triángulo coloreado. Después, toma una partición y calcula sus sumas inferiores y superiores.**



$$\text{Área} = \frac{B \cdot h}{2} = \frac{4 \cdot 4}{2} = 8$$

Tomamos la partición $P = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

$f(x) = x - 1$

$$S = \sum_{i=1}^{4} M_i(x_i - x_{i-1}) = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

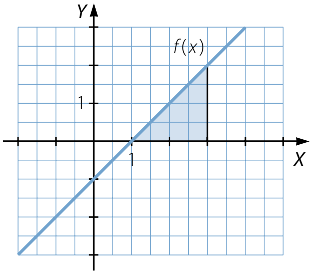
$$s = \sum_{i=1}^{4} m_i(x_i - x_{i-1}) = 0 + 1 + 2 + 3 = 6$$

El área está comprendida entre la suma inferior, s, y la suma superior, S.

005 **Determina el valor del área que encierran la función $f(x) = x - 1$, el eje X y las rectas $x = 1$ y $x = 3$.**

a) Utilizando métodos geométricos.

b) Mediante la definición de integral definida.



a) $\text{Área} = \dfrac{B \cdot h}{2} = \dfrac{2 \cdot 2}{2} = 2$

b) Tomamos una sucesión de particiones:

$$\left\{1, 1 + 2 \cdot \frac{1}{n}, 1 + 2 \cdot \frac{2}{n}, \dots, 1 + 2 \cdot \frac{n}{n} = 3\right\}$$

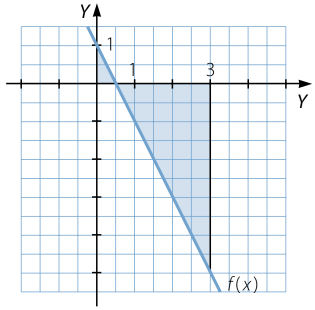
$$s_n = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}\left(1 + \frac{2(i-1)}{n} - 1\right) \cdot \frac{2}{n} = \frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(i-1) = \frac{2(n-1)}{n}$$

$$\int_1^3 (x-1)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{2(n-1)}{n} = 2$$

006 **Halla el valor del área que encierran la función $f(x) = 1 - 2x$, el eje X y las rectas $x = 0$ y $x = 3$.**

a) Utilizando métodos geométricos.

b) Mediante la definición de integral definida.



a) Descomponemos el área pedida en otras dos más pequeñas: A_1 y A_2

$$\text{Área} = A_1 + A_2 = \frac{1 \cdot \frac{1}{2}}{2} + \frac{\frac{5}{2} \cdot 5}{2} = \frac{13}{2}$$

b) Calculamos cada una de las áreas con la definición de integral.

Para A_1 tomamos: $\left\{0, \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n}, \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{n}, \dots, \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{n} = \frac{1}{2}\right\}$

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}\left(1 - 2 \cdot \frac{(i-1)}{2n}\right) \cdot \frac{1}{2n} =$$

$$= \frac{1}{2n}\left(n - \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n-1)}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{n-1}{4n}$$

$$A_1 = \int_0^{1/2}\left(\frac{1}{2} - \frac{n-1}{4n}\right)dx = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{n-1}{4n}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

Para A_2 tomamos: $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{5}{2} \cdot \frac{2}{n}, \dots, \frac{1}{2} + \frac{5}{2} \cdot \frac{n}{n} = 3\right\}$

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}\left(1 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{5(i-1)}{2n}\right)\right) \cdot \frac{5}{2n} = -\frac{25(n-1)}{4n}$$

$$\int_{1/2}^{3}\left(-\frac{25(n-1)}{4n}\right)dx = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{25(n-1)}{4n}\right) = -\frac{25}{4}$$

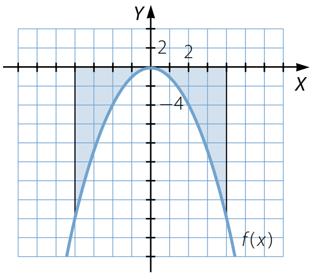
Como las áreas no pueden ser negativas: $A_2 = \frac{25}{4}$

$$A_1 + A_2 = \frac{1}{4} + \frac{25}{4} = \frac{13}{2}$$

007 **Representa la función $f(x) = -x^2$ en el intervalo $[-4, 4]$.**

a) Toma una partición del intervalo y calcula sus sumas inferiores y superiores. ¿Qué signo tienen?

b) ¿Representan una aproximación al área comprendida entre la función y el eje X en ese intervalo?



a) Tomamos la partición $P = \{-4, -2, 0, 2, 4\}$.

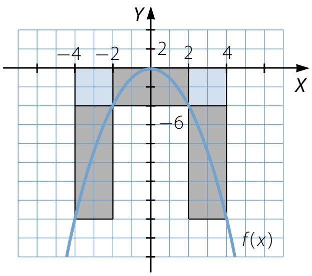
$f(x) = -x^2$

$$S = \sum_{i=1}^{4} M_i(x_i - x_{i-1}) = -32 - 8 - 8 - 32 = -80$$

$$s = \sum_{i=1}^{4} m_i(x_i - x_{i-1}) = -8 - 0 - 0 - 8 = -16$$

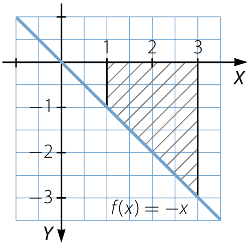
Tienen signo negativo.

b)



Las sumas inferior y superior tomadas en positivo representan una aproximación por defecto y por exceso respectivamente del área en ese intervalo. Cuanto más fina sea la partición mejor será la aproximación.

008 **¿Cómo calcularías el área de la zona coloreada?**



Geométricamente es un trapecio de bases 1 y 3, y altura 2, por tanto su área es:

$$\text{Área} = \frac{1+3}{2} \cdot 2 = 4$$

Mediante la integral definida, teniendo en cuenta que es una función negativa, el resultado será negativo.

$$f(x) = -x$$

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}\left(-1 - \frac{2(i-1)}{n}\right)\cdot\frac{2}{n} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{2}{n} - \frac{4(i-1)}{n^2}\right) = -2 - \frac{2(n-1)}{n}$$

$$\int_1^3 -x\,dx = \lim_{n\to\infty}\left(-2 - \frac{2(n-1)}{n}\right) = -4 \to \text{Área} = 4$$

009 **Utiliza las propiedades de las integrales definidas para calcular esta integral:**

$$\int_0^3 (4x - 2)\,dx$$

$$\int_0^3 (4x-2)\,dx = \int_0^3 4x\,dx - \int_0^3 2\,dx$$

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}\left(4\cdot\frac{3(i-1)}{n}\right)\cdot\frac{3}{n} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{36(i-1)}{n^2}\right) = \frac{18(n-1)}{n}$$

$$\to \int_0^3 4x\,dx = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{18(n-1)}{n}\right) = 18$$

$$s'_n = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} 2\cdot\frac{3}{n} = 6 \to \int_0^3 4x\,dx = \lim_{n\to\infty} 6 = 6$$

$$\int_0^3 (4x-2)\,dx = \int_0^3 4x\,dx - \int_0^3 2\,dx = 18 - 6 = 12$$

010 **Usa las propiedades de las integrales definidas para justificar la siguiente desigualdad:**

$$\int_1^5 x\,dx \leq \int_1^5 x^2\,dx$$

Como x y x^2 son funciones continuas en el intervalo $(1, 5)$ y $x \leq x^2$ en dicho intervalo se tiene que:

$$\int_1^5 x\,dx \leq \int_1^5 x^2\,dx$$

011 **Aplica el teorema del valor medio a la función $f(x) = 4 - x^2$ en el intervalo $[0, 2]$. Calcula dicho valor medio e interpreta geométricamente el resultado.**

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}\left(4 - \left(\frac{2i}{n}\right)^2\right)\cdot\frac{2}{n} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{8}{n} - \frac{8i^2}{n^3}\right) = 8 - \frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2$$

Vamos a calcular $\sum_{i=1}^{n} i^2$:

Para $n = 1 \rightarrow \sum_{i=1}^{n} i^2 = 1$

Para $n = 2 \rightarrow \sum_{i=1}^{n} i^2 = 5$

Para $n = 3 \rightarrow \sum_{i=1}^{n} i^2 = 14$

Para $n = 4 \rightarrow \sum_{i=1}^{n} i^2 = 30$

Para $n = 5 \rightarrow \sum_{i=1}^{n} i^2 = 55$

Para $n = 6 \rightarrow \sum_{i=1}^{n} i^2 = 91$

Calcular $\sum_{i=1}^{n} i^2$ equivale a encontrar el término general, a_n, de la sucesión $\{1, 5, 14, 30, 55, 91, \ldots\}$.

$5 - 1 = 4 \qquad 14 - 5 = 9 \qquad 30 - 14 = 16 \qquad 55 - 30 = 25 \qquad 91 - 55 = 36 \qquad \ldots$

Como la diferencia entre términos consecutivos no es constante no es una progresión aritmética (polinomio de grado 1).

Continuamos haciendo diferencias sucesivas.

$$\begin{array}{ccccccccccccl}
1 & & 5 & & 14 & & 30 & & 55 & & 91 & & \\
 & 4 & & 9 & & 16 & & 25 & & 36 & & & \rightarrow \text{No es un polinomio de grado 1.} \\
 & & 5 & & 7 & & 9 & & 11 & & & & \rightarrow \text{No es un polinomio de grado 2.} \\
 & & & 2 & & 2 & & 2 & & & & & \rightarrow \text{Es un polinomio de grado 3.}
\end{array}$$

El término general será de la forma: $an^3 + bn^2 + cn + d$. Sustituyendo para los distintos valores de n obtenemos un sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} a + b + c + d = 1 \\ 8a + 4b + 2c + d = 5 \\ 27a + 9b + 3c + d = 14 \\ 64a + 16b + 4c + d = 30 \end{array}\right\} \rightarrow a = \frac{1}{3}, b = \frac{1}{2}, c = \frac{1}{6}, d = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

$$S_n = 8 - \frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 = 8 - \frac{8}{n^3} \cdot \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

$$\int_0^2 (4 - x^2)\,dx = \lim_{n\to\infty}\left(8 - \frac{8}{n^3} \cdot \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}\right) = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$$

$$\int_0^2 (4 - x^2)dx = f(c) \cdot 2 \rightarrow \frac{16}{3} = f(c) \cdot 2 \rightarrow f(c) = \frac{8}{3} \rightarrow 4 - c^2 = \frac{8}{3} \rightarrow c = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

012 **Halla el valor medio integral de la función $f(x) = x - x^2$ en el intervalo [0, 1] y el punto donde se alcanza dicho valor medio.**

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} M_i\left(x_i - x_{i-1}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n} - \left(\frac{i}{n}\right)^2\right)\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i - \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 =$$

$$= \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{n^3} \cdot \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

$$\int_0^1 (x - x^2)dx = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n(n+1)}{2n^2} - \frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$$

$$\int_0^1 (x-x^2)dx = f(c)\cdot 1 \rightarrow \frac{1}{6} = f(c) \rightarrow c - c^2 = \frac{1}{6} \rightarrow \begin{cases} c = \dfrac{1+\sqrt{\dfrac{5}{3}}}{2} \rightarrow c \in [0,1] \\ c = \dfrac{1-\sqrt{\dfrac{5}{3}}}{2} \rightarrow c \notin [0,1] \end{cases}$$

$$\rightarrow c = \frac{1+\sqrt{\dfrac{5}{3}}}{2} \text{ y su valor medio es } f(c) = \frac{1}{6}.$$

013 **Determina la expresión de la función integral, o función área, de $f(x) = x^2 - 4$ en el intervalo [0, 5].**

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}\left(\left(\frac{xi}{n}\right)^2 - 4\right)\cdot\frac{x}{n} = \left(\frac{x^3}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2\right) - 4 =$$

$$= \frac{x^3}{n^3}\cdot\frac{2n^3+3n^2+n}{6} - 4$$

$$\int_0^x (t^2 - 4)dt = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x^3}{n^3}\cdot\frac{2n^3+3n^2+n}{6} - 4\right) = \frac{x^3}{3} - 4$$

014 **Sin hallar la integral, calcula la derivada de $A(x) = \int_0^x 4t^2\, dt$.**

Por ser continua la función aplicando el teorema fundamental del cálculo integral, la derivada es: $A'(x) = 4x^2$

015 **Determina $[F(x)]_4^7$, sabiendo que $F(x)$ es una primitiva de la siguiente función:**

$$f(x) = -x^2 - 2$$

$$F(x) = \int f(x)\,dx = \int(-x^2 - 2)\,dx = \frac{-x^3}{3} - 2x + k$$

$$[F(x)]_4^7 = F(7) - F(4) = \frac{-7^3}{3} - 2\cdot 7 + k - \left(\frac{-4^3}{3} - 2\cdot 4 + k\right) = -99$$

016 **Calcula el valor del parámetro a, sabiendo que:**

$$\left[\frac{e^x}{ax-1}\right]_0^1 = e + 1$$

$$\left[\frac{e^x}{ax-1}\right]_0^1 = e+1 \rightarrow \frac{e}{a-1} - \frac{1}{-1} = e+1 \rightarrow a = 2$$

Integrales definidas

017 **Resuelve estas integrales definidas.**

a) $\displaystyle\int_{-2}^{2} (2x^3 - 4x + 3)\, dx$ b) $\displaystyle\int_{0}^{e} -\frac{3x}{x^2+1}\, dx$

a) $\displaystyle\int_{-2}^{2} (2x^3 - 4x + 3)\, dx = \left[\frac{x^4}{2} - 2x^2 + 3x\right]_{-2}^{2} = 14 - 2 = 12$

b) $\displaystyle\int_{0}^{e} \frac{-3x}{x^2+1}\, dx = \left[\frac{-3}{2}\ln\left|x^2+1\right|\right]_{0}^{e} = \frac{-3}{2}\ln\left|e^2+1\right| - 0 = \frac{-3}{2}\ln\left|e^2+1\right|$

018 **Calcula las integrales definidas.**

a) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} (2\, sen\, x - 4x)\, dx$ b) $\displaystyle\int_{1}^{4} \frac{x-2}{x^2}\, dx$

a) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} (2\, sen\, x - 4x)\, dx = \left[-2\cos x - 2x^2\right]_{0}^{\pi} = (2 - 2\pi^2) - (-2) = 4 - 2\pi^2$

b) $\displaystyle\int_{1}^{4} \frac{x-2}{x^2}\, dx = \left[\ln|x| + \frac{2}{x}\right]_{1}^{4} = \ln 4 + \frac{1}{2} - 2 = \ln 4 - \frac{3}{2}$

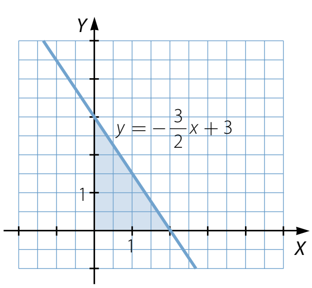
019 **Calcula, utilizando integrales, primero, y aplicando la fórmula del área del triángulo, después, el área comprendida entre la función $y = -\frac{3}{2}x + 3$ y los ejes de coordenadas.**

Calculamos los cortes de la recta con los ejes (0, 3) y (2, 0).

Geométricamente: $A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{2 \cdot 3}{2} = 3$

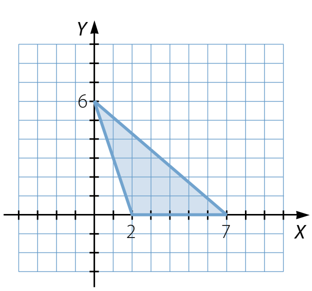
Área de la función:

$\displaystyle\int_{0}^{2} \left(\frac{-3}{2}x + 3\right) dx = \left[\frac{-3}{4}x^2 + 3x\right]_{0}^{2} = 3 - 0 = 3$



020 **Halla, mediante integrales, el área del triángulo determinado por los puntos (0, 6), (2, 0) y (7, 0).**
Aplica la fórmula del área de un triángulo para comprobar que el resultado es el mismo.

Para calcular el área pedida, la hallamos mediante la diferencia del área del triángulo que determinan los puntos (0, 0) (0, 6) y (7, 0), menos el área del triángulo que determinan los puntos (0, 0) (0, 6) y (2, 0).



$$A = \int_0^7 \left(\frac{-6}{7}x + 6\right)dx - \int_0^2 (-3x+6)\,dx =$$

$$= \left[\frac{-3}{7}x^2 + 6x\right]_0^7 - \left[\frac{-3}{2}x^2 + 6x\right]_0^2 = 21 - 6 = 15$$

Área del triángulo:

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{(7-2)\cdot 6}{2} = 15$$

021 **Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $f(x) = 6x - x^2$ y $g(x) = x^2 - 2x$.**

Calculamos los puntos de corte de las dos funciones.

$$f(x) - g(x) = 0 \rightarrow (6x - x^2) - (x^2 - 2x) = 0 \rightarrow -2x^2 + 8x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

$$A = \left| \int_0^4 (f(x) - g(x))\,dx \right| = \left| \int_0^4 (8x - 2x^2)\,dx \right| = \left| \left[4x^2 - \frac{2x^3}{3}\right]_0^4 \right| = \frac{64}{3}$$

022 **Halla el área de la región que delimitan las gráficas de las funciones $y = x^3 - 2x$ e $y = -x^2$.**

Calculamos los puntos de corte de las dos funciones.

$$f(x) - g(x) = 0 \rightarrow (x^3 - 2x) - (-x^2) = 0 \rightarrow x^3 + x^2 - 2x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$A = \left| \int_{-2}^0 (x^3 + x^2 - 2x)\,dx \right| + \left| \int_0^1 (x^3 + x^2 - 2x)\,dx \right| =$$

$$= \left| \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2\right]_{-2}^0 \right| + \left| \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2\right]_0^1 \right| = \frac{8}{3} + \left|\frac{-5}{12}\right| = \frac{37}{12}$$

023 **Determina el volumen del cuerpo de revolución engendrado por la función $f(x) = \frac{2x-1}{2}$ en el intervalo $\left[\frac{1}{2}, 4\right]$ al girar alrededor del eje X.**

$$V = \left| \int_{1/2}^4 \pi \left(\frac{2x-1}{2}\right)^2 dx \right| = \pi \left| \int_{1/2}^4 \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right)dx \right| = \pi \left| \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{4}\right]_{1/2}^4 \right| =$$

$$= \pi \left| \frac{43}{3} - \frac{1}{24} \right| = \frac{343}{24}\pi$$

024 Halla el volumen del cuerpo de revolución engendrado por la función $f(x)=\sqrt{\frac{x^2-2}{2}}$ en el intervalo $\left[\frac{3}{2}, 3\right]$ al girar alrededor del eje X.

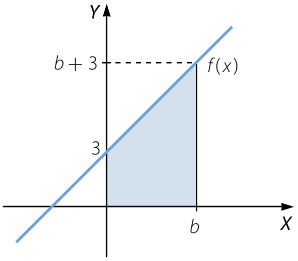
$$V=\left|\int_{3/2}^{3}\pi\left(\sqrt{\frac{x^2-2}{2}}\right)^2 dx\right|=\pi\left|\int_{3/2}^{3}\left(\frac{x^2}{2}-1\right)dx\right|=\pi\left|\left[\frac{x^3}{6}-x\right]_{3/2}^{3}\right|=$$

$$=\pi\left|\frac{3}{2}-\frac{15}{16}\right|=\frac{39\pi}{16}$$

025 Utilizando áreas de rectángulos, demuestra que la integral definida de la función $f(x)=x+3$ en el intervalo $[0, b]$ es:

$$\int_0^b (x+3)\,dx=\frac{b^2}{2}+3b$$

Comprueba que el resultado anterior coincide con el cálculo del área que se obtiene aplicando las fórmulas de la geometría.



$$S_n=\sum_{i=1}^{n}M_i\left(x_i-x_{i-1}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{bi}{n}+3\right)\cdot\frac{b}{n}=\frac{b^2}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i+\frac{b}{n}\sum_{i=1}^{n}3=\frac{b^2(n+1)}{2n}+3b$$

$$\int_0^b (x+3)dx=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b^2(n+1)}{2n}+3b\right)=\frac{b^2}{2}+3b$$

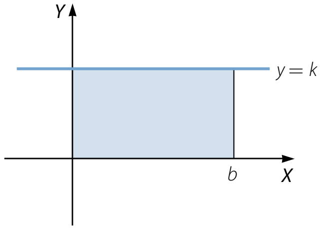
$$\text{Área del trapecio}=\frac{(B+b)h}{2}=\frac{((b+3)+3)b}{2}=\frac{b^2}{2}+3b$$

026 Utilizando la interpretación geométrica de la integral definida, justifica los resultados de las siguientes integrales.

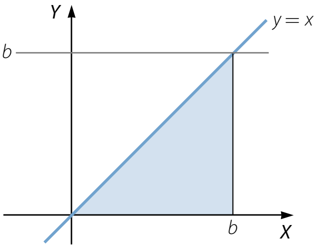
a) $\int_0^b k\,dx=kb$

b) $\int_0^b x\,dx=\frac{b^2}{2}$

a) Es el área de un rectángulo de base b y altura k.



b) Es el área de un triángulo de base b y altura b.



027 **Comprueba que, para cualquier número natural n, se verifica:**

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Utilizando la definición, halla la integral de la función $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0, b]$, e interpreta geométricamente el resultado.

Vamos a calcular $\sum_{i=1}^{n} i^2$:

Para $n = 1 \rightarrow \sum_{i=1}^{n} i^2 = 1$

Para $n = 2 \rightarrow \sum_{i=1}^{n} i^2 = 5$

Para $n = 3 \rightarrow \sum_{i=1}^{n} i^2 = 14$

Para $n = 4 \rightarrow \sum_{i=1}^{n} i^2 = 30$

Para $n = 5 \rightarrow \sum_{i=1}^{n} i^2 = 55$

Para $n = 6 \rightarrow \sum_{i=1}^{n} i^2 = 91$

Calcular $\sum_{i=1}^{n} i^2$ equivale a encontrar el término general, a_n, de la sucesión $\{1, 5, 14, 30, 55, 91, \ldots\}$.

$5 - 1 = 4 \qquad 14 - 5 = 9 \qquad 30 - 14 = 16 \qquad 55 - 30 = 25 \qquad 91 - 55 = 36 \qquad \ldots$

Como la diferencia entre términos consecutivos no es constante no es una progresión aritmética (polinomio de grado 1).

Continuamos haciendo diferencias sucesivas.

1	5	14	30	55	91	
4	9	16	25	36		→ No es un polinomio de grado 1.
5	7	9	11			→ No es un polinomio de grado 2.
2	2	2				→ Es un polinomio de grado 1.

El término general será de la forma: $an^3 + bn^2 + cn + d$. Sustituyendo para los distintos valores de n obtenemos un sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} a + b + c + d = 1 \\ 8a + 4b + 2c + d = 5 \\ 27a + 9b + 3c + d = 14 \\ 64a + 16b + 4c + d = 30 \end{array}\right\} \rightarrow a = \frac{1}{3}, b = \frac{1}{2}, c = \frac{1}{6}, d = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

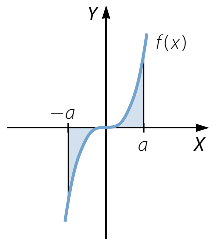
$$\int_0^b x^2 dx = \lim_{n \to \infty} \left(b^3 \cdot \frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3} \right) = \frac{b^3}{3}$$

028 Dibuja las gráficas de las siguientes funciones, y razona por qué la integral definida de cada una en el intervalo $[-a, a]$ es nula.

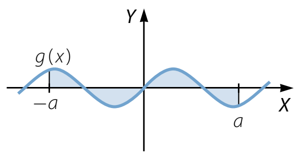
a) $f(x) = x^3$

b) $g(x) = sen\ x$

a)



b)



En ambos casos son funciones impares, por lo que el área de la región correspondiente al intervalo $[0, a]$, es igual que la del intervalo $[-a, 0]$, pero la función toma signo contrario, por lo que un área anula a la otra.

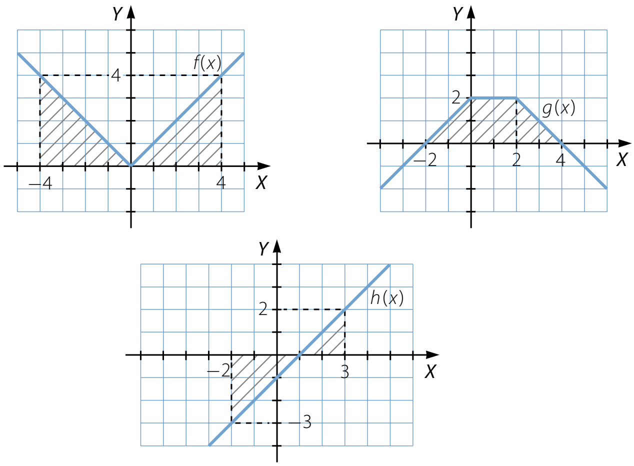
029 Calcula la integral definida a partir de su significado geométrico.

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\, dx$$

La función es la semicircunferencia de radio r, por lo que la integral es el área del semicírculo de radio r.

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \frac{\pi r^2}{2}$$

030 Las siguientes figuras muestran las gráficas de las funciones f, g y h.



Calcula:

a) $\int_{-4}^{4} f(x)\,dx$ b) $\int_{-2}^{4} g(x)\,dx$ c) $\int_{-2}^{3} h(x)\,dx$

a) Geométricamente es el área de dos triángulos con misma base y altura.

$$2 \cdot \frac{4 \cdot 4}{2} = 16$$

$$\int_{-4}^{4} f(x)\,dx = \int_{-4}^{0} -x\,dx + \int_{0}^{4} x\,dx = \frac{16}{2} + \frac{16}{2} = 16$$

b) Geométricamente es el área de un trapecio de bases 6 y 2, y altura 2.

$$\frac{6+2}{2} \cdot 2 = 8$$

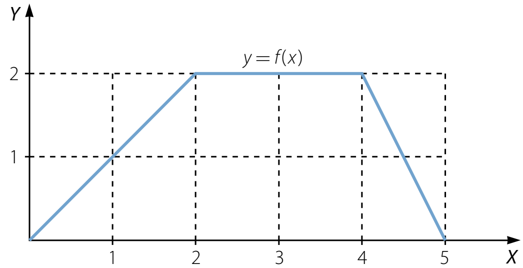
$$\int_{-2}^{4} g(x)\,dx = \int_{-2}^{0} (x+2)\,dx + \int_{0}^{2} 2\,dx + \int_{2}^{4} (4-x)\,dx = 2 + 4 + 2 = 8$$

c) Geométricamente es la diferencia del área de dos triángulos.

$$\frac{2 \cdot 2}{2} - \frac{3 \cdot 3}{2} = -\frac{5}{2}$$

$$\int_{-2}^{3} h(x)\,dx = \int_{-2}^{3} (x-1)\,dx = \int_{-2}^{1} (x-1)\,dx + \int_{1}^{3} (x-1)\,dx = \frac{2 \cdot 2}{2} - \frac{3 \cdot 3}{2} = -\frac{5}{2}$$

031 **Considere la función $y = f(x)$ definida para $x \in [0, 5]$ que aparece dibujada en la figura.**



Calcule $\int_{0}^{3} f(x)\,dx$.

(Cataluña. Año 2006. Serie 3. Cuestión 2)

Geométricamente es el área de un trapecio de bases 3 y 1, y altura 2: $\frac{3+1}{2} \cdot 2 = 4$

$$\int_{0}^{3} f(x)\,dx = 4$$

032 Aplicando las propiedades de la integral definida, calcula:

a) $\displaystyle\int_0^4 (2+x)\,dx$

c) $\displaystyle\int_0^2 (x^2-3x+5)\,dx$

b) $\displaystyle\int_{-3}^2 x^2\,dx$

d) $\displaystyle\int_{-1}^1 |x|\,dx$

a) $$S_n=\sum_{i=1}^n M_i(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^n 2\cdot\frac{2}{n}=\sum_{i=1}^n\frac{4}{n}=4\to\int_0^2 2\,dx=4$$

$$S'_n=\sum_{i=1}^n M_i(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^n\frac{2i}{n}\cdot\frac{2}{n}=\frac{2n(n+1)}{n^2}\to\int_0^2 x\,dx=\lim_{n\to\infty}\frac{2n(n+1)}{n^2}=2$$

$$\int_0^2(2+x)\,dx=\int_0^2 2\,dx+\int_0^2 x\,dx=4+2=6$$

b) $$S_n=\sum_{i=1}^n M_i(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^n\left(-3+\frac{5i}{n}\right)^2\cdot\frac{5}{n}=\frac{5}{n}\cdot\sum_{i=1}^n\left(9-\frac{30i}{n}+\frac{25i^2}{n^2}\right)=$$

$$=\frac{5}{n}\cdot\left(9n-\frac{30}{n}\cdot\sum_{i=1}^n i+\frac{25}{n^2}\sum_{i=1}^n i^2\right)=45-\frac{150n(n+1)}{2n}+\frac{125(2n^3+3n^2+n)}{6n^3}$$

c) $$\int_{-3}^2 x^2\,dx=\lim_{n\to\infty}\left(45-\frac{150n(n+1)}{2n}+\frac{125(2n^3+3n^2+n)}{6n^3}\right)=$$

$$=45-\frac{150}{2}+\frac{250}{6}=\frac{35}{3}$$

$$S_n=\sum_{i=1}^n M_i(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^n\left(\frac{2i}{n}\right)^2\cdot\frac{2}{n}=\frac{2}{n}\cdot\sum_{i=1}^n\frac{4i^2}{n^2}=\frac{8(2n^3+3n^2+n)}{6n^3}$$

$$\to\int_0^2 x^2\,dx=\lim_{n\to\infty}\frac{8(2n^3+3n^2+n)}{6n^3}=\frac{8}{3}$$

$$S'_n=\sum_{i=1}^n M_i(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^n\left(\frac{2i}{n}\right)\cdot\frac{2}{n}=\frac{2}{n}\cdot\sum_{i=1}^n\frac{2i}{n}=\frac{2n(n+1)}{n^2}$$

$$\to\int_0^2 x\,dx=\lim_{n\to\infty}\frac{2n(n+1)}{n^2}=2$$

$$S''_n=\sum_{i=1}^n M_i(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^n 5\cdot\frac{2}{n}=\frac{2}{n}\cdot\sum_{i=1}^n 5=\frac{10n}{n}=10$$

$$\to\int_0^2 5\,dx=\lim_{n\to\infty}10=10$$

$$\int_0^2(x^2-3x+5)\,dx=\int_0^2 x^2\,dx-3\int_0^2 x\,dx+\int_0^2 5\,dx=\frac{8}{3}-3\cdot2+10=\frac{20}{3}$$

d) $S_n = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}\left(-1 + \frac{i}{n}\right)\cdot\frac{1}{n} = -1 + \sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2} = -1 + \frac{n(n+1)}{2n^2}$

$$\rightarrow \int_{-1}^{0} x\,dx = \lim_{n\to\infty}\left(-1 + \frac{n(n+1)}{2n^2}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$S'_n = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\cdot\frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2} = \frac{n(n+1)}{2n^2}$$

$$\rightarrow \int_{0}^{1} x\,dx = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n(n+1)}{2n^2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\int_{-1}^{1} |x|dx = \int_{-1}^{0} -x\,dx + \int_{0}^{1} x\,dx = -\int_{-1}^{0} x\,dx + \int_{0}^{1} x\,dx = -\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = 1$$

033 Halla la integral de la siguiente función en el intervalo $[-3, 3]$.

$$f(x) = \begin{cases} -4x & \text{si } x \le 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}\left(-3 + \frac{3i}{n}\right)\cdot\frac{3}{n} = -9 + \frac{9}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i = -9 + \frac{9n(n+1)}{2n^2}$$

$$\rightarrow \int_{-3}^{0} x\,dx = \lim_{n\to\infty}\left(-9 + \frac{9n(n+1)}{2n^2}\right) = -\frac{9}{2}$$

$$S'_n = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{3i}{n}\right)\cdot\frac{3}{n} = \frac{9}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{9n(n+1)}{2n^2}$$

$$\rightarrow \int_{0}^{3} x\,dx = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{9n(n+1)}{2n^2}\right) = \frac{9}{2}$$

$$\int_{-3}^{3} f(x)\,dx = \int_{-3}^{0} -4x\,dx + \int_{0}^{3} x\,dx = -4\int_{-3}^{0} x\,dx + \int_{0}^{3} x\,dx = -4\cdot\left(-\frac{9}{2}\right) + \frac{9}{2} = \frac{45}{2}$$

034 Calcula la integral de la función en el intervalo $[-2, 1]$.

$$f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x \le 0 \\ x^2 + 3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}\left(-2 + \frac{2i}{n}\right)\cdot\frac{2}{n} = -4 + \frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i = -4 + \frac{4n(n+1)}{2n^2}$$

$$\rightarrow \int_{-2}^{0} x\,dx = \lim_{n\to\infty}\left(-4 + \frac{4n(n+1)}{2n^2}\right) = -2$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} 3\cdot\frac{2}{n} = \sum_{i=1}^{n}\frac{6}{n} = 6 \rightarrow \int_{-2}^{0} 3dx = \lim_{n\to\infty} 6 = 6$$

$$S'_n = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{i^2}{n^2} = \frac{(2n^3 + 3n^2 + n)}{6n^3}$$

$$\rightarrow \int_{0}^{1} x^2dx = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n^3 + 3n^2 + n)}{6n^3} = \frac{1}{3}$$

$$S'_n = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} 3 \cdot \frac{1}{n} = 3 \rightarrow \int_0^1 3\,dx = 3$$

$$\int_{-2}^{1} f(x)\,dx = \int_{-2}^{0} (x+3)\,dx + \int_{0}^{1} (x^2+3)\,dx =$$

$$= \int_{-2}^{0} x\,dx + \int_{-2}^{0} 3\,dx + \int_{0}^{1} x^2\,dx + \int_{0}^{1} 3\,dx = -2 + 6 + \frac{1}{3} + 3 = \frac{22}{3}$$

035 Demostrar que $\frac{1}{2} \leq \int_0^1 \frac{dx}{1+x^4}$.

(Murcia. Septiembre 2005. Bloque 4. Cuestión 2)

$$\frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{2} \text{ y son continuas en } [0, 1] \rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \leq \int_0^1 \frac{dx}{2} = \frac{1}{2}$$

036 Comprueba que a la función $f(x) = \frac{x^2}{x^2-4}$ se le puede aplicar el teorema del valor medio para el cálculo integral en el intervalo $[-1, 1]$, y hállalo.

La función $f(x)$ es continua en toda la recta real menos en los puntos $x = 2$ y $x = -2$, por lo que es continua en el intervalo $[-1, 1]$. Y por tanto, podemos aplicar el teorema del valor medio del cálculo integral.

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{x^2-4}\,dx = \left[x + \ln|x-2| - \ln|x+2|\right]_{-1}^{1} =$$

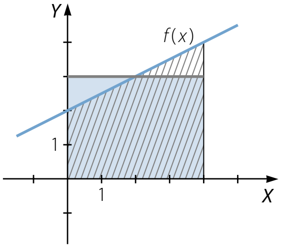
$$= 1 + \ln|-1| - \ln 3 + 1 - \ln|-3| + \ln 1 = 2 + \ln\frac{1}{9}$$

037 Dada la función $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$:

a) Calcula el valor medio de la función en el intervalo [0, 4].
b) Explica el significado geométrico del valor obtenido.
c) Determina el punto donde la función alcanza el valor medio.

a) $$\int_0^4 \left(\frac{1}{2}x + 2\right)dx = \left[\frac{x^2}{4} + 2x\right]_0^4 = \frac{16}{4} + 8 = 12 \rightarrow f(c) = \frac{12}{4} = 3$$

b)



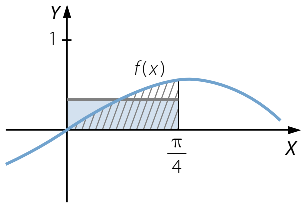
El área del recinto que se determina entre $f(x)$ y el eje X en el intervalo [0, 4], un trapecio de bases 4 y 2 y altura 4, equivale a la de un rectángulo de base la amplitud del intervalo que es 4, y altura el valor medio calculado $f(c) = 3$.

c) $f(c) = 3 \rightarrow \frac{1}{2}x + 2 = 3 \rightarrow x = 2$

038 **Halla el valor medio de la función $f(x) = x \cos x$ en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, e interpreta geométricamente esa cantidad.**

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cos x \, dx = \left[x \operatorname{sen} x + \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$$

El valor medio es: $f(c) = \dfrac{\frac{\pi}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1}{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)$



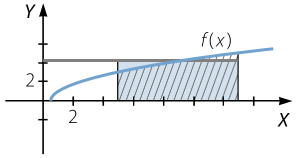
El área entre la curva y el eje X en el intervalo dado es igual al área del rectángulo de base la amplitud del intervalo y altura el valor medio $f(c)$.

039 **Obtén el valor medio de la función $f(x) = \sqrt{2x - 1}$ en el intervalo [5, 13] y el punto donde se alcanza dicho valor medio. Interpreta geométricamente los resultados.**

$$\int_5^{13} \sqrt{2x - 1} \, dx = \left[\frac{1}{3}\sqrt{(2x - 1)^3}\right]_5^{13} = \frac{125}{3} - 9 = \frac{98}{3}$$

El valor medio es $f(c) = \dfrac{\frac{98}{3}}{8} = \frac{49}{12}$ y se alcanza en el punto $\sqrt{2x - 1} = \frac{49}{12}$

$$\rightarrow 2x - 1 = \frac{2.401}{144} \rightarrow x = \frac{2.545}{288}$$



El área entre la curva y el eje X en el intervalo dado es igual al área del rectángulo de base la amplitud del intervalo y altura el valor medio $f(c)$.

040 **Halla el valor medio de la función $f(x) = xe^{x^2}$ en el intervalo [0, 4], e interpreta geométricamente el resultado. Razona si alcanza el valor medio en ese intervalo.**

$$\int_0^4 xe^{x^2}\,dx = \left[\frac{e^{x^2}}{2}\right]_0^4 = e^{16} - \frac{1}{2} \rightarrow \text{El valor medio es: } f(c) = \frac{e^{16}}{2} - \frac{1}{4}$$

$$f(0) = 0 < f(c) = \frac{e^{16}}{2} - \frac{1}{4} < f(4) = 4e^{16}$$

Por ser una función continua existe $c \in (0, 4)$ tal que $f(c) = \dfrac{e^{16}}{2} - \dfrac{1}{4}$.

El área entre la curva y el eje X en el intervalo dado es igual al área del rectángulo de base la amplitud del intervalo y altura el valor medio $f(c)$.

041 **Calcula el valor medio de la función $f(x) = (2x + 2)e^{2x}$ en el intervalo [0, 1], e interprétalo gráficamente.**

$$\int_0^1 (2x+2)e^{2x}\,dx = \left[e^{2x}\left(x + \frac{1}{2}\right)\right]_0^1 = \frac{3e^2 - 1}{2} \rightarrow \text{El valor medio es: } f(c) = \frac{3e^2 - 1}{2}$$

El área entre la curva y el eje X en el intervalo dado es igual al área del rectángulo de base la amplitud del intervalo y altura el valor medio $f(c)$.

042 **Halla el valor medio integral de la función $f(x) = a + b\cos x$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$ y el punto o los puntos donde alcanza dicho valor.**

$$\int_{-\pi}^{\pi} (a + b\cos x)dx = \left[ax + b\,\mathrm{sen}\,x\right]_{-\pi}^{\pi} = 2a\pi \rightarrow \text{El valor medio es: } f(c) = a$$

$f(c) = a \rightarrow a + b\cos c = a$:

- Si $b \neq 0 \rightarrow \cos c = 0 \rightarrow \begin{cases} c = \dfrac{\pi}{2} \\ c = -\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$
- Si $b = 0 \rightarrow c$ puede ser cualquier punto del intervalo $(-\pi, \pi)$.

043 **Sea $f\colon [-2, 2] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua en $[-2, 2]$ tal que $\displaystyle\int_{-2}^{-1} f(t)\,dt = \int_1^2 f(t)\,dt$,**

¿se puede asegurar que existen b y c pertenecientes a $[-2, 2]$ tales que $b \leq 1$, $c \geq 1$ y $f(b) = f(c)$? Justifica la respuesta.

(Galicia. Junio 2005. Bloque 3. Pregunta 1)

Por ser una función continua en $[-2, 2]$ podemos aplicar el teorema del valor medio para el cálculo integral a cada uno de los dos intervalos.

Existe $b \in [-2, -1]$ tal que $\displaystyle\int_{-2}^{-1} f(t)\,dt = f(b)(-1-(-2)) = f(b)$

Existe $c \in [1, 2]$ tal que $\displaystyle\int_1^2 f(t)\,dt = f(c)(-1-(-2)) = f(c)$

Deducimos entonces que: $f(b) = \displaystyle\int_{-2}^{-1} f(t)\,dt = \int_1^2 f(t)\,dt = f(c)$

044 Aplica el teorema fundamental del cálculo integral a las funciones en el intervalo [0, *a*]:

a) $f(x) = x + 5$ b) $f(x) = x^2 - 3$

a) $A(x) = \int_0^x (t+5)\,dx = \int_0^x t\,dx + \int_0^x 5\,dx = \dfrac{x^2 + 10x}{2} \rightarrow A'(x) = x + 5 = f(x)$

b) $A(x) = \int_0^x (t^2 - 3)\,dx = \int_0^x t^2 dx - \int_0^x 3\,dx = \dfrac{x^3 - 9x}{3} \rightarrow A'(x) = x^2 - 3 = f(x)$

045 Calcula la derivada de la función $F(x) = \int_0^x te^{t^2}\,dt$ en el punto $x = 3$.

Por ser $f(x) = xe^{x^2}$ continua podemos aplicar el teorema fundamental del cálculo integral: $F'(x) = f(x) = xe^{x^2} \rightarrow F'(3) = 3e^9$

046 Dada $F(x) = \int_1^x t\,\mathrm{sen}\,t\,dt$, estudiar si $x = \pi$ es una raíz de $F'(x)$.

(Aragón. Junio 2008. Bloque 3. Opción A)

Por ser la función $f(x) = x\,\mathrm{sen}\,x$ continua podemos aplicar el teorema fundamental del cálculo integral $F'(x) = f(x) = x\,\mathrm{sen}\,x \rightarrow F'(\pi) = 0$.
Es decir, $x = \pi$ es raíz de $F'(x)$.

047 Sea $F(x) = \int_0^x \mathrm{sen}\,t^2\,dt$. Calcula la segunda derivada de la función *F*.

(Galicia. Septiembre 2005. Bloque 3. Pregunta 2)

Por ser $f(x) = \mathrm{sen}\,x^2$ una función continua aplicamos el teorema fundamental del cálculo integral: $F'(x) = f(x) = \mathrm{sen}\,x^2 \rightarrow F''(x) = f'(x) = 2x\cos x^2$

048 Sea la función $F(x) = \int_1^x \dfrac{\mathrm{sen}\,t}{t}\,dt$ definida para $x \geq 1$. Halla sus máximos y mínimos relativos.

(La Rioja. Junio 2005. Propuesta A. Ejercicio 4)

Por ser $f(x) = \dfrac{\mathrm{sen}\,x}{x}$ continua en $x \geq 1$ calculamos la derivada de la función aplicando el teorema fundamental del cálculo integral.

$$F'(x) = f(x) = \frac{\mathrm{sen}\,x}{x} \rightarrow F'(x) = 0 \rightarrow \frac{\mathrm{sen}\,x}{x} = 0 \rightarrow x = n\pi \text{ para } n \in \mathbb{Z}$$

$$F''(x) = f'(x) = \frac{x\cos x - \mathrm{sen}\,x}{x^2}$$

$$\rightarrow F''(n\pi) = \frac{\cos n\pi}{n\pi} = \begin{cases} \dfrac{1}{n\pi} < 0 & \text{si } n \text{ par} \rightarrow \text{máximo} \\ \dfrac{-1}{n\pi} < 0 & \text{si } n \text{ impar} \rightarrow \text{mínimo} \end{cases}$$

049 **Dada la función $F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$, ¿tiene $F(x)$ puntos de inflexión? Justifica la respuesta.**

(Galicia. Junio 2007. Bloque 3. Opción 1)

Por ser $f(x) = e^{x^2}$ continua en la recta real, aplicamos el teorema fundamental del cálculo integral.

$$F'(x) = f(x) = e^{-x^2} \to F''(x) = f'(x) = -2xe^{-x^2}$$
$$F''(x) = 0 \to -2xe^{-x^2} = 0 \to x = 0$$

Tiene un punto de inflexión en $x = 0$.

050 **Calcula la derivada de esta función:**

$$F(x) = \int_1^{2x} (t + t^2)\,dt$$

$$F(x) = \int_1^{2x} (t + t^2)\,dt = \int_{1/2}^{x} (2u + (2u)^2)\,2\,du = \int_{1/2}^{x} (4u + 8u^2)\,du$$

$t = 2u \to dt = 2\,du$

$t = 1 \to u = \frac{1}{2}$

$t = 2x \to u = x$

$\to f(u) = 4u + 8u^2$ es una función continua y, por tanto, podemos aplicar el teorema del fundamental del cálculo integral.

$$F(x) = \int_1^{2x} (t + t^2)\,dt \to F'(x) = f(x) = 4x + 8x^2$$

Otra forma de hacerlo es:

$$F(x) = \int_1^{2x} (t + t^2)\,dt \to F'(x) = ((2x) + (2x)^2) \cdot (2x)' = (2x + 4x^2) \cdot 2 = 4x + 8x^2$$

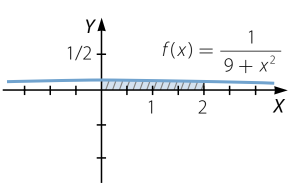
051 **Demuestra que la regla de Barrow se puede aplicar a la función:**

$$f(x) = \frac{1}{9 + x^2}$$

en el intervalo [0, 2] y aplícala. Interpreta geométricamente el resultado obtenido.

Por ser $f(x)$ continua en $[0, 2]$ y ser $F(x) = 9\,arctg\frac{x}{3}$ una primitiva de $f(x)$ podemos aplicar la Regla de Barrow:

$$\int_0^2 \frac{1}{9 + x^2}\,dx = \left[9\,arctg\frac{x}{3}\right]_0^2 = 9\,arctg\frac{2}{3}$$



Geométricamente es el área de la región limitada por la curva, el eje X y las rectas verticales $x = 0$ y $x = 2$.

052 Comprueba que se puede aplicar la regla de Barrow para calcular la siguiente integral, y halla su valor.

$$\int_{0,5}^{1} \frac{e^x}{e^{2x}-1}\,dx$$

Por ser $f(x)$ continua en [0,5; 1], podemos aplicar la Regla de Barrow siempre que exista una primitiva de la función:

$$\int_{0,5}^{1} \frac{e^x}{e^{2x}-1}\,dx = \int_{\sqrt{e}}^{e} \frac{1}{t^2-1}\,dt = \int_{\sqrt{e}}^{e} \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{1}{2}}{t-1} + \frac{-\frac{1}{2}}{t+1}\right) dt =$$

$e^x = t \rightarrow e^x\,dt = dt$
$x = 0,5 \rightarrow t = \sqrt{e}$
$x = 1 \rightarrow t = e$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln|t-1| - \ln|t+1|\right]_{\sqrt{e}}^{e} = \frac{1}{2}\left(\ln|e-1| - \ln|e+1| - \ln\left|\sqrt{e}-1\right| + \ln\left|\sqrt{e}+1\right|\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{(e-1)(\sqrt{e}+1)}{(e+1)(\sqrt{e}-1)}\right| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{(\sqrt{e}+1)^2}{(e+1)}\right|$$

$$\int_{0,5}^{1} \frac{e^x}{e^{2x}-1}\,dx = \frac{1}{2}\left[\ln|e^x-1| - \ln|e^x+1|\right]_{0,5}^{1} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln|e-1| - \ln|e+1|\right) - \left(\ln\left|\sqrt{e}-1\right| - \ln\left|\sqrt{e}+1\right|\right) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{(\sqrt{e}+1)^2}{(e+1)}\right|$$

053 Calcula las siguientes integrales definidas.

a) $\int_{1}^{5} (2+4x^3)\,dx$

b) $\int_{0}^{\pi/4} sen\ 2x\,dx$

c) $\int_{1}^{9} \left(\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}\right) dx$

d) $\int_{0}^{1} 2xe^{x^2}\,dx$

e) $\int_{0}^{1} (2e^x - 4x^2)\,dx$

f) $\int_{2}^{3} \left(2^x + \sqrt{2x}\right) dx$

g) $\int_{2}^{4} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx$

h) $\int_{-4}^{3} |x^2-4|\,dx$

i) $\int_{-1}^{1} |x-2|\,dx$

j) $\int_{1}^{4} \frac{3}{\sqrt{x}}\,dx$

k) $\int_{0}^{\pi} cos^2\,x\,dx$

l) $\int_{1}^{e} \ln x^2\,dx$

m) $\int_{0}^{2} 3xe^x\,dx$

n) $\int_{0}^{\pi/2} x\ sen\ 2x\,dx$

ñ) $\int_{0}^{\pi/4} tg\ x\,dx$

o) $\int_{0}^{1/2} \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$

a) $\displaystyle\int_1^5 (2+4x^3)\,dx = \left[2x+x^4\right]_1^5 = 635-3=632$

b) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} sen 2x\,dx = \left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\pi/4} = 0-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$

c) $\displaystyle\int_1^9 (\sqrt[3]{x}+\sqrt{x})dx = \left[\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}+\frac{2}{3}\sqrt[2]{x^3}\right]_1^9 =$

$\displaystyle= \left(\frac{3}{4}\sqrt[3]{9^4}+18\right)-\left(\frac{3}{4}+\frac{2}{3}\right)=\frac{9}{4}\sqrt[3]{9}+\frac{195}{12}$

d) $\displaystyle\int_0^1 2xe^{x^2}dx = \left[e^{x^2}\right]_0^1 = e-1$

e) $\displaystyle\int_0^1 (2e^x-4x^2)\,dx = \left[2e^x-\frac{4}{3}x^3\right]_0^1 = 2e-\frac{4}{3}-2=2e-\frac{10}{3}$

f) $\displaystyle\int_2^3 (2^x+\sqrt{2x})\,dx = \left[2^x\ln 2+\frac{2}{3}\sqrt{2x^3}\right]_2^3 = (8\ln 2+2\sqrt{6})-\left(4\ln 2+\frac{4}{3}\right)=$

$\displaystyle= 4\ln 2+2\sqrt{6}-\frac{4}{3}$

g) $\displaystyle\int_2^4\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx = \left[\ln|x|+\frac{1}{x}\right]_2^4 = \left(\ln 4+\frac{1}{4}\right)-\left(\ln 2+\frac{1}{2}\right)=\ln 2-\frac{1}{4}$

h) $\displaystyle\int_{-4}^3 \left|x^2-4\right|dx = \int_{-4}^{-2}(x^2-4)\,dx+\int_{-2}^{2}(4-x^2)\,dx+\int_2^3(x^2-4)\,dx =$

$\displaystyle= \left[\frac{x^3}{3}-4x\right]_{-4}^{-2}+\left[4x-\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2}+\left[\frac{x^3}{3}-4x\right]_2^3 = \frac{32}{3}+\frac{32}{3}+\frac{7}{3}=\frac{71}{3}$

i) $\displaystyle\int_{-1}^1 \left|x-2\right|dx = \int_{-1}^1 (2-x)\,dx = \left[2x-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^1 = \left(\frac{3}{2}+\frac{5}{2}\right)=4$

j) $\displaystyle\int_1^4 \frac{3}{\sqrt{x}}dx = \left[6\sqrt{x}\right]_1^4 = (12-6)=6$

k) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2 x\,dx = \left[\frac{x}{2}+\frac{sen 2x}{4}\right]_0^{\pi} = \left(\frac{\pi}{2}-0\right)=\frac{\pi}{2}$

l) $\displaystyle\int_1^e \ln x^2\,dx = \left[-2x+x\ln x^2\right]_1^e = (-2e+2e+2)=2$

m) $\displaystyle\int_0^2 3xe^x\,dx = \left[3xe^x-3e^x\right]_0^2 = 3e^2+3$

n) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x\, sen 2x\,dx = \left[\frac{sen\,2x}{4}-\frac{x\cos 2x}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}-0=\frac{\pi}{4}$

ñ) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} tg\, x\,dx = \left[-\ln|\cos x|\right]_0^{\pi/4} = -\ln\frac{\sqrt{2}}{2}-0=\ln\sqrt{2}$

o) $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx = \left[\frac{1}{2}arc\,sen\,x^2\right]_0^{1/2} = \left(\frac{1}{2}arc\,sen\frac{1}{4}-0\right)=\frac{1}{2}arc\,sen\frac{1}{4}$

054 Calcula el valor de la integral: $\displaystyle\int_3^{10} (x-2)^{1/3}\,dx$

(Extremadura. Junio 2007. Opción B. Ejercicio 2)

$$\int_3^{10} (x-2)^{1/3}dx = \left[\frac{3}{4}(x-2)^{4/3}\right]_3^{10} = \left(12-\frac{3}{4}\right) = \frac{45}{4}$$

055 Sea $f(x)=\dfrac{4-2x^2}{x}$. Calcúlese $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} f(x)\ln x\,dx$.

(Castilla y León. Septiembre 2006. Prueba B. Problema 2)

$$\int_1^{\sqrt{2}} \frac{4-2x^2}{x}\ln x\,dx = \int_1^{\sqrt{2}}\left(\frac{4}{x}\ln x - 2x\ln x\right)dx =$$

$$= \left[2\ln^2 x - x^2\ln x + \frac{x^2}{2}\right]_1^{\sqrt{2}} = 2\ln^2\sqrt{2} - 2\ln\sqrt{2} + \frac{1}{2}$$

056 Sea la función con valores reales $f(x)=x\sqrt{4-x^2}$ (se considera solo la raíz positiva).

Calcula: $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$

(Asturias. Septiembre 2005. Bloque 5)

$$\int_{-1}^{1} x\sqrt{4-x^2}\,dx = \left[\frac{1}{3}\sqrt{(4-x^2)^3}\right]_{-1}^{1} = \sqrt{3}-\sqrt{3} = 0$$

057 Calcular: $\displaystyle\int_0^1 e^x(2x-1)\,dx$

(Galicia. Septiembre 2008. Bloque 3. Opción 1)

$$\int_0^1 e^x(2x-1)\,dx = \left[(2x-1)e^x\right]_0^1 - \int_0^1 2e^x dx = \left[e^x(2x-3)\right]_0^1 = (-e+3) = 3-e$$

$u = 2x-1 \rightarrow du = 2\,dx$

$dv = e^x\,dx \rightarrow v = e^x$

058 Calcula la integral definida $\displaystyle\int_0^{\pi} e^x\,\text{sen}\,x\,dx$.

(Castilla-La Mancha. Junio 2008. Bloque 2. Pregunta B)

$$\int_0^{\pi} e^x\,\text{sen}\,x\,dx = \left[e^x\,\text{sen}\,x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x\cos x\,dx = \left[e^x\,\text{sen}\,x - e^x\cos x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x\,\text{sen}\,x\,dx$$

$u = \text{sen}\,x \rightarrow du = \cos x\,dx$

$dv = e^x\,dx \rightarrow v = e^x$

$u = \cos x \rightarrow du = -\text{sen}\,x\,dx$

$dv = e^x\,dx \rightarrow v = e^x$

$$2\int_0^{\pi} e^x\,\text{sen}\,x\,dx = \left[e^x\,\text{sen}\,x - e^x\cos x\right]_0^{\pi}$$

$$\rightarrow \int_0^{\pi} e^x\,\text{sen}\,x\,dx = \left[\frac{e^x\,\text{sen}\,x - e^x\cos x}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{e^{\pi}}{2} + \frac{e^{\pi}}{2} = e^{\pi}$$

059 Calcule la integral siguiente: $I = \int_0^1 (x^2-1)\,e^{-2x}\,dx$

(Murcia. Junio 2006. Bloque 4. Cuestión A)

$$\int_0^1 (x^2-1)e^{-2x}dx = \left[\frac{-(x^2-1)}{2}e^{-2x}\right]_0^1 + \int_0^1 xe^{-2x}dx =$$

$u = x^2-1 \to du = 2x\,dx$

$dv = e^{-2x}dx \to v = \frac{-1}{2}e^{-2x}$

$u = x \to du = dx$

$dv = e^{-2x}dx \to v = \frac{-1}{2}e^{-2x}$

$$= \left[\frac{-(x^2-1)}{2}e^{-2x} + \frac{-x}{2}e^{-2x}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{2}e^{-2x}\,dx =$$

$$= \left[\frac{1}{4}e^{-2x}(1-2x-2x^2)\right]_0^1 = \frac{-3}{4e^2} - \frac{1}{4}$$

060 Sea la función $f(x) = \frac{sen\ x}{2 - cos\ x}$. Calcula: $\int_0^{\pi/3} f(x)\,dx$

(Asturias. Junio 2005. Bloque 6)

$$\int_0^{\pi/3} \frac{sen\,x}{2-cos\,x}dx = \left[\ln\left|2-cos\,x\right|\right]_0^{\pi/3} = \ln\frac{3}{2}$$

061 Calcular el valor de la integral: $I = \int_0^1 xe^x\,dx$

(Murcia. Junio 2005. Bloque 4. Cuestión 2)

$$\int_0^1 xe^x dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = \left[e^x(x-1)\right]_0^1 = 0-(-1) = 1$$

$u = x \to du = dx$

$dv = e^x dx \to v = e^x$

062 Calcula $\int_{-1}^2 x\cdot|x|\,dx$.

(La Rioja. Septiembre 2005. Propuesta B. Ejercicio 3)

$$\int_{-1}^2 x\cdot|x|dx = \int_{-1}^0 -x^2dx + \int_0^2 x^2dx = \left[-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^0 + \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \left(0+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{8}{3}+0\right) = 3$$

063 Halla las siguientes integrales definidas de funciones racionales.

a) $\int_1^3 \frac{3}{x+2}\,dx$

b) $\int_0^3 \frac{2x}{x^2+1}\,dx$

c) $\int_2^5 \frac{x+3}{x-1}\,dx$

d) $\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx$

e) $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2+2}\,dx$

f) $\int_1^3 \frac{1}{x(x+1)}\,dx$

a) $\int_1^3 \frac{3}{x+2}dx = \left[3\ln|x+2|\right]_1^3 = (3\ln 5 - 3\ln 3) = 3\ln\frac{5}{3}$

b) $\int_0^3 \frac{2x}{x^2+1}dx = \left[\ln|x^2+1|\right]_0^3 = \ln 10 - \ln 1 = \ln 10$

c) $\int_2^5 \frac{x+3}{x-1}dx = \int_2^5 \left(1+\frac{4}{x-1}\right)dx = \left[x+4\ln|x-1|\right]_2^5 =$

$= 5 + 4\ln 4 - 2 - 4\ln 1 = 3 + 4\ln 4$

d) $\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx = \left[arctg\, x\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$

e) $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2+2}dx = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{x}{\sqrt{2}}\right]_{-1}^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{-\sqrt{2}}{2} =$

$= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

f) $\int_1^3 \frac{1}{x(x+1)}dx = \int_1^3 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) = \left[\ln|x| - \ln|x+1|\right]_1^3 =$

$= \ln 3 - \ln 4 - \ln 1 + \ln 2 = \ln\frac{3}{2}$

064 Calcular: $\int_1^2 \frac{dx}{x^2+2x}$

(Madrid. Septiembre 2006. Opción A. Ejercicio 1)

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2+2x}dx = \int_1^2 \left(\frac{1/2}{x} + \frac{-1/2}{x+2}\right) = \left[\frac{\ln|x|}{2} - \frac{\ln|x+2|}{2}\right]_1^2 =$$

$$= \frac{\ln 2 - \ln 4}{2} - \frac{\ln 1 - \ln 3}{2} = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$$

065 Calcule la siguiente integral: $\int_0^1 \frac{x^2+1}{x^2-4}dx$

(Murcia. Septiembre 2006. Bloque 4. Cuestión A)

$$\int_0^1 \frac{x^2+1}{x^2-4}dx = \int_0^1 \left(1 + \frac{5/4}{x-2} + \frac{-5/4}{x+2}\right)dx = \left[x + \frac{5}{4}\ln|x-2| - \frac{5}{4}\ln|x+2|\right]_0^1 =$$

$$= 1 + \frac{5}{4}\ln\frac{1}{3}$$

066 Calcular el valor de la siguiente integral definida: $\int_1^2 \frac{x^2+1}{x(x+1)}dx$

(País Vasco. Junio 2006. Bloque D. Cuestión D)

$$\int_1^2 \frac{x^2+1}{x(x+1)}dx = \int_1^2 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{-2}{x+1}\right)dx = \left[x + \ln|x| - 2\ln|x+1|\right]_1^2 = 1 + \ln\frac{8}{9}$$

067 Sea la función $f(x)=\dfrac{3x^3}{x^2-4}$, calcula $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

(Asturias. Junio 2006. Bloque 6)

$$\int_{-1}^{1}\frac{3x^3}{x^2-4}dx=\int_{-1}^{1}\left(3x+\frac{6}{x-2}+\frac{6}{x+2}\right)=$$

$$=\left[\frac{3x^2}{2}+6\ln|x-2|+6\ln|x+2|\right]_{-1}^{1}=\frac{3}{2}+6\ln 3-\frac{3}{2}-6\ln 3=0$$

068 Calcular la integral: $\displaystyle\int_0^1\frac{x^3+2}{x^2+3x+2}\,dx$

(Murcia. Septiembre 2007. Bloque 4. Cuestión A)

$$\int_0^1\frac{x^3+2}{x^2+3x+2}dx=\int_0^1\left(x-3+\frac{1}{x+1}+\frac{6}{x+2}\right)dx=$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}-3x+\ln|x+1|+6\ln|x+2|\right]_0^1=\frac{-5}{3}+6\ln 3-5\ln 2$$

069 Sea a un número positivo menor que 4. Calcula: $\displaystyle\int_{-a}^{a}\frac{1}{x^3-4x^2-25x+100}\,dx$

(La Rioja. Junio 2006. Propuesta A. Ejercicio 2)

$$\int_{a}^{-a}\frac{1}{x^3-4x^2-25x+100}dx=\int_{a}^{-a}\left(\frac{1/10}{x-5}+\frac{-1/9}{x-4}+\frac{1/90}{x+5}\right)dx=$$

$$=\left[\frac{1}{10}\ln|x-5|+\frac{1}{90}\ln|x+5|-\frac{1}{9}\ln|x-4|\right]_a^a=$$

$$=\frac{1}{10}\ln|a-5|+\frac{1}{90}\ln|a+5|-\frac{1}{9}\ln|a-4|-$$

$$-\frac{1}{10}\ln|-a-5|-\frac{1}{90}\ln|-a+5|+\frac{1}{9}\ln|-a-4|$$

070 Halla los valores de b para que se cumpla:

a) $\displaystyle\int_0^b (x+x^2)\,dx=0$

b) $\displaystyle\int_b^0 |x^2-1|\,dx=\frac{22}{3}$

c) $\displaystyle\int_{-2}^{2}(4+bx)\,dx=2$

d) $\displaystyle\int_0^3 (b+x^2)\,dx=12$

a) $$\int_0^b (x+x^2)\,dx=\left[\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right]_0^b=\frac{b^2}{2}+\frac{b^3}{3}\to\int_0^b(x+x^2)\,dx=0$$

$$\to\frac{b^2}{2}+\frac{b^3}{3}=0\to\frac{b^2}{6}(3+2b)=0\to\begin{cases}b=0\\ b=-\dfrac{3}{2}\end{cases}$$

b) • Si $b \leq -1$:

$$\int_b^0 \left|x^2-1\right| dx = \int_b^{-1} (x^2-1)\,dx + \int_{-1}^0 (1-x^2)\,dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_b^{-1} + \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^0 = \frac{4}{3} - \frac{b^3}{3} + b$$

$$\int_b^0 \left|x^2-1\right| dx = \frac{22}{3} \rightarrow \frac{4}{3} - \frac{b^3}{3} + b = \frac{22}{3} \rightarrow b^3 - 3b + 18 = 0 \rightarrow b = -3$$

• Si $-1 < b \leq 0$:

$$\int_b^0 \left|x^2-1\right| dx = \int_b^0 (1-x^2)\,dx = \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_b^0 = \frac{b^3}{3} - b$$

$$\int_b^0 \left|x^2-1\right| dx = \frac{22}{3} \rightarrow \frac{b^3}{3} - b = \frac{22}{3} \rightarrow b^3 - 3b - 22 = 0$$

$\rightarrow$ No tiene solución en el intervalo $(-1, 0]$.

c) $$\int_{-2}^2 (4+bx)\,dx = \left[\frac{bx^2}{2} + 4x\right]_{-2}^2 = 2b + 8 - 2b + 8 = 16 \neq 2$$

No existe ningún valor de b que lo cumpla.

d) $$\int_0^3 (b+x^2)\,dx = \left[bx + \frac{x^3}{3}\right]_0^3 = 3b + 9 \rightarrow \int_0^3 (b+x^2)\,dx = 12 \rightarrow 3b+9 = 12 \rightarrow b = 1$$

071 Sea $I = \displaystyle\int_0^2 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$.

a) Expresa I aplicando el cambio de variable $t = 1 + x^2$.

b) Calcula el valor de I.

(Andalucía. Junio 2006. Opción A. Ejercicio 2)

a) $$\int_0^3 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int_1^5 \frac{t-1}{2\sqrt{t}}\,dt$$

$t = 1 + x^2 \rightarrow dt = 2x\,dx$

$x = 0 \rightarrow t = 1$

$x = 2 \rightarrow t = 5$

b) $$\int_1^5 \frac{t-1}{2\sqrt{t}}\,dt = \int_1^5 \left(\frac{\sqrt{t}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{t}}\right) dt = \left[\frac{\sqrt{t^3}}{3} - \sqrt{t}\right]_1^5 = \frac{2\sqrt{5}}{3} + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}(\sqrt{5}+1)$$

072 Sea $I = \displaystyle\int_3^8 \frac{1}{\sqrt{1+x}-1}\,dx$.

a) Exprésala aplicando el cambio de variable $\sqrt{1+x} - 1 = t$.

b) Calcula I.

(Andalucía. Septiembre 2005. Opción B. Ejercicio 2)

a) $$\int_3^8 \frac{1}{\sqrt{1+x}-1}\,dx = \int_1^2 \frac{2(t+1)}{t}\,dt$$

$$t=\sqrt{1+x}-1 \to dt = \frac{dx}{2\sqrt{1+x}}$$
$$x=3 \to t=1$$
$$x=8 \to t=2$$

b) $$\int_1^2 \frac{2(t+1)}{t}\,dt = \int_1^2 \left(2+\frac{2}{t}\right)dt = \left[2t+2\ln|t|\right]_1^2 = 2+2\ln 2$$

073 Calcular la integral: $\int_1^e \ln x^2\, dx$

(Murcia. Junio 2007. Bloque 4. Cuestión A)

$$\int_1^e \ln x^2\,dx = \left[-2x + x\ln x^2\right]_1^e = (-2e+2e+2) = 2$$

074 Hallad $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{2x^3}{\sqrt{x^2+1}}\,dx.$

(La Rioja. Junio 2008. Propuesta A. Ejercicio 2)

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{2x^3}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \int_1^4 \frac{t-1}{\sqrt{t}}\,dt = \left[\frac{2\sqrt{t^3}}{3} - 2\sqrt{t}\right]_1^4 = \frac{16}{3} - 4 - \frac{2}{3} + 2 = \frac{8}{3}$$

$$t=x^2+1 \to dt = 2x\,dx$$
$$x=0 \to t=1$$
$$x=\sqrt{3} \to t=4$$

075 Calcular el valor de a para que la integral entre 0 y a de la función xe^x sea igual a 1.

(Canarias. Septiembre 2007. Opción B. Cuestión 2)

$$\int_0^a xe^x\,dx = \left[e^x(x-1)\right]_0^a = e^a(a-1)+1$$

$$e^a(a-1)+1 = 1 \to e^a(a-1) = 0 \to a = 1$$

076 Se considera la función $f(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$.

Determinar el valor del parámetro a tal que: $\int_0^a f(x)\,dx = \frac{1}{4}$

(Madrid. Septiembre 2005. Opción A. Ejercicio 2)

$$\int_0^a \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\,dx = \left[\frac{-1}{1+e^x}\right]_0^a = \frac{-1}{1+e^a} - \frac{-1}{1+1} = \frac{-1}{1+e^a} + 1$$

$$\frac{-1}{1+e^a} + 1 = \frac{1}{4} \to \frac{-1}{1+e^a} = \frac{-3}{4} \to e^a = \frac{1}{3} \to a = -\ln 3$$

077 La función $f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{ax} & \text{si } 0 \le x \le 8 \\ \dfrac{x^2 - 32}{x - 4} & \text{si } x > 8 \end{cases}$$

es continua en $[0, +\infty)$. Calcular $\displaystyle\int_0^{10} f(x)\,dx$.

(Aragón. Junio 2006. Opción B. Cuestión 2)

Para que $f(x)$ sea continua $a = 8$.

$$\int_0^{10} f(x)\,dx = \int_0^8 \sqrt{8x}\,dx + \int_8^{10} \frac{x^2-32}{x-4}\,dx = \left[\frac{\sqrt{(8x)^3}}{12}\right]_0^8 + \left[\frac{x^2}{2} + 4x - 16\ln|x-4|\right]_8^{10} =$$

$$= \frac{128}{3} + 50 + 40 - 16\ln 6 - 32 - 32 + 16\ln 4 = \frac{206}{3} - 16\ln\frac{3}{2}$$

078 Sea: $f(x) = \begin{cases} 3x + 2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 + 2a\cos x & \text{si } 0 \le x < \pi \\ ax^2 + b & \text{si } x \ge \pi \end{cases}$. Calcular $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$.

(Aragón. Septiembre 2007. Opción A. Cuestión 2)

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \int_0^{2\pi} (x^2 + 2a\cos x)\,dx + \int_\pi^{2\pi} (ax^2 + b)\,dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} + 2a\,\mathrm{sen}\,x\right]_0^\pi + \left[\frac{ax^3}{3} + bx\right]_\pi^{2\pi} =$$

$$= \frac{\pi^3}{3} + \frac{8a\pi^3}{3} - \frac{a\pi^3}{3} + 2b\pi - b\pi = \frac{\pi^3(7a+1)}{3} + b\pi$$

079 Dada: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{sen}\,x^2}{x} & \text{si } x > 0 \\ x^2 - 2x & \text{si } x \le 0 \end{cases}$ halla $\displaystyle\int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}} x^2 f(x)\,dx$.

(Castilla y León. Junio 2008. Prueba B. Problema 2)

$$\int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}} x^2 f(x)dx = \int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}} x\,\mathrm{sen}\,x^2 dx = \left[\frac{-\cos x^2}{2}\right]_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$$

080 Sea $f(x)$ una función derivable en $(0, 1)$ y continua en $[0, 1]$, tal que $f(1) = 0$ y $\displaystyle\int_0^1 2x\,f'(x)\,dx = 1$. Utilizar la fórmula de integración por partes para hallar $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.

(Madrid. Junio 2005. Opción A. Ejercicio 1)

$$\int 2x\,f'(x)\,dx = 2x\,f(x) - 2\int f(x)\,dx$$

$u = 2x \to du = 2dx$
$dv = f'(x) \to v = f(x)$

$$1=\int_0^1 2x\,f'(x)dx=\left[2x\,f(x)\right]_0^1-2\int_0^1 f(x)dx=2f(1)-2\int_0^1 f(x)dx=$$
$$=-2\int_0^1 f(x)dx \rightarrow \int_0^1 f(x)dx=-\frac{1}{2}$$

081 Sea $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ la función dada por $f(x)=ax^2+b$. Halla los valores de a y b sabiendo que $\int_0^6 f(x)\,dx=6$ y que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto de abscisa 3 vale -12.

(Andalucía. Año 2006. Modelo 4. Opción A. Ejercicio 1)

Por ser la pendiente de la recta tangente igual a -12 en el punto de abscisa $x=3$, sabemos que $f'(3)=-12$.

$f'(x)=2ax \rightarrow f'(3)=6a \rightarrow -12=6a \rightarrow a=-2$

Luego la función es: $f(x)=-2x^2+b$

$$6=\int_0^6 f(x)\,dx=\int_0^6(-2x^2+b)\,dx=\left[\frac{-2x^3}{3}+bx\right]_0^6=-144+6b$$
$$\rightarrow b=25 \rightarrow f(x)=-2x^2+25$$

082 Calcular un polinomio de tercer grado $p(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ sabiendo que verifica:

- Tiene un máximo relativo en $x=1$.
- Tiene un punto de inflexión en el punto de coordenadas (0, 1).
- Se verifica: $\int_0^1 p(x)\,dx=\frac{5}{4}$

(Madrid. Junio 2005. Opción A. Ejercicio 2)

$p'(x)=3ax^2+2bx+c$

$p''(x)=6ax+2b$

- Pasa por el punto (0, 1) $\rightarrow p(0)=1 \rightarrow d=1$
- El punto (0, 1) es un punto de inflexión $\rightarrow p''(0)=0 \rightarrow 2b=0 \rightarrow b=0$
- Tiene un máximo en $x=1 \rightarrow p'(1)=0 \rightarrow 3a+c=0$
- $\frac{5}{4}=\int_0^1 p(x)\,dx=\int_0^1(ax^3+cx+1)\,dx=\left[\frac{ax^4}{4}+\frac{cx^2}{2}+x\right]_0^1=\frac{a}{4}+\frac{c}{2}+1$

$$\rightarrow a+2c=1$$

Formamos un sistema con las dos últimas condiciones:

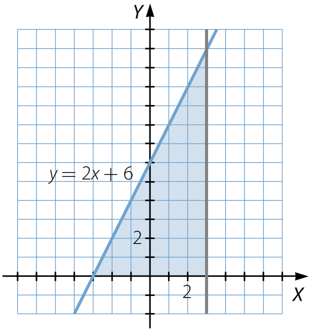
$$\left.\begin{array}{l}3a+c=0\\ a+2c=1\end{array}\right\}\xrightarrow{c=-3a} a-6a=1\rightarrow a=-\frac{1}{5}\rightarrow c=\frac{3}{5}$$

Luego, el polinomio es: $p(x)=\frac{-1}{5}x^3+\frac{3}{5}x+1$

083 **Utilizando el cálculo integral, halla el área del recinto que delimitan las rectas:**

$$y = 2x + 6 \qquad y = 0 \qquad x = 3$$

Calcula con la fórmula correspondiente el área del triángulo anterior y comprueba que el resultado coincide con el obtenido anteriormente.



Calculamos los puntos de intersección.

$$\left.\begin{array}{l} y = 2x + 6 \\ y = 0 \end{array}\right\} \rightarrow x = -3$$

$$\left.\begin{array}{l} y = 2x + 6 \\ x = 3 \end{array}\right\} \rightarrow y = 12$$

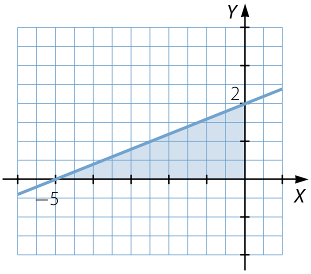
$$\int_{-3}^{3} (2x + 6)\,dx = \left[x^2 + 6x\right]_{-3}^{3} = 9 + 18 - 9 + 18 = 36$$

$$\text{Área del triángulo} = \frac{6 \cdot 12}{2} = 36$$

084 **Mediante integrales halla el área del triángulo determinado por los puntos (−5, 0), (0, 0) y (0, 2).**

Calculamos las rectas que determinan los lados del triángulo.

El lado que contiene los vértices (−5, 0) y (2, 0) está en la recta $y = \frac{2}{5}x + 2$.



El lado que contiene los vértices (−5, 0) y (0, 0) está en la recta $y = 0$.

El lado que contiene los vértices (0, 0) y (2, 0) está en la recta $x = 0$.

$$\text{Área} = \left|\int_{-5}^{0} \left(\frac{2}{5}x + 2\right)dx\right| = \left|\left[\frac{x^2}{5} + 2x\right]_{-5}^{0}\right| = 5$$

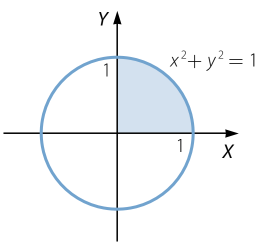
085 **Obtén el área del recinto que delimitan la parábola $y = -x^2 + 9$ y el eje X.**

Hallamos los puntos de corte de la parábola y el eje X:

$$-x^2 + 9 = 0 \to \begin{cases} x = -3 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$\int_{-3}^{3} (-x^2 + 9)\, dx = \left[\frac{-x^3}{3} + 9x\right]_{-3}^{3} = -9 + 27 - 9 + 27 = 36$$

086 **Utilizando el cálculo integral, halla el área del sector circular que forma la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ con los semiejes positivos de coordenadas. Comprueba que este resultado coincide con el que se obtiene cuando se aplica la fórmula de área de un círculo.**



$$\text{Área} = \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx = \left[\frac{\operatorname{arc\,sen} x}{2} + \frac{x\sqrt{1 - x^2}}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Área} = \frac{1}{4}\pi r^2 = \frac{\pi}{4}$$

087 **Calcula una primitiva de la función $f(x) = \dfrac{x + 2}{x^2 - 1}$.**

Determina la integral $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\, dx$.

$$\int \frac{x + 2}{x^2 - 1} dx = \int \left(\frac{3/2}{x - 1} + \frac{-1/2}{x + 1}\right) dx = \frac{3}{2}\ln|x - 1| - \frac{1}{2}\ln|x + 1| + k$$

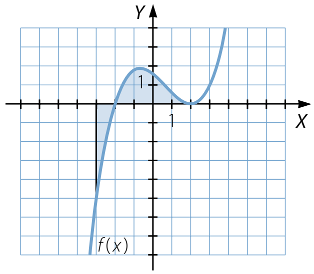
La integral $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x + 2}{x^2 - 1} dx$ no se puede calcular porque la función no es continua en los extremos del intervalo, de hecho, si intentamos aplicar la regla de Barrow obtendríamos:

$$\int_{-1}^{1} \frac{x + 2}{x^2 - 1} dx = \left[\frac{3}{2}\ln|x - 1| - \frac{1}{2}\ln|x + 1|\right]_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{3}{2}\ln 0 - \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{3}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\ln 0 = -\infty$$

Luego esta integral no existe.

088 **Determina el área de la región limitada por la gráfica de la función $f(x) = (x-2)^2(x+2)$ y el eje X en el intervalo $[-3, 2]$.**



Hallamos los puntos de corte de la función con el eje X.

$$\left.\begin{array}{l} y = (x-2)^2(x+2) \\ y = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

El área es:

$$\text{Área} = \left|\int_{-3}^{-2} (x-2)^2(x+2)dx\right| + \left|\int_{-2}^{2} (x-2)^2(x+2)dx\right| =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - 2x^2 + 8x\right]_{-3}^{-2} + \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - 2x^2 + 8x\right]_{-2}^{2} =$$

$$= \left|-\frac{44}{3} + \frac{15}{4}\right| + \left|\frac{20}{3} + \frac{44}{3}\right| = \frac{131}{12} + \frac{64}{3} = \frac{387}{12} = \frac{129}{4}$$

089 **Halla el área limitada por la gráfica de la función $f(x) = \ln(1+x^2)$ y el eje X en el intervalo $[0, 2]$.**

La función no corta al eje X en el intervalo $[0, 2]$ luego, el área en el intervalo $[0, 2]$ es el valor de la siguiente integral:

$$\left|\int_0^2 \ln(1+x^2)\,dx\right| = \left[x\ln(1+x^2)\right]_0^2 - \left|\int_0^2 \frac{2x}{1+x^2}dx\right| =$$

$$u = \ln(1+x^2) \rightarrow du = \frac{2x}{1+x^2dx}$$

$$dv = dx \rightarrow v = x$$

$$= \left[x\ln(1+x^2) - 2x + arctg\,x + k\right]_0^2 = 2\ln 5 - 4 + arctg\,2$$

090 **Calcula el área de la región limitada por la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$, el eje X y las rectas $x = -4$ y $x = -2$.**

(Castilla y León. Junio 2007. Prueba A. Problema 2)

La función $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$ corta al eje X únicamente en el origen de coordenadas.

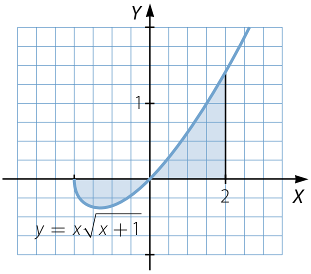
$$f(x) = 0 \rightarrow \frac{x}{x^2-1} = 0 \rightarrow x = 0$$

Por tanto el área buscada es:

$$\text{Área} = \left|\int_{-4}^{-2} \frac{x}{x^2-1}\,dx\right| = \left|\left[\frac{1}{2}\ln\left|x^2-1\right|\right]_{-4}^{-2}\right| = \left|\frac{1}{2}\ln 3 - \frac{1}{2}\ln 15\right| = \frac{1}{2}\ln 5$$

091 **Calcula el área limitada por la curva $y = x\sqrt{x+1}$, la recta $y = 0$ y la recta $x = 1$. Previamente haz un esquema del recinto cuya área hay que calcular.**

(La Rioja. Junio 2007. Propuesta B. Ejercicio 5)



Calculamos los puntos de corte de la función con la recta $y = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} y = 0 \\ y = x\sqrt{x+1} \end{array}\right\} \to x\sqrt{x+1} = 0 \to \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$\text{Área} = \left|\int_{-1}^{0} x\sqrt{x+1}\,dx\right| + \left|\int_{0}^{1} x\sqrt{x+1}\,dx\right| = \left|\int_{0}^{1} (t^2-1)\,2t^2dt\right| + \left|\int_{1}^{\sqrt{2}} (t^2-1)\,2t^2dt\right| =$$

$x+1 = t^2 \to dx = 2tdt$
$x = -1 \to t = 0$
$x = 0 \to t = 1$
$x = 1 \to t = \sqrt{2}$

$$= \left|\left[\frac{2t^5}{5} - \frac{2t^3}{3}\right]_0^1\right| + \left|\left[\frac{2t^5}{5} - \frac{2t^3}{3}\right]_1^{\sqrt{2}}\right| = \left|\frac{2}{5} - \frac{2}{3}\right| + \left|\frac{8\sqrt{2}}{5} - \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{5} + \frac{2}{3}\right| =$$

$$= \frac{4}{15} + \frac{4}{15} + \frac{4\sqrt{2}}{15} = \frac{8+4\sqrt{2}}{15}$$

092 **Calcular el área del recinto limitado por la curva de ecuación $f(x) = \left|x^2 - 4\right|$ y las rectas $x = -1$, $x = 4$ e $y = 0$.**

(C. Valenciana. Junio 2006. Ejercicio A. Problema 3)

Calculamos los puntos de corte de la curva $f(x) = \left|x^2 - 4\right|$ y el eje X $(y = 0)$.

$$\left.\begin{array}{l} y = 0 \\ y = \left|x^2-4\right| \end{array}\right\} \to \left|x^2-4\right| = 0 \to \begin{cases} x = -2 \\ x = +2 \end{cases}$$

Escribimos la función valor absoluto como función definida a trozos.

$$f(x) = \left|x^2-4\right| = \begin{cases} x^2-4 & \text{si } x \le -2 \\ 4-x^2 & \text{si } -2 < x < 2 \\ x^2-4 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$$

$$\text{Área} = \left|\int_{-1}^{2} (4-x^2)\,dx\right| + \left|\int_{2}^{4} (x^2-4)\,dx\right| = \left|\left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2}\right| + \left|\left[\frac{x^3}{3} - 4x\right]_{2}^{4}\right|$$

$$= 9 + \frac{32}{3} = \frac{59}{3}$$

093 Calcula el área determinada por la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+4x+3}$ y las rectas $y = 0$, $x = 0$ y $x = 3$.

(Murcia. Junio 2006. Bloque 4. Cuestión B)

La función no corta a $y = 0$ salvo en el punto de abscisa $x = 0$.

$$\left|\int_0^3 \frac{x^2}{x^2+4x+3}\,dx\right| = \left|\int_0^3 1+\frac{1/2}{x+1}+\frac{-9/2}{x+3}\right| = \left|\left[x+\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{9}{2}\ln|x+3|\right]_0^3\right| =$$
$$= 3+\frac{1}{2}\ln 4-\frac{9}{2}\ln 7+\frac{9}{2}\ln 3$$

094 Dada la función $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$, calcúlese el área de la región limitada por dicha gráfica y las rectas $x = 0$ e $y = 0$.

(Castilla y León. Junio 2006. Prueba B. Problema 2)

Calculamos los puntos de corte.

$$\left.\begin{array}{l} y = 0 \\ y = \dfrac{x-1}{x+1} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{x-1}{x+1} = 0 \rightarrow x = 1$$

$$\text{Área} = \left|\int_0^1 \frac{x-1}{x+1}\,dx\right| = \int_0^1\left(1+\frac{-2}{x+1}\right)dx = \left|\left[x-2\ln|x+1|\right]_0^1\right| =$$
$$= |1-2\ln 2| = 2\ln 2 - 1$$

095 Calcular el área encerrada por el eje X y la función $f(x) = x\cos x$ entre $x = -\dfrac{\pi}{2}$ y $x = \dfrac{\pi}{2}$.

(Murcia. Septiembre 2007. Bloque 4. Cuestión B)

Calculamos los puntos de corte de la función con el eje X.

$$\left.\begin{array}{l} y = 0 \\ y = x\cos x \end{array}\right\} \rightarrow x\cos x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \dfrac{\pi}{2}+n\pi \end{cases}$$

El área es:

$$\text{Área} = \left|\int_{-\pi/2}^0 x\cos x\,dx\right| + \left|\int_0^{\pi/2} x\cos x\,dx\right| =$$
$$= \left|\left[\cos x + x\,\text{sen}\,x\right]_{-\pi/2}^0\right| + \left|\left[\cos x + x\,\text{sen}\,x\right]_0^{\pi/2}\right| = \left|1-\frac{\pi}{2}\right| + \left|\frac{\pi}{2}-1\right| = \pi - 2$$

096 Halla el área de la región limitada por la gráfica de la función $f(x) = |(x-1)(3x-1)|$, el eje X, el eje Y y la recta $x = 2$.

Hallamos los puntos de corte de la función con el eje X.

$$\left.\begin{array}{l} y = 0 \\ y = |(x-1)(3x-1)| \end{array}\right\} \rightarrow |(x-1)(3x-1)| = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Escribimos la función en forma de función definida a trozos.

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 4x + 1 & \text{si } x \leq \dfrac{1}{3} \\ -3x^2 + 4x - 1 & \text{si } \dfrac{1}{3} < x < 1 \\ 3x^2 - 4x + 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{Área} = \int_0^{1/3} (3x^2 - 4x + 1)\,dx + \int_{1/3}^{1} (-3x^2 + 4x - 1)\,dx + \int_1^2 (3x^2 - 4x + 1)\,dx =$$

$$= \left| \left[x^3 - 2x^2 + x\right]_0^{1/3} \right| + \left| \left[-x^3 + 2x^2 - x\right]_{1/3}^{1} \right| + \left| \left[x^3 - 2x^2 + x\right]_1^2 \right| =$$

$$= \frac{4}{27} + \frac{4}{27} + 2 = \frac{62}{27}$$

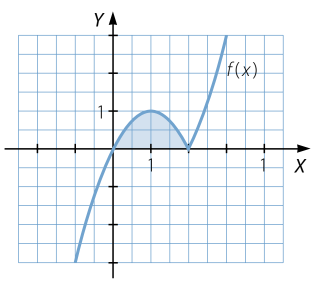
097 Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x|x - 2|$.

a) Esboza la gráfica de f.

b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y el eje de abscisas.

(Andalucía. Septiembre 2007. Opción A. Ejercicio 2)

a)



b) Calculamos los puntos de corte.

$$\left.\begin{array}{l} y = 0 \\ y = x|x - 2| \end{array}\right\} \rightarrow x|x - 2| = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Escribimos la función como función definida a trozos.

$$f(x) = x|x - 2| = \begin{cases} -x^2 + 2x & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 - 2x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$\text{Área} = \int_0^2 (-x^2 + 2x)\,dx = \left[\frac{-x^3}{3} + x^2\right]_0^2 = -\frac{8}{3} + 4 = \frac{4}{3}$$

098 La parábola $f(x) = 4 - x^2$, su recta tangente en $x = 1$ y el eje Y limitan un recinto finito en el plano. Dibujar un esquema de dicho recinto y hallar su área mediante cálculo integral.

(País Vasco. Julio 2007. Bloque D. Problema D)

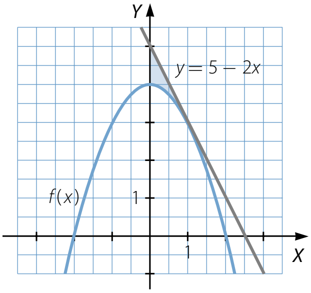
Calculamos la recta tangente en $x = 1$.

$f(1) = 3 \rightarrow$ la recta pasa por el punto $(1, 3)$.

$f'(x) = -2x \rightarrow f'(1) = -2 \rightarrow m = -2$.

La recta tangente en el punto $(1, 3)$ es:

$y - y_0 = m(x - x_0) \rightarrow y - 3 = -2(x - 1) \rightarrow y = 5 - 2x$



$$\text{Área} = \left|\int_0^1 (-2x + 5 - (4 - x^2))\,dx\right| = \left|\int_0^1 (x^2 - 2x + 1)\,dx\right| = \left|\left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x\right]_0^1\right| = \frac{1}{3}$$

099 **Halla el área del recinto limitado por la curva $y = x^2 - 4x$, el eje X y la recta $x = 5$.**

Hallamos los puntos de corte de la curva $y = x^2 - 4x$ con el eje X que es la recta $y = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} y = 0 \\ y = x^2 - 4x \end{array}\right\} \rightarrow x^2 - 4x = 0 \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 4 \end{array}\right.$$

$$\text{Área} = \left|\int_0^4 (x^2 - 4x)\,dx\right| + \left|\int_4^5 (x^2 - 4x)\,dx\right| = \left|\left[\frac{x^3}{3} - 2x^2\right]_0^4\right| + \left|\left[\frac{x^3}{3} - 2x^2\right]_4^5\right| =$$

$$= \left|-\frac{32}{3}\right| + \left|\frac{7}{3}\right| = 13$$

100 **Calcula el área encerrada por la función $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^2 + 1}$ y los ejes X e Y.**

(Murcia. Junio 2007. Bloque 4. Cuestión B)

Calculamos los puntos de corte de la curva $y = \dfrac{x^3 - 1}{x^2 + 1}$ con el eje X que es la recta $y = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} y = 0 \\ y = \dfrac{x^3 - 1}{x^2 + 1} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{x^3 - 1}{x^2 + 1} = 0 \rightarrow x = 1$$

$$\left|\int_0^1 \frac{x^3 - 1}{x^2 + 1}\,dx\right| = \left|\int_0^1 \left(x - \frac{x}{x^2 + 1} - \frac{1}{x^2 + 1}\right)dx\right| =$$

$$= \left|\left[\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln|x^2 + 1| - \operatorname{arctg} x\right]_0^1\right| = \left|\frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{2} - \frac{\pi}{4}\right| = \frac{\pi + 2\ln 2 - 2}{4}$$

101 **Halla el área del recinto limitado por el eje X y la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$.**

Calculamos los puntos de corte de la función con el eje X.

$$x^3 - 6x^2 + 8x = 0 \rightarrow x(x^2 - 6x + 8) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = 4 \end{cases}$$

$$\text{Área} = \left|\int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x)dx\right| + \left|\int_2^4 (x^3 - 6x^2 + 8x)dx\right| =$$

$$= \left|\left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2\right]_0^2\right| + \left|\left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2\right]_2^4\right| =$$

$$= \left|\frac{2^4}{4} - 2\cdot 2^3 + 4\cdot 2^2\right| + \left|\frac{4^4}{4} - 2\cdot 4^3 + 4\cdot 4^2 - \frac{2^4}{4} + 2\cdot 2^3 - 4\cdot 2^2\right| = 4 + |-4| = 8$$

102 **Dada la función: $f(x) = \dfrac{x^2 - 12}{x^2 + 4}$ calcular el área de la región acotada encerrada por su gráfica y el eje X.**

(Madrid. Junio 2007. Opción B. Ejercicio 1)

Hallamos los puntos de corte de la función con el eje X.

$$\frac{x^2 - 12}{x^2 + 4} = 0 \rightarrow x^2 - 12 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{12}$$

$$\text{Área} = \left|\int_{-\sqrt{12}}^{\sqrt{12}} \frac{x^2 - 12}{x^2 + 4}\,dx\right| = \left|\int_{-\sqrt{12}}^{\sqrt{12}} \left(1 - \frac{16}{x^2 + 4}\right)dx\right| = \left|\left[x - 8\,arctg\frac{x}{2}\right]_{-\sqrt{12}}^{\sqrt{12}}\right| =$$

$$= \left|2\sqrt{12} - 16\cdot\frac{\pi}{3}\right| = \frac{16\pi}{3} - 4\sqrt{3}$$

103 **Sea la función $f(x) = x\,sen\,2x$. Calcular la integral de esta función entre $x = 0$ y su primer cero positivo.**

Nota: Llamamos ceros de una función a aquellos puntos donde se anula.

(Aragón. Junio 2005. Opción B. Cuestión 4)

Calculamos el primer cero positivo de la función $f(x) = x\,sen 2x$

$$x\,sen 2x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 0 + \dfrac{k\pi}{2} \end{cases}$$

El primer cero positivo es $x = \dfrac{\pi}{2}$.

$$\int_0^{\pi/2} x\,sen 2x\,dx = \left[-\frac{x\cos 2x}{2}\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2x}{2}\,dx = \left[-\frac{x\cos 2x}{2} + \frac{sen 2x}{4}\right]_0^{\pi/2} = -\frac{\pi}{4}$$

$u = x \rightarrow du = dx$

$dv = sen\,2x\,dx \rightarrow v = -\dfrac{\cos 2x}{2}$

104 **Una parábola corta al eje X en el origen y en el punto $x = 3$. Halla su ecuación, sabiendo que el recinto delimitado por ella y el eje X tiene dos unidades cuadradas de área.**

La parábola es de la forma: $f(x) = ax^2 + bx + c$

- Pasa por el origen $\rightarrow f(0) = 0 \rightarrow c = 0$
- Pasa por el $(3, 0) \rightarrow f(3) = 0 \rightarrow 9a + 3b = 0 \rightarrow b = -3a$
- $\left|\int_0^3 f(x)\,dx\right| = 2 \rightarrow \left|\int_0^3 (ax^2 - 3ax)\,dx\right| = 2 \rightarrow \left|\left[\dfrac{ax^3}{3} + \dfrac{-3ax^2}{2}\right]_0^3\right| = 2$

$$\rightarrow \left|9a - \frac{27a}{2}\right| = 2 \rightarrow |-9a| = 4 \rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{4}{9} \\ a = -\dfrac{4}{9} \end{cases}$$

Hay dos soluciones:

- $f(x) = \dfrac{4}{9}x^2 - \dfrac{4}{3}x$
- $f(x) = -\dfrac{4}{9}x^2 + \dfrac{4}{3}x$

105 **Se considera, en el primer cuadrante, la región R del plano limitada por el eje X, el eje Y, la recta $x = 2$ y la curva:**

$$y = \frac{1}{4 + x^2}$$

a) Calcular razonadamente el área de la región R.

b) Encontrar el valor de α para que la recta $x = \alpha$ divida la región R en dos partes A (izquierda) y B (derecha) tales que el área de A sea el doble que la de B.

(C. Valenciana. Junio 2008. Bloque 3. Problema 1)

a) La función $y = \dfrac{1}{4 + x^2}$ no corta al eje X y siempre es positiva.

$$\text{Área} = \int_0^2 \frac{1}{4 + x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2} arctg \frac{x}{2}\right]_0^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = \frac{\pi}{8}$$

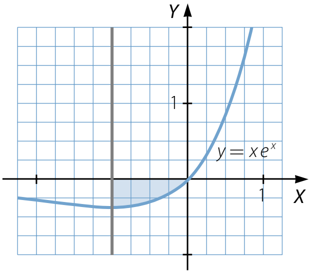
b) $\dfrac{\pi}{16} = \displaystyle\int_0^\alpha \frac{1}{4 + x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2} arctg \frac{x}{2}\right]_0^\alpha = \frac{1}{2}\left(arctg \frac{\alpha}{2}\right)$

$$\rightarrow arctg \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{8} \rightarrow \alpha = 2\, tg \frac{\pi}{8}$$

106 **Dibuja razonadamente el recinto limitado por la curva $y = xe^x$, el eje X y la recta paralela al eje Y que pasa por el punto donde la curva tiene su mínimo relativo. Calcula el área de dicho recinto.**

Calculamos el mínimo relativo de $y = xe^x$.

$y' = (x + 1)e^x \rightarrow 0 = (x + 1)e^x \rightarrow x = -1$. Alcanza el mínimo relativo en $x = -1$.



$$\text{Área} = \left|\int_{-1}^{0} xe^x\,dx\right| = \left|\left[(x-1)e^x\right]_{-1}^{0}\right| = \left|-1-\frac{-2}{e}\right| = \left|-1+\frac{2}{e}\right| = 1-\frac{2}{e}$$

107 Halla el área limitada por la curva $y = xe^{-x^2}$, el eje de abscisas y la recta $x = a$, siendo a la abscisa del punto máximo de la curva.

(La Rioja. Septiembre 2007. Propuesta B. Ejercicio 4)

$$y = xe^{-x^2} \rightarrow y' = (1-2x^2)e^{-x^2}$$

$$y' = 0 \rightarrow 0 = (1-2x^2)e^{-x^2} \rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

La función alcanza un máximo en $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y un mínimo en $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$y = 0 \rightarrow 0 = xe^{-x^2} \rightarrow x = 0 \rightarrow$ La función corta al eje de abscisas en $x = 0$.

$$\text{Área} = \left|\int_{0}^{\sqrt{2}/2} xe^{-x^2}\,dx\right| = \left|\left[\frac{e^{-x^2}}{-2}\right]_0^{\sqrt{2}/2}\right| = \left|\frac{e^{-\frac{1}{2}}}{-2} - \frac{1}{-2}\right| = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{e}}$$

108 Calcula el área del recinto limitado por la curva:

$$y = x - 2\,\text{sen}\,x$$

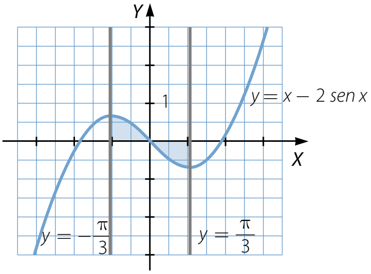
y las rectas: $y = 0$ $\quad x = -\frac{\pi}{3} \quad x = \frac{\pi}{3}$

Realiza un dibujo aproximado del recinto.

(Baleares. Junio 2007. Opción B. Cuestión 4)

La función es una función impar luego, el área es:

$$\text{Área} = 2\left|\int_{0}^{\pi/3} (x - 2\,\text{sen}\,x)\,dx\right| = 2\left|\left[\frac{x^2}{2} + 2\cos x\right]_0^{\pi/3}\right| = 2\left|\frac{\pi^2}{18} - 1\right| = 2 - \frac{\pi^2}{9}$$



109 Se sabe que cierta función $F(x)$ verifica las condiciones siguientes:

$$F'(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \qquad F(1) = 3$$

a) Calcula $F(x)$.

b) Calcula el área comprendida entre $F(x)$ y el eje X desde $x = 0$ hasta $x = 1$.

(Cataluña. Junio 2008. Cuestión 1)

a) • $F'(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x}} \rightarrow F(x) = \displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\,dx = \frac{4\sqrt[4]{x^3}}{3} + k$

• $F(1) = 3 \rightarrow \dfrac{4}{3} + k = 3 \rightarrow k = \dfrac{5}{3}$

Por tanto: $F(x) = \dfrac{4\sqrt[4]{x^3}}{3} + \dfrac{5}{3}$

b) La función $F(x)$ es siempre positiva luego:

$$\text{Área} = \left|\int_0^1 F(x)\,dx\right| = \left|\int_0^1 \left(\frac{4\sqrt[4]{x^3}}{3} + \frac{5}{3}\right)dx\right| = \left|\left[\frac{16\sqrt[4]{x^7}}{21} + \frac{5x}{3}\right]_0^1\right| =$$

$$= \left|\frac{16}{21} + \frac{5}{3}\right| = \frac{17}{7}$$

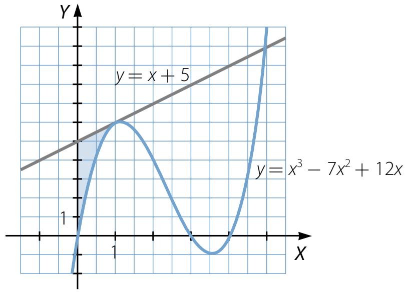
110 Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^3 - 7x^2 + 12x$ en el punto de abscisa 1. Calcula el área del recinto limitado por esa recta, la curva y el eje Y.

$y' = 3x^2 - 14x + 12 \rightarrow y'(1) = 1$ que es el valor de la pendiente $m = 1$.

$y(1) = 6 \rightarrow$ La recta pasa por el punto $(1, 6)$.

La recta tangente a la curva es:

$y - y_0 = m(x - x_0) \rightarrow y - 6 = 1(x - 1) \rightarrow y = x + 5$



$$\text{Área} = \left|\int_0^1 (x + 5 - x^3 + 7x^2 - 12x)\,dx\right| = \left|\int_0^1 (-x^3 + 7x^2 - 11x + 5)\,dx\right| =$$

$$= \left|\left[-\frac{x^4}{4} + \frac{7x^3}{3} - \frac{11x^2}{2} + 5x\right]_0^1\right| = \frac{19}{12}$$

111 Representa gráficamente la figura plana limitada por la curva $y = 2x^3$, su recta tangente en el origen de coordenadas y la recta $x = 2$. Calcula su área.

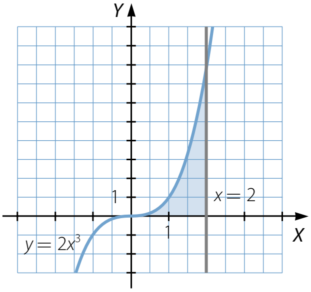
(Extremadura. Septiembre 2007. Opción A. Ejercicio 2)

$y = 2x^3 \rightarrow y(0) = 0$

$y' = 6x \rightarrow y'(0) = 0$

La recta tangente en el origen es:

$y - y_0 = m(x - x_0) \rightarrow y - 0 = 0(x - 0) \rightarrow y = 0$



$$\text{Área} = \left|\int_0^2 2x^3\,dx\right| = \left|\left[\frac{x^4}{2}\right]_0^2\right| = |8 - 0| = 8$$

112 Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones:

$$y = x \qquad y = -x^2 + 4x$$

Hallamos los puntos de corte.

$$\left.\begin{array}{l} y = x \\ y = -x^2 + 4x \end{array}\right\} \rightarrow x^2 - 3x = 0 \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3 \end{array}\right.$$

$$\text{Área} = \left|\int_0^3 (x + x^2 - 4x)\,dx\right| = \int_0^3 (x^2 - 3x)\,dx = \left|\left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}\right]_0^3\right| = \left|9 - \frac{27}{2}\right| = \frac{9}{2}$$

113 Hállese el área del recinto limitado por la parábola $y = -x^2$ y la recta $y = 2x - 3$.

(Castilla y León. Junio 2006. Prueba A. Cuestión 4)

Hallamos los puntos de corte.

$$\left.\begin{array}{l} y = -x^2 \\ y = 2x - 3 \end{array}\right\} \rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -3 \\ x = 1 \end{array}\right.$$

$$\text{Área} = \left|\int_{-3}^1 (x^2 + 2x - 3)dx\right| = \left|\left[\frac{x^3}{3} + x^2 - 3x\right]_{-3}^1\right| = \left|\frac{1}{3} + 1 - 3 - 9 - 9 + 9\right| = \frac{32}{3}$$

114 Determina el área del recinto limitado por la recta $y = 3 - 2x$ y la curva $y = 2x - x^2$.

Calculamos los puntos de corte.

$$\left.\begin{array}{l} y = 3 - 2x \\ y = 2x - x^2 \end{array}\right\} \rightarrow 2x - x^2 = 3 - 2x \rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right.$$

$$\text{Área} = \left|\int_1^3 (2x - x^2 - 3 + 2x)\,dx\right| = \left|\int_1^3 (-x^2 + 4x - 3)\,dx\right| =$$

$$= \left|\left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x\right]_1^3\right| = \left|-9 + 18 - 9 + \frac{1}{3} - 2 + 3\right| = \frac{4}{3}$$

115 **Hallar el área del recinto limitado por las curvas de ecuaciones:**

$$y = x^2 - 4 \qquad y = 3x - 6$$

(Castilla y León. Junio 2007. Prueba B. Cuestión 4)

Calculamos los puntos de corte de las dos curvas.

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 - 4 \\ y = 3x - 6 \end{array}\right\} \rightarrow x^2 - 4 = 3x - 6 \rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\text{Área} = \left|\int_1^2 (x^2 - 4 - 3x + 6)\,dx\right| = \left|\int_1^2 (x^2 - 3x + 2)\,dx\right| = \left|\left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_1^2\right| =$$

$$= \left|\frac{8}{3} - 6 + 4 - \frac{1}{3} + \frac{3}{2} - 2\right| = \left|-\frac{1}{6}\right| = \frac{1}{6}$$

116 **Calcula el área de la región del plano encerrada por las gráficas de las funciones:**

$$f(x) = 2x \qquad g(x) = 6 + 3x - x^2$$

(Navarra. Junio 2007. Grupo 2. Opción D)

Calculamos los puntos de corte de las gráficas de las dos funciones.

$$\left.\begin{array}{l} y = 2x \\ y = 6 + 3x - x^2 \end{array}\right\} \rightarrow 2x = 6 + 3x - x^2 \rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$\text{Área} = \left|\int_{-2}^3 (2x - 6 - 3x + x^2)\,dx\right| = \left|\int_{-2}^3 (x^2 - x - 6)\,dx\right| =$$

$$= \left|\left[\frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} - 6x\right]_{-2}^3\right| = \left|-\frac{27}{2} - \frac{22}{3}\right| = \frac{125}{6}$$

117 **Halla el área del recinto limitado por las curvas:**

$$y = x^2 - 4x \qquad y = 6x - x^2$$

Calculamos los puntos de corte de las dos curvas.

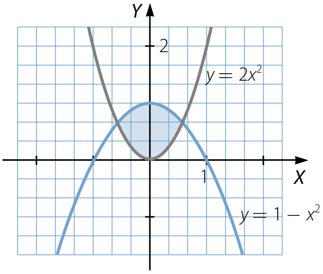
$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 - 4x \\ y = 6x - x^2 \end{array}\right\} \rightarrow x^2 - 4x = 6x - x^2 \rightarrow 2x^2 - 10x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 5 \end{cases}$$

$$\text{Área} = \left|\int_0^5 (x^2 - 4x - 6x + x^2)\,dx\right| = \left|\int_0^5 (2x^2 - 10x)\,dx\right| = \left|\left[\frac{2x^3}{3} - 5x^2\right]_0^5\right| =$$

$$= \left|-\frac{125}{3} - 0\right| = \frac{125}{3}$$

118 Representa gráficamente el recinto plano limitado por las parábolas $y = 1 - x^2$ e $y = 2x^2$ y calcula su área.

(Extremadura. Junio 2007. Opción A. Ejercicio 2)



Calculamos los puntos de corte de las dos curvas.

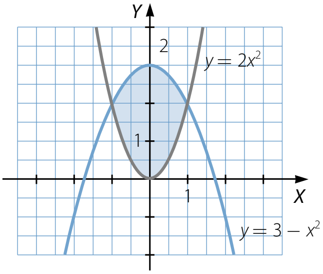
$$\left.\begin{array}{l} y = 1 - x^2 \\ y = 2x^2 \end{array}\right\} \to 1 - x^2 = 2x^2 \to 3x^2 - 1 = 0 \to \begin{cases} x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ x = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$$\text{Área} = \left|\int_{-\sqrt{3}/3}^{\sqrt{3}/3} (2x^2 - 1 + x^2)\,dx\right| = \left|\int_{-\sqrt{3}/3}^{\sqrt{3}/3} (3x^2 - 1)\,dx\right| = \left|\left[x^3 - x\right]_{-\sqrt{3}/3}^{\sqrt{3}/3}\right| =$$

$$= \left|-\frac{2\sqrt{3}}{9} - \frac{2\sqrt{3}}{9}\right| = \frac{4\sqrt{3}}{9}$$

119 Esboza las gráficas de las parábolas $f(x) = 2x^2$ y $f(x) = -x^2 + 3$, sombreando el recinto cerrado que determinan. Calcula el área de dicho recinto.

(Castilla-La Mancha. Septiembre 2007. Bloque 2. Pregunta B)



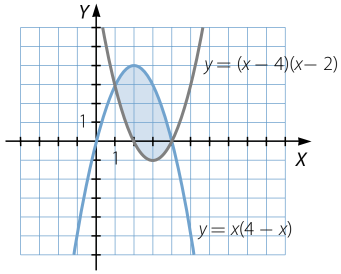
Calculamos los puntos de corte de las dos curvas.

$$\left.\begin{array}{l} y = 2x^2 \\ y = -x^2 + 3 \end{array}\right\} \to 2x^2 = -x^2 + 3 \to 3x^2 - 3 = 0 \to \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\text{Área} = \left|\int_{-1}^{1} (2x^2 + x^2 - 3)\,dx\right| = \left|\int_{-1}^{1} (3x^2 - 3)\,dx\right| = \left|\left[x^3 - 3x\right]_{-1}^{1}\right| = \left|-2 - 2\right| = 4$$

120 Sea P_1 la parábola de ecuación $y = x(4 - x)$ y sea P_2 la parábola de ecuación $y = (x - 4)(x - 2)$. Dibujar un esquema gráfico del recinto finito del plano limitado por dichas parábolas. Hallar el área del recinto mediante cálculo integral.

(País Vasco. Junio 2007. Bloque D. Problema D)



Calculamos los puntos de corte de las dos curvas.

$$\left.\begin{array}{l} y = x(4-x) \\ y = (x-4)(x-2) \end{array}\right\} \rightarrow 4x - x^2 = x^2 - 6x + 8 \rightarrow -2x^2 + 10x - 8 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$$

$$\text{Área} = \left| \int_1^4 (4x - x^2 - x^2 + 6x + 8)\, dx \right| = \left| \int_1^4 (-2x^2 + 10x - 8)\, dx \right| =$$

$$= \left| \left[\frac{-2x^3}{3} + 5x^2 - 8x \right]_1^4 \right| = \left| \frac{16}{3} + \frac{11}{3} \right| = 9$$

121 Calcula el área de la región del plano encerrada por las gráficas de las funciones $f(x) = x^3 - 3x$ y $g(x) = x$.

(Navarra. Junio 2006. Grupo 2. Opción D)

Calculamos los puntos de corte de las dos curvas.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = x^3 - 3x \\ g(x) = x \end{array}\right\} \rightarrow f(x) = g(x) \rightarrow x^3 - 3x = x \rightarrow x^3 - 4x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\text{Área} = \left| \int_{-2}^0 (x^3 - 3x - x)\, dx \right| + \left| \int_0^2 (x^3 - 3x - x)\, dx \right| = \left| \int_{-2}^0 (x^3 - 4x)\, dx \right| +$$

$$+ \left| \int_0^2 (x^3 - 4x)\, dx \right| = \left| \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2 \right]_{-2}^0 \right| + \left| \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2 \right]_0^2 \right| = |4| + |-4| = 8$$

122 Dadas las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3$, determina el área encerrada por las gráficas de ambas funciones entre las rectas $x = 0$ y $x = 1$.

(Aragón. Septiembre 2006. Opción A. Cuestión 2)

Calculamos los puntos de corte de las dos gráficas.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = x^2 \\ g(x) = x^3 \end{array}\right\} \rightarrow f(x) = g(x) \rightarrow x^2 = x^3 \rightarrow x^3 - x^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\text{Área} = \left| \int_0^1 (x^2 - x^3) dx \right| = \left| \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 \right| = \left| \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right| = \frac{1}{12}$$

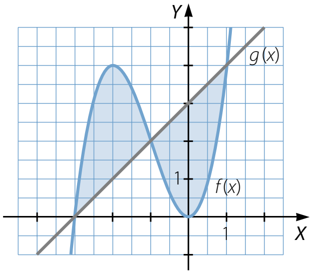
123 Sean $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones definidas mediante $f(x) = x^3 + 3x^2$ y $g(x) = x + 3$.

a) Esboza las gráficas de f y g calculando sus puntos de corte.

b) Calcula el área de cada uno de los dos recintos limitados entre las gráficas de f y g.

(Andalucía. Junio 2007. Opción A. Ejercicio 2)

a)



$$\left.\begin{array}{l} f(x) = x^3 + 3x^2 \\ g(x) = x + 3 \end{array}\right\} \to f(x) = g(x) \to x^3 + 3x^2 = x + 3$$

$$\to x^2(x+3) - (x+3) = 0 \to (x^2 - 1)(x+3) = 0 \to \begin{cases} x = -3 \\ x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

b) $$\text{Área 1} = \left| \int_{-3}^{-1} (x^3 + 3x^2 - x - 3)\, dx \right| = \left| \left[\frac{x^4}{4} + x^3 - \frac{x^2}{2} - 3x \right]_{-3}^{-1} \right| = \left| \frac{7}{4} + \frac{9}{4} \right| = 4$$

$$\text{Área 2} = \left| \int_{-1}^{1} (x^3 + 3x^2 - x - 3)\, dx \right| = \left| \left[\frac{x^4}{4} + x^3 - \frac{x^2}{2} - 3x \right]_{-1}^{1} \right| =$$

$$= \left| -\frac{9}{4} - \frac{7}{4} \right| = |-4| = 4$$

124 Calcula el área del recinto limitado por las curvas $y = x^3$ e $y = 2x - x^2$.

Calculamos los puntos de corte de las dos curvas.

$$\left.\begin{array}{l} y = x^3 \\ y = 2x - x^2 \end{array}\right\} \to x^3 = 2x - x^2 \to x^3 + x^2 - 2x = 0 \to \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\text{Área} = \left| \int_{-2}^{0} (x^3 - 2x + x^2)\, dx \right| + \left| \int_{0}^{1} (x^3 - 2x + x^2)\, dx \right| =$$

$$= \left| \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 \right]_{-2}^{0} \right| + \left| \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 \right]_{0}^{1} \right| = \left| \frac{8}{3} \right| + \left| -\frac{5}{12} \right| = \frac{37}{12}$$

125 Halla los puntos en que se cortan las funciones $f(x) = x^3 - 3x$ y $g(x) = 2x^2$ y calcula el área de la región del plano encerrada entre sus gráficas.

(Navarra. Junio 2008. Grupo 1. Opción D)

Calculamos los puntos de corte de las dos funciones.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = x^3 - 3x \\ f(x) = 2x^2 \end{array}\right\} \rightarrow x^3 - 3x = 2x^2 \rightarrow x^3 - 2x^2 - 3x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$\text{Área} = \left|\int_{-1}^{0} (x^3 - 3x - 2x^2)\,dx\right| + \left|\int_{0}^{3} (x^3 - 3x - 2x^2)\,dx\right| =$$

$$= \left|\left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}\right]_{-1}^{0}\right| + \left|\left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}\right]_{0}^{3}\right| = \left|\frac{7}{12}\right| + \left|-\frac{45}{4}\right| = \frac{71}{6}$$

126 **Dadas las curvas:**

$$y = (x-1)^3 \qquad\qquad y = 5 - x^2$$

calcular razonadamente:

a) Su punto de corte.

b) El área encerrada por ellas y el eje *Y*.

(C. Valenciana. Junio 2005. Ejercicio A. Problema 3)

a) Calculamos el punto de corte.

$$\left.\begin{array}{l} y = (x-1)^3 \\ y = 5 - x^2 \end{array}\right\} \rightarrow (x-1)^3 = 5 - x^2 \rightarrow x^3 - 2x^2 + 3x - 6 = 0$$
$$\rightarrow (x-2)(x^2+3) = 0 \rightarrow x = 2$$

b) El eje *Y* es la recta $x = 0$.

$$\text{Área} = \left|\int_{0}^{2} \big((x-1)^3 - (5 - x^2)\big)dx\right| = \left|\int_{0}^{2} (x^3 - 2x^2 + 3x - 6)dx\right| =$$

$$= \left|\left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 6x\right]_{0}^{2}\right| = \left|-\frac{22}{3}\right| = \frac{22}{3}$$

127 **Calcula el área de la región limitada por las curvas:**

$$y = x^5 + x^2 + 1 \qquad\qquad y = x^5 - x + 1$$

(Baleares. Junio 2006. Opción B. Cuestión 3)

Hallamos los puntos de corte de las dos curvas

$$\left.\begin{array}{l} y = x^5 + x^2 + 1 \\ y = x^5 - x + 1 \end{array}\right\} \rightarrow x^5 + x^2 + 1 = x^5 - x + 1 \rightarrow x^2 + x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\text{Área} = \left|\int_{-1}^{0} (x^5 + x^2 + 1 - x^5 + x - 1)\,dx\right| = \left|\int_{-1}^{0} (x^2 + x)\,dx\right| =$$

$$= \left|\left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}\right| = \left|\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right| = \left|-\frac{1}{6}\right| = \frac{1}{6}$$

128 **Halla el área de la región limitada por la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x}$, el eje Y y la recta $y = 4$.**

Calculamos los puntos de corte de la función $f(x) = \sqrt{x}$ y la recta $y = 4$.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = \sqrt{x} \\ y = 4 \end{array}\right\} \rightarrow \sqrt{x} = 4 \rightarrow x = 16$$

$$\text{Área} = \left| \int_0^{16} (\sqrt{x} - 4)\, dx \right| = \left| \left[\frac{2\sqrt{x^3}}{3} - 4x \right]_0^{16} \right| = \left| \frac{128}{3} - 64 \right| = \left| -\frac{64}{3} \right| = \frac{64}{3}$$

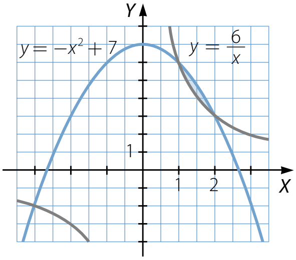
129 **Determina el área del recinto que forman al cortarse las curvas:**

$$y = \frac{6}{x} \qquad\qquad y = -x^2 + 7$$

Calculamos los puntos de corte de ambas curvas.

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{6}{x} \\ y = -x^2 + 7 \end{array}\right\} \rightarrow \frac{6}{x} = -x^2 + 7 \rightarrow 6 = -x^3 + 7x \rightarrow x^3 - 7x + 6 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Como la función $y = \dfrac{6}{x}$ presenta una discontinuidad en el cero, el único recinto que forman las dos curvas está entre $x = 1$ y $x = 2$.



$$\text{Área} = \left| \int_1^2 \left(\frac{6}{x} + x^2 - 7 \right) dx \right| = \left| \left[6 \ln|x| + \frac{x^3}{3} - 7x \right]_1^2 \right| =$$

$$= \left| 6 \ln 2 + \frac{8}{3} - 14 - \frac{1}{3} + 7 \right| = \left| 6 \ln 2 - \frac{14}{3} \right| = \frac{14}{3} - 6 \ln 2$$

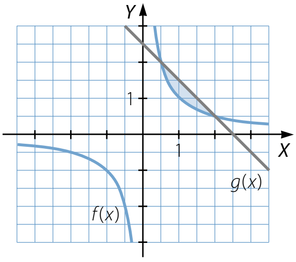
130 **Dadas las funciones $f(x) = \dfrac{1}{x}$ y $g(x) = -x + \dfrac{5}{2}$, se pide:**

a) Esboza sus gráficas y sombrea el recinto encerrado entre ellas.

b) Calcula el área de dicho recinto.

(Castilla-La Mancha. Junio 2007. Bloque 2. Pregunta B)

a)



b) Hallamos los puntos de corte.

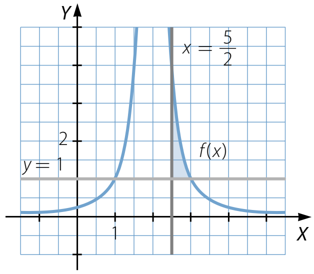
$$\left.\begin{array}{l} y=\dfrac{1}{x} \\ y=-x+\dfrac{5}{2} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{1}{x}=-x+\frac{5}{2} \rightarrow 1=-x^2+\frac{5}{2}x \rightarrow 2x^2-5x+2=0 \rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ x=2 \end{cases}$$

$$\text{Área}=\left|\int_{1/2}^{2}\left(\frac{1}{x}+x-\frac{5}{2}\right)dx\right|=\left|\left[\ln|x|+\frac{x^2}{2}-\frac{5x}{2}\right]_{1/2}^{2}\right|=$$

$$=\left|\ln 2+2-5-\ln\frac{1}{2}-\frac{1}{8}+\frac{5}{4}\right|=\left|-\frac{15}{8}+2\ln 2\right|=\frac{15}{8}-2\ln 2$$

131 Hallar el área de la región acotada comprendida entre la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{1}{(x-2)^2}$ y las rectas $y=1$, $x=\dfrac{5}{2}$.

(Madrid. Junio 2006. Opción B. Ejercicio 4)



Hallamos los puntos de corte.

$$\left.\begin{array}{l} y=\dfrac{1}{(x-2)^2} \\ y=1 \end{array}\right\} \rightarrow \frac{1}{(x-2)^2}=1 \rightarrow (x-2)^2=1 \rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=3 \end{cases}$$

El recinto está situado entre las abscisas $x=\dfrac{5}{2}$ y $x=3$.

$$\text{Área}=\left|\int_{5/2}^{3}\left(\frac{1}{(x-2)^2}-1\right)dx\right|=\left|\left[\left(-\frac{1}{x-2}-x\right)\right]_{5/2}^{3}\right|=\left|-4+\frac{9}{2}\right|=\frac{1}{2}$$

132 Hallar el área de la región acotada comprendida entre las gráficas de las funciones $y=\dfrac{1}{x^2+4}$, $y=\dfrac{x}{16}$, y el eje Y.

(Canarias. Junio 2007. Opción A. Cuestión 2)

Hallamos los puntos de corte.

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{1}{x^2+4} \\ y = \dfrac{x}{16} \end{array}\right\} \to \frac{1}{x^2+4} = \frac{x}{16} \to x^3 + 4x - 16 = 0$$
$$\to (x-2)(x^2+2x+8) = 0 \to x = 2$$

$$\text{Área} = \left| \int_0^2 \left(\frac{1}{x^2+4} - \frac{x}{16} \right) dx \right| = \left| \left[\frac{1}{2} Arctg \frac{x}{2} - \frac{x^2}{32} \right]_0^2 \right| = \left| \frac{\pi}{8} - \frac{1}{8} \right| = \frac{1}{8}(\pi - 1)$$

133 **Halla el área de la región limitada por las gráficas de las funciones $y = e^x$, $y = e^{-x}$, el eje X y las rectas $x = 1$ y $x = -1$.**

Hallamos los puntos de corte.

$$\left.\begin{array}{l} y = e^x \\ y = e^{-x} \end{array}\right\} \to e^x = e^{-x} \to e^{2x} = 1 \to x = 0$$

$$\text{Área} = \left| \int_{-1}^0 e^x dx \right| + \left| \int_0^1 e^{-x} dx \right| = \left| [e^x]_{-1}^0 \right| + \left| [-e^{-x}]_0^1 \right| = \left| 1 - \frac{1}{e} \right| + \left| -\frac{1}{e} + 1 \right| = 2 - \frac{2}{e}$$

134 **Calcular el área encerrada por las funciones $f(x) = 1 + \ln x$ y $g(x) = \dfrac{1}{x}$ y las rectas $x = 1$ y $x = 2$.**

(Murcia. Junio 2008. Bloque 4. Cuestión B)

Calculamos los puntos de corte por si alguno estuviera entre $x = 1$ y $x = 2$.

$$\left.\begin{array}{l} y = 1 + \ln x \\ y = \dfrac{1}{x} \end{array}\right\} \to 1 + \ln x = \frac{1}{x} \to x = 1$$

$$\text{Área} = \left| \int_1^2 \left(1 + \ln x - \frac{1}{x} \right) dx \right| = \left| \left[-\ln x + x \ln x \right]_1^2 \right| = \left| -\ln 2 + 2\ln 2 \right| = \ln 2$$

135 **Sea la función $f(x) = 1 - x^2$.**

a) Su gráfica determina con el eje de abscisas un recinto limitado D. Calcula su área.

b) La gráfica de la función $g(x) = x^2$ divide D en tres partes D_1, D_2 y D_3. Haz un dibujo de los tres recintos.

c) Calcula el área del recinto D_2 que contiene al punto $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$.

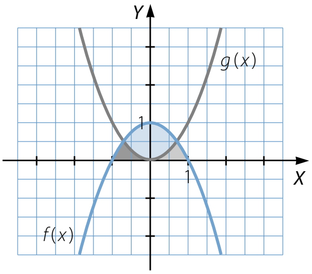
(Asturias. Septiembre 2007. Bloque 6)

a) Hallamos los puntos de corte de la función $f(x) = 1 - x^2$ con el eje X.

$$\left.\begin{array}{l} y = 1 - x^2 \\ y = 0 \end{array}\right\} \to 1 - x^2 = 0 \to \left\{\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \end{array}\right.$$

$$\text{Área} = \left| \int_{-1}^1 (1 - x^2)\, dx \right| = \left| \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 \right| = \left| 1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} \right| = \frac{4}{3}$$

b)



c) Hallamos los puntos de corte de ambas curvas.

$$\left.\begin{array}{l} y = 1 - x^2 \\ y = x^2 \end{array}\right\} \to 1 - x^2 = x^2 \to 2x^2 = 1 \to \begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Área} = \left| \int_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2} (1 - x^2 - x^2)\,dx \right| = \left| \left[x - \frac{2x^3}{3} \right]_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2} \right| =$$

$$= \left| \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{6} \right| = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

136 **Calcula el valor de *m* para que el área del recinto limitado por la recta $y = mx$ y la curva $y = x^3$ sea 2 unidades cuadradas.**

(Galicia. Junio 2006. Bloque 3. Opción 2)

Hallamos los puntos de corte.

$$\left.\begin{array}{l} y = mx \\ y = x^3 \end{array}\right\} \to mx = x^3 \to x^3 - mx = 0 \to x(x^2 - m) = 0 \to \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{m} \end{cases}$$

Para que se forme un recinto deben cortarse en más de un punto luego, $m > 0$.

$$\text{Área} = \left| \int_{-\sqrt{m}}^{0} (x^3 - mx)\,dx \right| + \left| \int_{0}^{\sqrt{m}} (x^3 - mx)\,dx \right| =$$

$$= \left| \left[\frac{x^4}{4} - \frac{mx^2}{2} \right]_{-\sqrt{m}}^{0} \right| + \left| \left[\frac{x^4}{4} - \frac{mx^2}{2} \right]_{0}^{\sqrt{m}} \right| =$$

$$= \left| \frac{m^2}{4} - \frac{m^2}{2} \right| + \left| \frac{m^2}{4} - \frac{m^2}{2} \right| = \frac{m^2}{2}$$

$$\frac{m^2}{2} = 2 \to m^2 = 4 \to m = 2$$

137 La curva $y = x^2 - 2x + 1$ y la recta que pasa por los puntos $A(1, 0)$ y $B(3, 4)$ limitan un recinto finito en el plano.

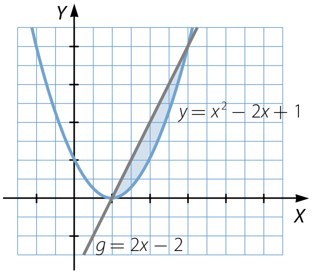
a) Traza un esquema gráfico de dicho recinto.

b) Halla su área.

(Asturias. Septiembre 2006. Bloque 6)

a) La recta que pasa por estos dos puntos es:

$$\frac{y-0}{4} = \frac{x-1}{2} \rightarrow y = 2x - 2$$



b) $$\text{Área} = \left| \int_1^3 (x^2 - 2x + 1 - 2x + 2)\, dx \right| =$$

$$= \left| \int_1^3 (x^2 - 4x + 3)\, dx \right| =$$

$$= \left| \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x \right]_1^3 \right| = \left| 0 - \frac{4}{3} \right| = \frac{4}{3}$$

138 El área del recinto limitado por las curvas de ecuaciones $y = \dfrac{x^2}{a}$ e $y = \sqrt{ax}$, con $a > 0$, es 3. Calcula el valor de a.

(Andalucía. Junio 2006. Opción B. Ejercicio 2)

Hallamos los puntos de corte.

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{x^2}{a} \\ y &= \sqrt{ax} \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{x^2}{a} = \sqrt{ax} \rightarrow \frac{x^4}{a^2} = ax \rightarrow x^4 - a^3x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = a \end{cases}$$

$$\text{Área} = \left| \int_0^a \left(\frac{x^2}{a} - \sqrt{ax} \right) dx \right| = \left| \left[\frac{x^3}{3a} - \frac{2}{3}\sqrt{ax^3} \right]_0^a \right| =$$

$$= \left| \frac{a^2}{3} - \frac{2a^2}{3} \right| = \frac{a^2}{3}$$

$$3 = \frac{a^2}{3} \rightarrow a = 3$$

139 La curva $y = x^3$, su recta tangente en el punto $x = 2$ y el eje X limitan en el primer cuadrante un recinto finito del plano. Dibujar un esquema gráfico de dicho recinto y calcular su área.

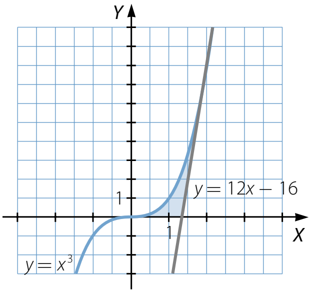
(País Vasco. Junio 2006. Bloque D. Problema D)

$$y' = 3x^2 \rightarrow y'(2) = 12$$

$$y(2) = 8$$

La recta tangente es:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \rightarrow y - 8 = 12(x - 2) \rightarrow y = 12x - 16$$



$$\text{Área} = \left| \int_0^{4/3} x^3\, dx \right| + \left| \int_{4/3}^{2} (x^3 - 12x + 16)\, dx \right| =$$

$$= \left| \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^{4/3} \right| + \left| \left[\frac{x^4}{4} - 6x^2 + 16x \right]_{4/3}^{2} \right| = \left| \frac{64}{81} \right| + \left| \frac{44}{81} \right| = \frac{4}{3}$$

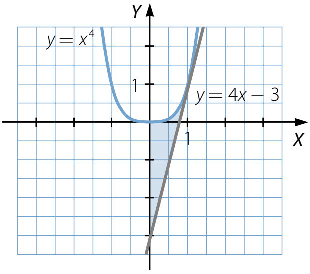
140 Representa gráficamente la figura plana limitada por la curva $y = x^4$, su recta tangente en el punto (1, 1) y el eje Y. Calcula su área.

(Extremadura. Junio 2006. Repertorio A. Ejercicio 2)

$$y' = 4x^3 \rightarrow y'(1) = 4$$

La recta tangente en el punto es:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \rightarrow y - 1 = 4(x - 1) \rightarrow y = 4x - 3$$



$$\text{Área} = \left| \int_0^1 (x^4 - 4x + 3)\, dx \right| = \left| \left[\frac{x^5}{5} - 2x^2 + 3x \right]_0^1 \right| = \left| \frac{1}{5} - 2 + 3 \right| = \frac{6}{5}$$

141 La parábola $y = 4 - x^2$, su recta tangente en el punto $x = 1$ y el eje Y limitan un recinto finito del plano. Dibujar un esquema de dicho recinto y hallar su área mediante el cálculo integral.

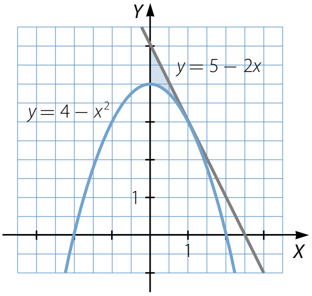
(País Vasco. Julio 2007. Bloque D. Problema D)

$y(1) = 3$

$y' = -2x \rightarrow y'(1) = -2$

La recta tangente en el punto es:

$y - y_0 = m(x - x_0) \rightarrow y - 3 = -2(x - 1) \rightarrow y = -2x + 5$



$$\text{Área} = \left| \int_0^1 (4 - x^2 + 2x - 5)\,dx \right| = \left| \int_0^1 (-x^2 + 2x - 1)\,dx \right| =$$

$$= \left| \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 - x \right]_0^1 \right| = \left| -\frac{1}{3} + 1 - 1 \right| = \frac{1}{3}$$

142 Calcula el área de la región limitada por la parábola $y = x^2 + 4$ y sus tangentes en los puntos $x = -1$ y $x = 1$.

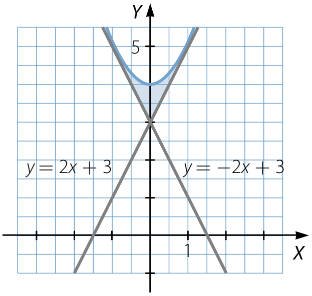
$y(1) = 5 \qquad y(-1) = 5$

$$y' = 2x \rightarrow \begin{cases} y'(-1) = -2 \\ y'(1) = 2 \end{cases}$$

Las rectas tangentes son:

$y - y_0 = m(x - x_0) \rightarrow y - 5 = -2(x + 1) \rightarrow y = -2x + 3$

$y - y_0 = m(x - x_0) \rightarrow y - 5 = 2(x - 1) \rightarrow y = 2x + 3$



$$\text{Área} = \left| \int_{-1}^{0} (x^2 + 4 + 2x - 3)\,dx \right| + \left| \int_{0}^{1} (x^2 + 4 - 2x - 3)\,dx \right| =$$

$$= \left| \left[\frac{x^3}{3} + x^2 + x \right]_{-1}^{0} \right| + \left| \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x \right]_{0}^{1} \right| = \left| \frac{1}{3} \right| + \left| \frac{1}{3} \right| = \frac{2}{3}$$

143 a) **Halla el área delimitada por $g(x) = x + 2$ y $h(x) = 4 - x^2$.**

b) **Da otra expresión $p(x)$ tal que el área comprendida entre la gráfica de $y = p(x)$ y el eje X, entre los valores $x = -1$ y $x = 1$, coincida con el área que has calculado en el apartado anterior. Justifica la respuesta.**

(Cantabria. Junio 2005. Bloque 1. Opción A)

a) Hallamos los puntos de corte.

$$\left.\begin{array}{l} y = x + 2 \\ y = 4 - x^2 \end{array}\right\} \to x + 2 = 4 - x^2 \to x^2 + x - 2 = 0 \to \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\text{Área} = \left| \int_{-2}^{1} (x + 2 - 4 + x^2)\,dx \right| = \left| \left[\frac{x^2}{2} - 2x + \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^{1} \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3} - 2 - 4 + \frac{8}{3} \right| = \left| -\frac{9}{2} \right| = \frac{9}{2}$$

b) Basta tomar una recta paralela al eje X, $y = a$, de tal forma que:

$$a \cdot 2 = \frac{9}{2} \to a = \frac{9}{4} \qquad\qquad p(x) = \frac{9}{4}$$

PREPARA TU SELECTIVIDAD

1 **Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = e^{-2x}$.**

a) **Justifica que la recta de ecuación $y = -2ex$ es la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -\dfrac{1}{2}$.**

b) **Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f, el eje de ordenadas y la recta tangente del apartado anterior.**

(Andalucía. Junio 2008. Opción B. Ejercicio 2)

a) $y\left(-\dfrac{1}{2}\right) = e,\ y' = -2e^{-2x} \to y'\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -2e$

La recta tangente en el punto $\left(-\dfrac{1}{2}, e\right)$ es:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \to y - e = -2e\left(x + \frac{1}{2}\right) \to y = -2ex$$

b) La recta tangente y la curva se cortan en el punto $\left(-\dfrac{1}{2}, e\right)$.

$$\text{Área} = \left| \int_{-1/2}^{0} (e^{-2x} + 2ex)\,dx \right| = \left| \left[-\frac{e^{-2x}}{2} + ex^2 \right]_{-1/2}^{0} \right| = \left| -\frac{1}{2} + \frac{e}{2} - \frac{e}{4} \right| = \frac{e-2}{4}$$

2 Dada la función $f(x) = x^2 - 2x + 2$:

a) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 3$.

b) Calcular el área del recinto acotado limitado por la gráfica de f, la recta tangente obtenida en el apartado a) y el eje Y.

(Canarias. Junio 2007. Opción B. Cuestión 1)

a) $f(3) = 5 \qquad f'(x) = 2x - 2 \rightarrow f'(3) = 4$

La recta tangente en el punto de abscisa $x = 3$ es:

$y - y_0 = m(x - x_0) \rightarrow y - 5 = 4(x - 3) \rightarrow y = 4x - 7$

b) $$\text{Área} = \left| \int_0^3 (x^2 - 2x + 2 - 4x + 7)\,dx \right| = \left| \int_0^3 (x^2 - 6x + 9)\,dx \right| =$$

$$= \left| \left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x \right]_0^3 \right| = \left| 9 - 27 + 27 \right| = 9$$

3 a) Para cada valor de $c > 0$, calcular el área de la región acotada entre la gráfica de la función $f(x) = cx^4 + \frac{1}{c}x^2 + 1$, el eje X y las rectas $x = 0$, $x = 1$.

b) Hallar el valor de c para el cual el área obtenida en el apartado a) es mínima.

(Madrid. Junio 2008. Opción B. Ejercicio 2)

a) $$\text{Área} = \left| \int_0^1 \left(cx^4 + \frac{1}{c}x^2 + 1 \right) dx \right| = \left| \left[\frac{cx^5}{5} + \frac{x^3}{3c} + x \right]_0^1 \right| =$$

$$= \left| \frac{c}{5} + \frac{1}{3c} + 1 \right| = \frac{c}{5} + \frac{1}{3c} + 1$$

b) Queremos minimizar la función $g(c) = \frac{c}{5} + \frac{1}{3c} + 1$

$$g'(c) = \frac{1}{5} - \frac{1}{3c^2} \rightarrow g'(c) = 0 \rightarrow \frac{1}{5} - \frac{1}{3c^2} = 0 \rightarrow 3c^2 = 5 \rightarrow c = \sqrt{\frac{5}{3}}$$

4 Razonar si para $F(x) = \dfrac{\int_0^{x^2} t^2\,dt}{x^4}$ se satisface que $\lim\limits_{x \to 0} F(x) = \lim\limits_{x \to 0} F'(x)$.

(Aragón. Septiembre 2008. Bloque 3. Opción B)

$$\int_0^{x^2} t^2\,dt = \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^{x^2} = \frac{x^6}{3} \rightarrow F(x) = \frac{x^6}{3x^4} = \frac{x^2}{3}$$

$$\lim_{x \to 0} F(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{3} = 0$$

$$\lim_{x \to 0} F'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{2x}{3} = 0$$

5 Dada la función $f(t) = at + b$ (con a y b constantes reales), se define $F(x) = x\int_1^{x+1} f(t)\,dt$. Se pide obtener razonadamente:

a) La integral $\int_1^{x+1} f(t)\,dt$.

b) La expresión de la derivada de $F'(x)$ de la función $F(x)$.

c) La relación entre los valores a y b para la que se verifica: $F''(0) = 0$

(C. Valenciana. Septiembre 2008. Bloque 3. Problema 1)

$$\text{a)}\quad \int_1^{x+1} f(t)\,dt = \int_1^{x+1} (at + b)\,dt = \left[\frac{at^2}{2} + bt\right]_1^{x+1} =$$

$$= \frac{a(x+1)^2}{2} + b(x+1) - \frac{a}{2} - b = \frac{a(x^2 + 2x)}{2} + bx$$

$$\text{b)}\quad F(x) = x\left(\frac{a(x^2 + 2x)}{2} + bx\right) =$$

$$= \frac{a}{2}(x^3 + 2x^2) + bx^2 \rightarrow F'(x) = \frac{a}{2}(3x^2 + 4x) + 2bx$$

$$\text{c)}\quad F''(x) = \frac{a}{2}(6x + 4) + 2b \rightarrow F''(0) = 2a + 2b$$

$$0 = 2a + 2b \rightarrow a = -b$$

6 Sea R el rectángulo del plano con vértices en los puntos V_1 (0, 0), V_2 (3, 0), V_3 (3, 9) y V_4 (0, 9). Demostrar que para todo valor de A la curva de ecuación $y = Ax^2 + (3 - 3A)x$ pasa por los vértices V_1 y V_3 y divide al rectángulo en dos regiones.

Calcular el área de dichas regiones y encontrar el valor de A para que la región situada por encima de la curva tenga un área doble que la situada por debajo de la curva.

(País Vasco. Junio 2008. Bloque D. Problema D)

$y = Ax^2 + (3 - 3A)x$

$y(0) = 0 \rightarrow$ La curva pasa por el vértice V_1.

$y(3) = 9A + (3 - 3A)\cdot 3 = 9 \rightarrow$ La curva pasa por el vértice V_3.

El área del rectángulo es: $b \cdot h = 3 \cdot 9 = 27$

El área de la parte del rectángulo que queda bajo la curva es:

$$\text{Área} = \left|\int_0^3 (Ax^2 + (3 - 3A)x)\,dx\right| = \left|\left[\frac{Ax^3}{3} + \frac{(3 - 3A)x^2}{2}\right]_0^3\right| = \left|9A - \frac{27(1 - A)}{2}\right| =$$

$$= \left|\frac{45}{2}A - \frac{27}{2}\right| = \begin{cases} \dfrac{27}{2} - \dfrac{45}{2}A & \text{si } A \le \dfrac{3}{5} \\ \dfrac{45}{2}A - \dfrac{27}{2} & \text{si } A > \dfrac{3}{5} \end{cases}$$

El área de la parte del rectángulo que queda sobre la curva es:

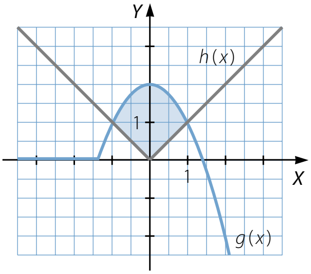
$$\text{Área} = 27 - \left|\frac{45}{2}A - \frac{27}{2}\right| = \begin{cases} \dfrac{27}{2} + \dfrac{45}{2}A & \text{si } A \le \dfrac{3}{5} \\ \dfrac{81}{2} - \dfrac{45}{2}A & \text{si } A > \dfrac{3}{5} \end{cases}$$

Para que la región situada por encima de la curva tenga un área doble que la que está por debajo:

$$3 \cdot \left|\frac{45}{2}A - \frac{27}{2}\right| = 27 \rightarrow \left|\frac{45}{2}A - \frac{27}{2}\right| = 9 \rightarrow \begin{cases} \dfrac{27}{2} - \dfrac{45}{2}A - 9 = 0 \rightarrow A = \dfrac{1}{5} \\ \dfrac{45}{2}A - \dfrac{27}{2} - 9 = 0 \rightarrow A = 1 \end{cases}$$

7 Dada la función $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \le -\sqrt{2} \\ -x^2 + 2 & \text{si } x > -\sqrt{2} \end{cases}$, calcula el área de la región del plano limitada por las gráficas de $g(x)$ y $h(x) = |x|$.

(Galicia. Septiembre 2007. Bloque 3. Opción 2)



Hallamos los puntos de corte.

$$-x^2 + 2 = |x| \rightarrow \begin{cases} -x^2 + 2 = -x \rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow x = -1 \\ -x^2 + 2 = x \rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow x = 1 \end{cases}$$

$$\text{Área} = \left|\int_{-1}^{0} (-x^2 + 2 + x)\,dx\right| + \left|\int_{0}^{1} (-x^2 + 2 - x)\,dx\right| =$$

$$= \left|\left[-\frac{x^3}{3} + 2x + \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}\right| + \left|\left[-\frac{x^3}{3} + 2x - \frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1}\right| = \left|\frac{7}{6}\right| + \left|\frac{7}{6}\right| = \frac{7}{3}$$

8 En un plano, el trazado de una carretera discurre según la ecuación $y = \dfrac{x^2}{4} - x$, siendo un río el eje X. En el terreno entre el río y la carretera hay un pinar. Si expresamos las distancias en kilómetros, ¿cuánto vale el pinar si la hectárea se paga a 60 €?

(C. Valenciana. Junio 2004. Ejercicio A. Problema 4)

Hallamos el corte de la carretera con el río.

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{x^2}{4} - x \\ y = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \frac{x^2}{4} - x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

El área del pinar en km^2 es:

$$\text{Área} = \left| \int_0^4 \left(\frac{x^2}{4} - x \right) dx \right| = \left| \left[\frac{x^3}{12} - \frac{x^2}{2} \right]_0^4 \right| = \left| \frac{16}{3} - 8 \right| = \left| -\frac{8}{3} \right| = \frac{8}{3} \text{ km}^2$$

El precio del pinar es:

$$\frac{8}{3} \cdot 100 \cdot 60 = 16.000 \text{ €}$$