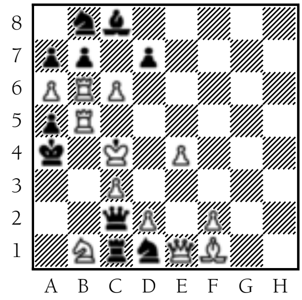
11 Integrales indefinidas

LITERATURA Y MATEMÁTICAS

La tabla de Flandes



–Según están dispuestas las piezas y teniendo en cuenta que acaban de mover negras, lo primero es averiguar cuál de las piezas negras ha realizado ese último movimiento. […] Para conseguirlo resulta más fácil descartar las piezas negras que no han podido mover porque están bloqueadas, o por la posición que ocupan… Es evidente que ninguno de los tres peones negros A7, B7 o D7 ha movido, porque todos siguen aún en las posiciones que ocupaban al empezar el juego… El cuarto y último peón, A5, tampoco ha podido mover, bloqueado como está entre un peón blanco y su propio rey negro… También descartamos el alfil negro de C8, todavía en su posición inicial de juego, porque el alfil se mueve en diagonal, y en sus dos posibles salidas diagonales hay peones de su mismo bando que aún no han movido… En cuanto al caballo negro de B8, no movió tampoco, pues sólo habría podido llegar ahí desde A6, C6 o D7, y esas tres casillas ya están ocupadas por otras piezas… ¿Comprenden?

–Perfectamente –Julia seguía la explicación inclinada sobre el tablero–. Eso demuestra que seis de las diez piezas negras no han podido mover…

–Más de seis. La torre negra que está en C1 es evidente que tampoco, pues mueve en línea recta y sus tres casillas contiguas se encuentran ocupadas… Eso hace siete piezas negras cuyo movimiento en la última jugada hay que descartar por imposible. Pero también podemos descartar el caballo negro D1.

–¿Por qué? –se interesó César–. Podría provenir de las casillas B2 o E3…

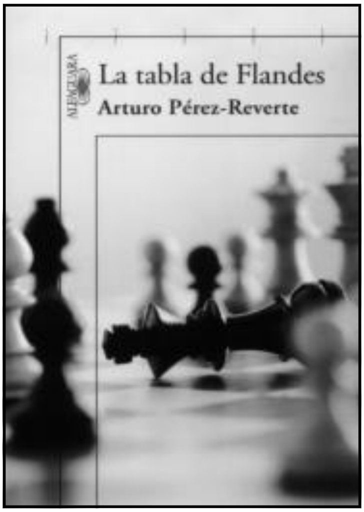
–No. En cualquiera de las dos, ese caballo habría estado dando jaque al rey blanco que tenemos en C4 […] Y ningún caballo o pieza que tenga a un rey en jaque abandona el jaque voluntariamente; esa es una jugada imposible. En vez de retirarse, comería al rey enemigo, concluyendo la partida. Semejante situación no puede darse nunca, por lo que deducimos que el caballo D1 tampoco movió.

–Eso –Julia no levantaba los ojos del tablero– reduce las posibilidades a dos piezas, ¿no?

ARTURO PÉREZ-REVERTE

La tabla de Flandes

Arturo Pérez-Reverte



Mientras Julia, una joven restauradora, limpia un cuadro y lo pone a punto para ser subastado, descubre la frase: *Quis necavit equitem*, cuya traducción sería *¿Quién mató al caballero?* La frase, que fue ocultada por el propio artista mediante varias capas de óleo, aumentará seguramente la cotización del cuadro, pero antes Julia quiere averiguar qué significa y por qué el pintor decidió ocultarla. Con la ayuda de un ex-novio, profesor de Historia, logra identificar a los tres personajes de esa tabla flamenca pintada en el siglo XVI por Van Huys: los dos hombres que juegan al ajedrez son el duque Fernando de Ostenburgo y uno de sus caballeros, Roger de Arras; la mujer que, en segundo plano, lee un libro, es a esposa del duque, Beatriz de Borgoña. Se entera también de que el caballero Roger fue asesinado tres años antes de que se pintara la tabla, pero el asesino nunca fue descubierto. ¿Quién fue su asesino y cuáles los motivos?

Con este enigmático planteamiento logra Pérez-Reverte enganchar tanto a Julia, la restauradora, como a los lectores de su novela *La tabla de Flandes*. ¿Por dónde empezar? César, un viejo anticuario que es como un padre para Julia, conjetura que la clave para resolver el enigma está en la partida de ajedrez, pues ocupa el centro de la composición. Según él, el caballo blanco, ya fuera del tablero, representa a Roger de Arras y por lo tanto, se trataría de averiguar, primero, qué pieza eliminó a ese caballo y, segundo, a qué personaje real representa. Un buen ajedrecista al que trasladan el problema propone «jugar hacia atrás», partiendo de la posición que tienen los trebejos en la tabla hasta llegar al punto en el que una pieza negra come el caballo blanco. Al día siguiente, el jugador de ajedrez –Muñoz– acude al estudio de Julia para exponerle a ésta y a su amigo César cómo evolucionan sus pesquisas y a ésa escena pertenece el párrafo seleccionado.

Razonando de este modo, con tesón y mucha habilidad, en los días sucesivos el ajedrecista consigue resolver completamente el problema. Su solución, transferida por Julia y César del plano simbólico al de la realidad histórica, resuelve el enigma de la pintura. Ya saben quién mató al caballero y por qué el pintor ocultó esa frase, pero antes el novelista ha puesto en marcha otra historia. Alguien, asumiendo el papel del jugador de las piezas negras, decide continuar la estancada partida del cuadro ajustándose a la misma *alegoría*: las piezas representan a personas reales y, cuando alguna de las negras *come* en el tablero, ocurre un asesinato en la realidad. La primera víctima es el ex-novio de Julia, el profesor que le había ayudado a iniciar su investigación sobre la tabla de Flandes. Conocer el desenlace de todas estas historias requiere leer la novela.

En matemáticas se usa una estrategia análoga a la que empleó el ajedrecista: partir del *final* y llegar al *principio*. Si sabemos que la derivada de una función es $3x^2 + x - 5$, ¿cuál es esa función? ¿Solo hay una?

La función es: $x^3 + \dfrac{x^2}{2} - 5x + k$ con k un número real.

Esta función no es única, para cada valor de k tenemos una diferente.

ANTES DE COMENZAR… RECUERDA

001 Comprueba si los siguientes números son raíces del polinomio $P(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 6x - 8$.

a) $x = 1$ b) $x = 2$ c) $x = -1$ d) $x = -4$

a) $P(1) = 1^4 + 3 \cdot 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 - 8 = 0 \rightarrow 1$ es raíz de $P(x)$.

b) $P(2) = 2^4 + 3 \cdot 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 - 8 = 36 \rightarrow 2$ no es raíz de $P(x)$.

c) $P(-1) = (-1)^4 + 3 \cdot (-1)^3 - 2 \cdot (-1)^2 + 6 \cdot (-1) - 8 = -18 \rightarrow -1$ no es raíz de $P(x)$.

d) $P(-4) = (-4)^4 + 3 \cdot (-4)^3 - 2 \cdot (-4)^2 + 6 \cdot (-4) - 8 = 0 \rightarrow -4$ no es raíz de $P(x)$.

002 Factoriza estos polinomios.

a) $2x^3 - 8x^2 + 2x + 12$
b) $3x^3 - 8x^2 - 20x + 16$
c) $2x^4 - 15x^3 + 31x^2 + 12x$
d) $x^4 + 5x^3 - x^2 - 17x + 12$

a)
$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 2 & -8 & 2 & 12 \\
-1 & & -2 & 10 & -12 \\
\hline
 & 2 & -10 & 12 & 0 \\
2 & & 4 & -12 & \\
\hline
 & 2 & -6 & 0 &
\end{array} \rightarrow 2x^3 - 8x^2 + 2x = 2\,(x+1)\,(x-2)\,(x-3)$$

b)
$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 3 & -8 & -20 & 16 \\
-2 & & -6 & 28 & -16 \\
\hline
 & 3 & -14 & 8 & 0 \\
4 & & 12 & -8 & \\
\hline
 & 3 & -2 & 0 &
\end{array} \rightarrow 3x^3 - 8x^2 - 20x + 16 = (x+2)\,(x-4)\,(3x-2)$$

c) $2x^4 - 15x^3 + 31x^2 + 12x = x(2x^3 - 15x^2 + 31x + 12)$
El polinomio $2x^3 - 15x^2 + 31x + 12$ no tiene raíces racionales.

d)
$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & 5 & -1 & -17 & 12 \\
1 & & 1 & 6 & 5 & -12 \\
\hline
 & 1 & 6 & 5 & -12 & 0 \\
1 & & 1 & 7 & 12 & \\
\hline
 & 1 & 7 & 12 & 0 & \\
-3 & & -3 & -12 & & \\
\hline
 & 1 & 4 & 0 & &
\end{array} \rightarrow x^4 + 5x^3 - x^2 - 17x + 12 = (x-1)^2(x+3)(x+4)$$

003 Realiza las siguientes divisiones de polinomios. Comprueba, en cada una de ellas, el resultado que obtienes.

a) $(2x^3 - 3x^2 - 5x - 5) : (x^2 - 2x - 1)$
b) $(2x^3 - 3x^2 + 4x - 3) : (x^2 - 1)$
c) $(x^4 + 1) : (x^2 + 1)$
d) $(x^5 + 2x^3 - 1) : (x^2 - 3)$

a)
$$\begin{array}{rrrr|l} 2x^3 & -3x^2 & -5x & -5 & x^2-2x-1 \\ \cline{5-5} -2x^3 & +4x^2 & +2x & & 2x+1 \\ \cline{1-4} & -x^2 & -3x & -5 & \\ & x^2 & +2x & +1 & \\ \cline{2-4} & & -x & -4 & \end{array}$$

$$\rightarrow 2x^3-3x^2-5x-5=(x^2-2x-1)(2x+1)+(-x-4)$$

b)
$$\begin{array}{rrrr|l} 2x^3 & -3x^2 & +4x & -3 & x^2-1 \\ \cline{5-5} -2x^3 & & +2x & & 2x-3 \\ \cline{1-4} & -3x^2 & +6x & -3 & \\ & +3x^2 & & +3 & \\ \cline{2-4} & & 6x & & \end{array}$$

$$\rightarrow 2x^3-3x^2+4x-3=(x^2-1)(2x-3)+6x$$

c)
$$\begin{array}{rrr|l} x^4 & & +1 & x^2+1 \\ \cline{4-4} -x^4 & -x^2 & & x^2-1 \\ \cline{1-3} & -x^2 & +1 & \\ & x^2 & +1 & \\ \cline{2-3} & & 2 & \end{array}$$

$$\rightarrow x^4+1=(x^2+1)(x^2-1)+2$$

d)
$$\begin{array}{rrrr|l} x^5 & +2x^3 & & -1 & x^2-3 \\ \cline{5-5} -x^5 & +3x^3 & & & x^3+5x \\ \cline{1-4} & 5x^3 & & -1 & \\ & -5x^3 & +15x & & \\ \cline{2-4} & & 15x & -1 & \end{array}$$

$$\rightarrow x^5+2x^3-1=(x^2-3)(x^3+5x)+(15x-1)$$

ACTIVIDADES

001 **Determina si la función $F(x)=x^4$ es una función primitiva de $f(x)=4x^3$. Escribe dos funciones que también sean primitivas de esta función.**

$F(x)=x^4 \rightarrow F'(x)=4x^3 \rightarrow F(x)$ es una función primitiva de $f(x)$.

002 **Determina una primitiva de las funciones.**

a) $f(x)=5x^4$ **b) $f(x)=2e^x$** **c) $f(x)=\dfrac{x^3}{2}$**

a) $f(x)=5x^4 \rightarrow F(x)=x^5+k$

b) $f(x)=2e^x \rightarrow F(x)=2e^x+k$

c) $f(x)=\dfrac{x^3}{2} \rightarrow F(x)=\dfrac{x^4}{8}+k$

003 Resuelve las siguientes integrales.

a) $\int (5x^4 + 3x^2)\,dx$

b) $\int (4\cos x + 2x)\,dx$

c) $\int (-\cos x + 3x)\,dx$

d) $\int (x^3 + 2)\,dx$

a) $\int (5x^4 + 3x^2)\,dx = x^5 + x^3 + k$

b) $\int (4\cos x + 2x)\,dx = 4\,\text{sen}\,x + x^2 + k$

c) $\int (-\cos x + 3x)\,dx = -\text{sen}\,x + \frac{3x^2}{2} + k$

d) $\int (x^3 + 2)\,dx = \frac{x^4}{4} + 2x + k$

004 Si $\int f(x)\,dx = F(x) + k$ y $\int g(x)\,dx = G(x) + k$, halla:

a) $\int [f(x) + g(x)]\,dx$

b) $\int [2f(x) - g(x)]\,dx$

c) $\int \left[\frac{1}{2}f(x) - 2g(x)\right] dx$

d) $\int [-f(x) + b \cdot g(x)]\,dx$

a) $\int [f(x) + g(x)]\,dx = F(x) + G(x) + k$

b) $\int [2f(x) - g(x)]\,dx = 2F(x) - G(x) + k$

c) $\int \left[\frac{1}{2}f(x) - 2g(x)\right] dx = \frac{1}{2}F(x) - 2G(x) + k$

d) $\int [-f(x) + b \cdot g(x)]\,dx = -F(x) + b \cdot G(x) + k$

005 Halla estas integrales.

a) $\int x^2\,dx$

b) $\int \frac{2}{x^3}\,dx$

c) $\int 2\sqrt[3]{x^2}\,dx$

a) $\int x^2\,dx = x^3 + k$

c) $\int 2\sqrt[3]{x^2}\,dx = \frac{6\sqrt[3]{x^5}}{5} + k$

b) $\int \frac{2}{x^3}\,dx = \frac{-4}{x^2} + k$

006 Calcula las siguientes integrales.

a) $\int -4(3-2x^2)\,dx$

b) $\int 2x\sqrt{x^2-1}\,dx$

a) $\int -4(3-2x^2)\,dx = -4\int (3-2x^2)\,dx = -4\left(3x-\dfrac{2x^3}{3}\right)+k$

b) $\int 2x\sqrt{x^2-1}\,dx = \dfrac{2\sqrt{(x^2-1)^3}}{3}+k$

007 Calcula estas integrales de funciones potenciales.

a) $\int x(1+2x^2)\,dx$

b) $\int x^2(2-2x^3)\,dx$

a) $\int x(1+2x^2)\,dx = \dfrac{1}{4}\int 4x(1+2x^2)\,dx =$
$= \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{2}(1+2x^2)^2+k = \dfrac{1}{8}(1+2x^2)^2+k$

b) $\int x^2(2-2x^3)\,dx = -\dfrac{1}{6}\int -6x^2(2-2x^3)\,dx =$
$= \dfrac{-1}{6}\cdot\dfrac{1}{2}(2-2x^3)^2+k = \dfrac{-1}{6}(2-2x^3)^2+k$

008 Halla las integrales.

a) $\int \sqrt{7+2x}\,dx$

b) $\int (x^2+1)^2\,dx$

a) $\int \sqrt{7+2x}\,dx = \dfrac{1}{2}\int 2\sqrt{7+2x}\,dx = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{2}\sqrt{(7+2x)^3}+k =$
$= \dfrac{3}{4}\sqrt{(7+2x)^3}+k$

b) $\int (x^2+1)^2\,dx = \int (x^4+2x^2+1)\,dx = \dfrac{x^5}{5}+\dfrac{2x^3}{3}+x+k$

009 Calcula estas integrales de tipo logarítmico.

a) $\int \dfrac{2x}{x^2+3}\,dx$

b) $\int \dfrac{2}{x-3}\,dx$

a) $\int \dfrac{2x}{x^2+3}\,dx = \ln\left|x^2+3\right|+k$

b) $\int \dfrac{2}{x-3}\,dx = 2\ln\left|x-3\right|+k$

010 Determina las integrales.

a) $\displaystyle\int \frac{x}{(3x^2-2)^3}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt[3]{2-x^2}}\,dx$

a) $$\int \frac{x}{(3x^2-2)^3}\,dx = \frac{1}{6}\int \frac{6x}{(3x^2-2)^3}\,dx = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{-2(3x^2-2)^2} + k = -\frac{1}{12(3x^2-2)^2} + k$$

b) $$\int \frac{x}{\sqrt[3]{2-x^2}}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{-2x}{\sqrt[3]{2-x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\sqrt[3]{(2-x^2)^2} + k = \frac{3}{4}\sqrt[3]{(2-x^2)^2} + k$$

011 Calcula las siguientes integrales.

a) $\displaystyle\int 3^{\frac{x}{2}}\,dx$ b) $\displaystyle\int e^{x+1}\,dx$ c) $\displaystyle\int\left(\frac{1}{2}\right)^{4x}dx$ d) $\displaystyle\int (e^{-3x}+e^{x-2})\,dx$

a) $$\int 3^{\frac{x}{2}}\,dx = 2\int \frac{1}{2}3^{\frac{x}{2}}\,dx = 2\cdot\frac{3^{\frac{x}{2}}}{\ln 3} + k = \frac{2\cdot 3^{\frac{x}{2}}}{\ln 3} + k$$

b) $$\int e^{x+1}\,dx = e^{x+1} + k$$

c) $$\int\left(\frac{1}{2}\right)^{4x}dx = \frac{1}{4}\int 4\left(\frac{1}{2}\right)^{4x}dx = \frac{1}{4}\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{4x}}{\ln\frac{1}{2}} + k = -\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{4x}}{4\ln 2} + k$$

d) $$\int (e^{-3x}+e^{x-2})\,dx = \int e^{-3x}\,dx + \int e^{x-2}\,dx = \frac{-e^{-3x}}{3} + e^{x-2} + k$$

012 Halla estas integrales de funciones exponenciales.

a) $\displaystyle\int 7^{x^2+1}\cdot 2x\,dx$ b) $\displaystyle\int 5e^{\frac{x}{2}+2}\,dx$ c) $\displaystyle\int \frac{3^{5x-1}}{7}\,dx$ d) $\displaystyle\int \frac{x}{e^{x^2}}\,dx$

a) $$\int 7^{x^2+1}\cdot 2x\,dx = \frac{7^{x^2+1}}{\ln 7} + k$$

b) $$\int 5e^{\frac{x}{2}+2}\,dx = 10\int \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}+2}\,dx = 10e^{\frac{x}{2}+2} + k$$

c) $$\int \frac{3^{5x-1}}{7}\,dx = \frac{1}{35}\int 5\cdot 3^{5x-1}\,dx = \frac{1}{35}\cdot\frac{3^{5x-1}}{\ln 3} + k = \frac{3^{5x-1}}{35\ln 3} + k$$

d) $$\int \frac{x}{e^{x^2}}\,dx = \int x\,e^{-x^2}dx = \frac{-1}{2}\int -2x\,e^{-x^2}dx = \frac{-1}{2}e^{-x^2} + k = -\frac{1}{2e^{x^2}} + k$$

013 Calcula estas integrales de funciones trigonométricas.

a) $\int sen\ 2x\ dx$

b) $\int cos\ (x+1)\ dx$

c) $\int \frac{sen\ \frac{x}{2}}{2}\ dx$

d) $\int sen\ (-x)\ dx$

a) $\int sen\ 2x\ dx = \frac{1}{2}\int 2\ sen\ 2x\ dx = \frac{-cos\ 2x}{2} + k$

b) $\int cos\ (x+1)\ dx = sen\ (x+1) + k$

c) $\int \frac{sen\ \frac{x}{2}}{2}\ dx = \int \frac{1}{2}\ sen\ \frac{x}{2}\ dx = -cos\ \frac{x}{2} + k$

d) $\int sen\ (-x)\ dx = -\int -sen\ (-x)\ dx = cos\ (-x) + k$

014 Halla las siguientes integrales.

a) $\int \frac{1}{cos^2\ (x+1)}\ dx$

b) $\int -3\ sen\ (2x+1)\ dx$

c) $\int (x+1)\cdot cos\ (x^2+2x)\ dx$

d) $\int \frac{x}{cos^2\ (x^2-3)}\ dx$

a) $\int \frac{1}{cos^2\ (x+1)}\ dx = tg\ (x+1) + k$

b) $\int -3\ sen\ (2x+1)\ dx = \frac{-3}{2}\int 2\ sen\ (2x+1)\ dx = \frac{3}{2}\ cos\ (2x+1) + k$

c) $\int (x+1)\cdot cos\ (x^2+2x)\ dx = \frac{1}{2}\int 2(x+1)\cdot cos\ (x^2+2x)\ dx =$

$= \frac{1}{2}\ sen\ (x^2+2x) + k$

d) $\int \frac{x}{cos^2\ (x^2-3)}\ dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{cos^2\ (x^2-3)}\ dx = \frac{1}{2}\ tg\ (x^2-3) + k$

015 Resuelve estas integrales de tipo funciones arco.

a) $\int \frac{1}{\sqrt{1-25x^2}}\ dx$

b) $\int \frac{1}{1+(x-3)^2}\ dx$

a) $\int \frac{1}{\sqrt{1-25x^2}}\ dx = \frac{1}{5}\int \frac{5}{\sqrt{1-25x^2}}\ dx = arc\,sen\ 5x + k$

b) $\int \frac{1}{1+(x-3)^2}\ dx = arc\,tg\ (x-3) + k$

016 Halla la solución de las siguientes integrales.

a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-(2x-3)^2}}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{x}{1+9x^4}\,dx$

a) $$\int \frac{1}{\sqrt{1-(2x-3)^2}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2}{\sqrt{1-(2x-3)^2}}\,dx = \frac{1}{2}\,arc\,sen\,(2x-3)+k$$

b) $$\int \frac{x}{1+9x^4}\,dx = \frac{1}{6}\int \frac{6x}{1+(3x^2)^2}\,dx = \frac{1}{6}\,arc\,tg\,(3x^2)+k$$

017 Halla estas integrales integrando por partes.

a) $\displaystyle\int x^2 \ln x\,dx$ b) $\displaystyle\int x^2 sen\,x\,dx$

a) $$\int x^2 \ln x\,dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^2}{3}\,dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9}+k$$

$u=\ln x \rightarrow du = \frac{1}{x}\,dx$

$dv = x^2\,dx \rightarrow v = \frac{x^3}{3}$

b) $$\int x^2 sen\,x\,dx = -x^2\cos x + \int 2x\cos x\,dx = -x^2\cos x + 2x\,sen\,x - \int 2\,sen\,x\,dx =$$

$u = x^2 \rightarrow du = dx\,dx$

$dv = sen\,x\,dx \rightarrow v = -\cos x$

$u = 2x \rightarrow du = 2dx$

$dv = \cos x\,dx \rightarrow v = sen\,x$

$$= -x^2\cos x + 2x\,sen\,x + 2\cos x + k$$

018 Utiliza la integración por partes para calcular:

a) $\displaystyle\int e^x(7+2x)\,dx$ b) $\displaystyle\int (4x^2-3x+1)\cos x\,dx$

a) $$\int e^x(7+2x)\,dx = (7+2x)e^x - \int 2e^x\,dx = (7+2x)e^x - 2e^x + k = e^x(5+2x)+k$$

$u = 7+2x \rightarrow du = 2\,dx$

$dv = e^x\,dx \rightarrow v = e^x$

b) $$\int (4x^2-3x+1)sen\,x\,dx = -(4x^2-3x+1)\cos x + \int (8x-3)\cos x\,dx =$$

$u = 4x^2-3x+1 \rightarrow du = (8x-3x)\,dx$

$dv = sen\,x\,dx \rightarrow v = -\cos x$

$$= -(4x^2-3x+1)\cos x + (8x-3)sen\,x - \int 8\,sen\,x\,dx =$$

$u = 8x-3 \rightarrow du = 8\,dx$

$dv = \cos x\,dx \rightarrow v = sen\,x$

$$= -(4x^2-3x+1)\cos x + (8x-3)sen\,x + 8\cos x + k$$

019 Resuelve estas integrales racionales.

a) $\displaystyle\int \frac{2}{x^2-1}\,dx$ b) $\displaystyle\int -\frac{3}{x^2+x-2}\,dx$

a) $$\int \frac{2}{x^2-1}\,dx = \int\left(\frac{-1}{x+1}+\frac{1}{x-1}\right)dx =$$
$$= \int \frac{-1}{x+1}\,dx + \int \frac{1}{x-1}\,dx = -\ln|x+1| + \ln|x-1| + k$$

b) $$\int -\frac{3}{x^2+x-2}\,dx = \int\left(\frac{1}{x+2}+\frac{-1}{x-1}\right)dx =$$
$$= \int \frac{1}{x+2}\,dx + \int \frac{-1}{x-1}\,dx = \ln|x+2| - \ln|x-1| + k$$

020 Calcula las integrales racionales.

a) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^4-5x^2+4}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{7x-2}{x^3-2x^2-x+2}\,dx$

a) $$\int \frac{2x+1}{x^4-5x^2+4}\,dx = \int\left(\frac{\frac{5}{12}}{x-2}+\frac{\frac{-1}{2}}{x-1}+\frac{\frac{-1}{6}}{x+1}+\frac{\frac{1}{4}}{x+2}\right)dx =$$
$$= \frac{5}{12}\int \frac{1}{x-2}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx - \frac{1}{6}\int \frac{1}{x+1}\,dx + \frac{1}{4}\int \frac{1}{x+2}\,dx =$$
$$= \frac{5}{12}\ln|x-2| - \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln|x+1| + \frac{1}{4}\ln|x+2| + k$$

b) $$\int \frac{7x-2}{x^3-2x^2-x+2}\,dx = \int\left(\frac{4}{x-2}+\frac{\frac{-5}{2}}{x-1}+\frac{\frac{-3}{2}}{x+1}\right)dx =$$
$$= 4\int \frac{1}{x-2}\,dx - \frac{5}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx - \frac{3}{2}\int \frac{1}{x+1}\,dx =$$
$$= 4\ln|x-2| - \frac{5}{2}\ln|x-1| - \frac{3}{2}\ln|x+1| + k$$

021 Resuelve estas integrales racionales.

a) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x-1)^3}\,dx$ b) $\displaystyle\int -\frac{3x-2}{(2-x)^2}\,dx$

a) $$\int \frac{x^2}{(x-1)^3}\,dx = \int\left(\frac{1}{(x-1)^3}+\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{1}{x-1}\right)dx =$$
$$= \int \frac{1}{(x-1)^3}\,dx + 2\int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx + \int \frac{1}{x-1}\,dx =$$
$$= \frac{-1}{2(x-1)^2} - \frac{2}{x-1} + \ln|x-1| + k$$

b) $\displaystyle\int -\frac{3x-2}{(2-x)^2}\,dx = \int\left(\frac{-4}{(2-x)^2}+\frac{3}{2-x}\right)dx =$

$\displaystyle = 4\int\frac{-1}{(2-x)^2}\,dx - 3\int\frac{-1}{2-x}\,dx = \frac{-4}{2-x} - 3\ln|2-x| + k$

022 Calcula las integrales racionales.

a) $\displaystyle\int\frac{-2x^2+1}{x^3+6x^2+12x+8}\,dx$

b) $\displaystyle\int\frac{x-2}{x^4}\,dx$

a) $\displaystyle\int\frac{-2x^2+1}{x^3+6x^2+12x+8}\,dx = \int\left(\frac{-7}{(x+2)^3}+\frac{8}{(x+2)^2}+\frac{-2}{x+2}\right)dx =$

$\displaystyle = -7\int\frac{1}{(x+2)^3}\,dx + 8\int\frac{1}{(x+2)^2}\,dx - 2\int\frac{1}{x+2}\,dx =$

$\displaystyle = \frac{7}{2(x+2)^2} - \frac{8}{x+2} - 2\ln|x+2| + k$

b) $\displaystyle\int\frac{x-2}{x^4}\,dx = \int\left(\frac{1}{x^3}+\frac{-2}{x^4}\right)dx = \int\frac{1}{x^3}\,dx - 2\int\frac{1}{x^4}\,dx = \frac{-1}{2x^2} + \frac{2}{3x^3} + k$

023 Resuelve esta integral racional:

$$\int\frac{4x^2-2x}{(x+2)(x-3)^2}\,dx$$

$\displaystyle\int\frac{4x^2-2x}{(x+2)(x-3)^2}\,dx = \int\left(\frac{6}{(x-3)^2}+\frac{\frac{16}{5}}{x-3}+\frac{\frac{4}{5}}{x+2}\right)dx =$

$\displaystyle = 6\int\frac{1}{(x-3)^2}\,dx + \frac{16}{5}\int\frac{1}{x-3}\,dx + \frac{4}{5}\int\frac{1}{x+2}\,dx =$

$\displaystyle = -\frac{6}{x-3} + \frac{16}{5}\ln|x-3| + \frac{4}{5}\ln|x+2| + k$

024 Calcula la integral racional:

$$\int\frac{-x^2+7x}{x^3-x^2-x+1}\,dx$$

$\displaystyle\int\frac{-x^2+7x}{x^3-x^2-x+1}\,dx = \int\left(\frac{3}{(x-1)^2}+\frac{1}{x-1}+\frac{-2}{x+1}\right)dx =$

$\displaystyle = 3\int\frac{1}{(x-1)^2}\,dx + \int\frac{1}{x-1}\,dx - 2\int\frac{1}{x+1}\,dx =$

$\displaystyle = -\frac{3}{x-1} + \ln|x-1| - 2\ln|x+1| + k$

025 Resuelve estas integrales racionales.

a) $\displaystyle\int \frac{2}{x^2+1}\,dx$ b) $\displaystyle\int -\frac{3x-2}{2+x^2}\,dx$

a) $$\int \frac{2}{x^2+1}\,dx = 2arc\,tg\,x + k$$

b) $$\int -\frac{3x-2}{2+x^2}\,dx = \int -\frac{3x}{2+x^2}\,dx + \int \frac{2}{2+x^2}\,dx =$$
$$= -\frac{3}{2}\ln\left|2+x^2\right| + \frac{2}{\sqrt{2}}arc\,tg\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + k$$

026 Calcula las integrales racionales.

a) $\displaystyle\int \frac{-2x^2+1}{x^3-x^2+3x-3}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{x-2}{x^2(x^2+1)}\,dx$

a) $$\int \frac{-2x^2+1}{x^3-x^2+3x-3}\,dx = \int\left(\frac{\frac{-1}{4}}{x-1} + \frac{\frac{-7}{4}x - \frac{7}{4}}{x^2+3}\right)dx =$$
$$= \int \frac{-\frac{1}{4}}{x-1}\,dx + \int \frac{-\frac{7}{4}x - \frac{7}{4}}{x^2+3}\,dx =$$
$$= \int \frac{-\frac{1}{4}}{x-1}\,dx + \int \frac{-\frac{7}{4}x}{x^2+3}\,dx + \int \frac{-\frac{7}{4}x}{x^2+3}\,dx =$$
$$= -\frac{1}{4}\ln\left|x-1\right| - \frac{7}{8}\ln\left|3+x^2\right| - \frac{7}{4\sqrt{3}}\,arc\,tg\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + k$$

b) $$\int \frac{x-2}{x^2(x^2+1)}\,dx = \int\left(\frac{-2}{x^2} + \frac{1}{x} + \frac{-x+2}{x^2+1}\right)dx =$$
$$= \int \frac{-2}{x^2}\,dx + \int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{-x+2}{1+x^2}\,dx =$$
$$= \int \frac{-2}{x^2}\,dx + \int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{-x}{1+x^2}\,dx + \int \frac{2}{1+x^2}\,dx =$$
$$= \frac{2}{x} + \ln\left|x\right| - \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right| + 2\,arc\,tg\,x + k$$

027 Resuelve estas integrales racionales.

a) $\displaystyle\int \frac{2x^4}{(x-1)^3}\,dx$ b) $\displaystyle\int -\frac{3x^3-2}{(2-x)^2}\,dx$

a) $$\int \frac{2x^4}{(x-1)^3}\,dx = \int\left(2x+6+\frac{12}{x-1}+\frac{8}{(x-1)^2}+\frac{2}{(x-1)^3}\right)dx =$$
$$= x^2 + 6x + 12\ln\left|x-1\right| - \frac{8}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + k$$

b) $\displaystyle\int -\frac{3x^3-2}{(2-x)^2}\,dx = \int\left(-3x-12+\frac{-22}{2-x}+\frac{-36}{(2-x)^2}\right)dx =$

$$= \frac{-3x^2}{2} - 12x + 22\ln|2-x| - \frac{36}{2-x} + k$$

028 Calcula las integrales racionales.

a) $\displaystyle\int \frac{-2x^5+1}{x^4-2x^2+1}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{x^6-1}{x^2(x^2+1)(x-1)}\,dx$

a) $\displaystyle\int \frac{-2x^5+1}{x^4-2x^2+1}\,dx = \int\left(-2x+\frac{\frac{-1}{4}}{(x-1)^2}+\frac{\frac{-9}{4}}{x-1}+\frac{\frac{3}{4}}{(x+1)^2}+\frac{\frac{-7}{4}}{x+1}\right)dx =$

$$= \int -2x\,dx + \int \frac{\frac{-1}{4}}{(x-1)^2}\,dx + \int \frac{\frac{-9}{4}}{x-1}\,dx + \int \frac{\frac{3}{4}}{(x+1)^2}\,dx + \int \frac{\frac{-7}{4}}{x+1}\,dx$$

$$= -x^2 + \frac{1}{4(x-1)} - \frac{9}{4}\ln|x-1| - \frac{3}{4(x+1)} - \frac{7}{4}\ln|x+1| + k$$

b) $\displaystyle\int \frac{x^6-1}{x^2(x^2+1)\,(x-1)}\,dx = \int\left(x+1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+\frac{-x}{x^2+1}+\frac{-1}{x^2+1}\right)dx =$

$$= \frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{x} + \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x^2+1| - \mathit{arctg}\ x + k$$

029 Calcula estas integrales mediante un cambio de variable.

a) $\displaystyle\int x^2(7+2x^3)\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{\log^5 x}{x}\,dx$

a) $\displaystyle\int x^2(7+2x^3)\,dx \underset{\substack{t=7+2x^3\\ dt=6x^2\,dx}}{=} \frac{1}{6}\int t\,dt = \frac{t^2}{12}+k = \frac{(7+2x^3)^2}{12}+k$

b) $\displaystyle\int \frac{\log^5 x}{x}\,dx \underset{\substack{t=\log x\\ dt=\frac{1}{\ln 10\cdot x}dx}}{=} \ln 10\int t^5\,dt = \ln 10\cdot\frac{t^6}{6}+k = \ln 10\cdot\frac{\log^6 x}{6}+k$

030 Halla las integrales con un cambio de variable.

a) $\displaystyle\int e^{x^2}(2x^3 + 2x)\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{4x}{\sqrt{2-3x^2}}\,dx$

a) $$\int e^{x^2}(2x^3+2x)\,dx = \int (e^t t + e^t)\,dt = \int e^t t\,dt + \int e^t\,dt = \int e^t t\,dt + e^t =$$

$t = x^2$

$dt = 2x\,dx$

$$= te^t - \int e^t dt + e^t = te^t + k = x^2 e^{x^2} + k$$

$u = t \rightarrow du = dt$

$dv = e^t\,dt \rightarrow v = e^t$

b) $$\int \frac{4x}{\sqrt{2-3x^2}}\,dx = \frac{-2}{3}\int \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{-4\sqrt{t}}{3} + k = \frac{-4\sqrt{2-3x^2}}{3} + k$$

$t = 2 - 3x^2$

$dt = -6x\,dx$

031 Calcula estas integrales.

a) $\displaystyle\int sen^5\,x\,cos^2\,x\,dx$

b) $\displaystyle\int \sqrt{4-x^2}\,dx$

a) $$\int sen^5 x\,cos^2 x\,dx = -\int (1-t^2)^2 t^2\,dt = -\int (t^6 - 2t^4 + t^2)\,dt =$$

$t = cos\,x$

$dt = -sen\,x\,dx$

$$= -\frac{t^7}{7} + \frac{2t^5}{5} - \frac{t^3}{3} + k = -\frac{cos^7 x}{7} + \frac{2cos^5 x}{5} - \frac{cos^3 x}{3} + k$$

b) $$\int \sqrt{4-x^2}\,dx = 2\int \sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}\,dx = 2\int \sqrt{1-sen^2\,t}\cdot 2\,cos\,t\,dt = 4\int cos^2 t\,dt =$$

$\frac{x}{2} = sen\,t$

$dx = 2\,cos\,t\,dt$

$$= 4\int\left(\frac{1+cos\,2t}{2}\right)dt = 2t + 2\,sen\,2t + k =$$

$$= 2arc\,sen\,\frac{x}{2} + 2\,sen\,2\left(arc\,sen\,\frac{x}{2}\right) + k =$$

$$= 2arc\,sen\,\frac{x}{2} + 2\cdot\frac{x}{2}\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2} + k =$$

$$= 2arc\,sen\,\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + k$$

032 Halla la solución de las integrales.

a) $\int sen^2\, x\, dx$ b) $\int \frac{\sqrt{2-x^2}}{4}\, dx$

a) $\int sen^2 x\, dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\, dx = \frac{x}{2} + \frac{sen\, 2x}{4} + k$

b) $\int \frac{\sqrt{2-x^2}}{4}\, dx = \frac{\sqrt{2}}{4}\int \sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}\, dx = \frac{\sqrt{2}}{4}\int \sqrt{1-sen^2\, t}\,\sqrt{2}\cos t\, dt =$

$\frac{x}{\sqrt{2}} = sen\, t$

$dx = \sqrt{2}\cos t\, dt$

$= \frac{1}{2}\int \cos^2 t\, dt = \frac{1}{2}\int \frac{1+\cos 2t}{2}\, dt =$

$= \frac{1}{4}\left(t + \frac{sen\, 2t}{2}\right) + k = \frac{1}{4}\, arc\, sen\, \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{x}{8}\sqrt{2-x^2} + k$

033 Comprueba, en cada uno de los casos, que la función $F(x)$ es una primitiva de la función $f(x)$.

a) $F(x) = 3x^5 - 2x + 1$ $f(x) = 15x^4 - 2$

b) $F(x) = (x^5 - 2)^3$ $f(x) = 15x^4(x^5 - 2)^2$

c) $F(x) = \frac{2-x}{x^3} + 7$ $f(x) = \frac{2x-6}{x^4}$

d) $F(x) = \frac{x-1}{x^2} - 3$ $f(x) = \frac{-x+2}{x^3}$

e) $F(x) = \ln\sqrt{x^2+2x}$ $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x}$

f) $F(x) = 5e^{-x^2} + 11$ $f(x) = -10xe^{-x^2}$

g) $F(x) = arc\, tg\,\sqrt{x}$ $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}\,(1+x)}$

h) $F(x) = \cos^2 x - 1.492$ $f(x) = -sen\, 2x$

a) $F(x) = 3x^5 - 2x + 1 \rightarrow F'(x) = 15x^4 - 2 \rightarrow F(x)$ es una función primitiva de $f(x)$.

b) $F(x) = (x^5 - 2)^3 \rightarrow F'(x) = 15x^4(x^5 - 2) \rightarrow F(x)$ es una función primitiva de $f(x)$.

c) $F(x) = \frac{2-x}{x^3} + 7 \rightarrow F'(x) = \frac{2x-6}{x^4} \rightarrow F(x)$ es una función primitiva de $f(x)$.

d) $F(x) = \frac{x-1}{x^2} - 3 \rightarrow F'(x) = \frac{-x+2}{x^3} \rightarrow F(x)$ es una función primitiva de $f(x)$.

e) $F(x) = \ln\sqrt{x^2+2x} \rightarrow F'(x) = \frac{x+1}{x^2+2x} \rightarrow F(x)$ es una función primitiva de $f(x)$.

f) $F(x) = 5e^{-x^2} + 11 \rightarrow F'(x) = -10xe^{-x^2} \rightarrow F(x)$ es una función primitiva de $f(x)$.

g) $F(x) = arctg\,\sqrt{x} \rightarrow F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}\,(1+x)} \rightarrow F(x)$ es una función primitiva de $f(x)$.

h) $F(x) = \cos^2 x - 1.492 \rightarrow F'(x) = -2\, sen\, x \cos x = -sen\, 2x \rightarrow F(x)$ es una función primitiva de $f(x)$.

034 Calcula una función primitiva $F(x)$ de cada una de las siguientes funciones que cumpla la condición que se indica.

a) $f(x) = 3x^2$ $\quad F(0) = 1$

b) $f(x) = \dfrac{4}{5x}$ $\quad F(1) = 4$

c) $f(x) = sen\ 3x$ $\quad F(\pi) = -\dfrac{1}{3}$

d) $f(x) = e^{2x}$ $\quad F(0) = \dfrac{2}{3}$

a) $f(x) = 3x^2 \rightarrow F(x) = x^3 + k$

$F(0) = 1 \rightarrow k = 1 \rightarrow F(x) = x^3 + 1$

b) $f(x) = \dfrac{4}{5x} \rightarrow F(x) = \dfrac{4}{5}\ln|x| + k$

$F(1) = 4 \rightarrow k = 4 \rightarrow F(x) = \dfrac{4}{5}\ln x + 4$

c) $f(x) = sen\ 3x \rightarrow F(x) = \dfrac{-1}{3} cos\ 3x + k$

$F(\pi) = -\dfrac{1}{3} \rightarrow \dfrac{1}{3} + k = -\dfrac{1}{3} \rightarrow k = -\dfrac{2}{3} \rightarrow F(x) = -\dfrac{1}{3} cos\ 3x - \dfrac{2}{3}$

d) $f(x) = e^{2x} \rightarrow F(x) = \dfrac{e^{2x}}{2} + k$

$F(0) = \dfrac{2}{3} \rightarrow \dfrac{1}{2} + k = \dfrac{2}{3} \rightarrow k = \dfrac{1}{6} \rightarrow F(x) = \dfrac{e^{2x}}{2} + \dfrac{1}{6}$

035 Halla mentalmente una primitiva de cada una de las funciones polinómicas, y comprueba que tu respuesta es correcta.

a) $f(x) = 1.001$

b) $f(x) = 2x$

c) $f(x) = x$

d) $f(x) = 3x^2$

e) $f(x) = x^2$

f) $f(x) = 4x^3$

g) $f(x) = (n + 1)x^n$

h) $f(x) = x^n$

a) $F(x) = 1.001x + k \rightarrow F'(x) = 1.001$

b) $F(x) = x^2 + k \rightarrow F'(x) = 2x$

c) $F(x) = \dfrac{x^2}{2} + k \rightarrow F'(x) = x$

d) $F(x) = x^3 + k \rightarrow F'(x) = 3x^2$

e) $F(x) = \dfrac{x^3}{3} + k \rightarrow F'(x) = x^2$

f) $F(x) = x^4 + k \rightarrow F'(x) = 4x^3$

g) $F(x) = x^{n+1} + k \rightarrow F'(x) = (n + 1)x^n$

h) $F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + k \rightarrow F'(x) = x^n$

036 Calcula mentalmente una primitiva de cada una de estas funciones con radicales, y comprueba que tu respuesta es correcta.

a) $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-4}}$

e) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3x+10}}$

f) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

a) $F(x) = \sqrt{x} + k \rightarrow F'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

b) $F(x) = 2\sqrt{x} + k \rightarrow F'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

c) $F(x) = 2\sqrt{x+1} + k \rightarrow F'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$

d) $F(x) = 2\sqrt{x-4} + k \rightarrow F'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-4}}$

e) $F(x) = \dfrac{2}{3}\sqrt{3x+10} + k \rightarrow F'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3x+10}}$

f) $F(x) = \operatorname{arc\,sen} x + k \rightarrow F'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

037 Halla mentalmente una primitiva de cada una de las siguientes funciones racionales, y comprueba que tu respuesta es correcta.

a) $f(x) = \dfrac{19}{x}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{19x}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{19+x}$

d) $f(x) = \dfrac{4}{2x+3}$

e) $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

f) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

a) $F(x) = 19 \ln|x| + k \rightarrow F'(x) = \dfrac{19}{x}$

b) $F(x) = \dfrac{\ln|x|}{19} + k \rightarrow F'(x) = \dfrac{1}{19x}$

c) $F(x) = \ln|19+x| + k \rightarrow F'(x) = \dfrac{1}{19+x}$

d) $F(x) = 2\ln|2x+3| + k \rightarrow F'(x) = \dfrac{4}{2x+3}$

e) $F(x) = \dfrac{1}{x} + k \rightarrow F'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

f) $F(x) = \operatorname{arc\,tg} x + k \rightarrow F'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

038 Calcula mentalmente una primitiva de cada una de estas funciones exponenciales, y comprueba tu respuesta.

a) $f(x) = e^x$
b) $f(x) = e^{2x}$
c) $f(x) = e^{5x+55}$
d) $f(x) = 2^x$
e) $f(x) = 2^{x-7}$
f) $f(x) = 2^{9x+5}$

a) $F(x) = e^x + k \rightarrow F'(x) = e^x$

b) $F(x) = \dfrac{e^{2x}}{2} + k \rightarrow F'(x) = e^{2x}$

c) $F(x) = \dfrac{e^{5x+55}}{5} + k \rightarrow F'(x) = e^{5x+55}$

d) $F(x) = \dfrac{2^x}{\ln 2} + k \rightarrow F'(x) = 2^x$

e) $F(x) = \dfrac{2^{x-7}}{\ln 2} + k \rightarrow F'(x) = 2^{x-7}$

f) $F(x) = \dfrac{2^{9x+5}}{9 \ln 2} + k \rightarrow F'(x) = 2^{9x+5}$

039 Obtén mentalmente una primitiva de cada una de estas funciones trigonométricas, y comprueba tu respuesta.

a) $f(x) = \cos x$
b) $f(x) = \cos 3x$
c) $f(x) = \cos (x + 3)$
d) $f(x) = 3 \operatorname{sen} x$
e) $f(x) = \operatorname{sen} (x - \pi)$
f) $f(x) = 3 \operatorname{sen} (x - \pi)$

a) $F(x) = \operatorname{sen} x + k \rightarrow F'(x) = \cos x$

b) $F(x) = \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{3} + k \rightarrow F'(x) = \cos 3x$

c) $F(x) = \operatorname{sen} (x + 3) + k \rightarrow F'(x) = \cos (x + 3)$

d) $F(x) = -3 \cos x + k \rightarrow F'(x) = 3 \operatorname{sen} x$

e) $F(x) = -\cos (x - \pi) + k \rightarrow F'(x) = \operatorname{sen} (x - \pi)$

f) $F(x) = -3 \cos (x - \pi) + k \rightarrow F'(x) = 3 \operatorname{sen} (x - \pi)$

040 Contesta a estas preguntas.

a) ¿Por qué una primitiva de una función polinómica $f(x)$ es otra función polinómica $F(x)$?

b) Si $f(x)$ es de grado n, ¿cuál es el grado de $F(x)$?

a) Porque la derivada de un una función polinómica siempre es otra función polinómica.

b) El grado de $F(x)$ es $n + 1$, considerando que $f(x)$ es un polinomio o que n sea distinto de -1.

041 **¿Puede ser una función logarítmica una primitiva de una función racional? ¿Y una función trigonométrica?**

La función logarítmica puede ser primitiva de una función racional, por ejemplo, si $f(x) = \frac{1}{x} \rightarrow F(x) = \ln|x|$.

La función trigonométrica no puede ser primitiva de una función racional porque la derivada de una función trigonométrica siempre es otra función trigonométrica.

042 **Calcula estas integrales de funciones polinómicas.**

a) $\int (4x - 25)\, dx$

b) $\int (5x^2 + 2x - 7)\, dx$

c) $\int \left(\frac{4}{3}x^3 - 5x^2 + \frac{1}{3}\right) dx$

d) $\int \left(-\frac{1}{4}x^6 - \frac{1}{4}x^4 + 1\right) dx$

e) $\int \left(-\frac{3}{5}x^7 - x^4 + 2x\right) dx$

f) $\int (x-5)^2\, dx$

g) $\int (x+1)^3\, dx$

h) $\int (x+1)(x-1)^3\, dx$

a) $\int (4x - 25)\, dx = 2x^2 - 25x + k$

b) $\int (5x^2 + 2x - 7)\, dx = \frac{5x^3}{3} + x^2 - 7x + k$

c) $\int \left(\frac{4}{3}x^3 - 5x^2 + \frac{1}{3}\right) dx = \frac{x^4}{3} - \frac{5x^3}{3} + \frac{x}{3} + k$

d) $\int \left(-\frac{1}{4}x^6 - \frac{1}{4}x^4 + 1\right) dx = \frac{-x^7}{28} - \frac{x^5}{20} + x + k$

e) $\int \left(-\frac{3}{5}x^7 - x^4 + 2x\right) dx = \frac{-3x^8}{40} - \frac{x^5}{5} + x^2 + k$

f) $\int (x-5)^2 dx = \frac{(x-5)^3}{3} + k$

g) $\int (x+1)^3 dx = \frac{(x+1)^4}{4} + k$

h) $\int (x+1)(x-1)^3 dx = \int (x^4 - 2x^3 + 2x - 1)\, dx = \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + x^2 - x + k$

043 **Halla las integrales de funciones con radicales.**

a) $\int 3\sqrt{5x}\, dx$

b) $\int \left(2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x}\right) dx$

c) $\int \left(\frac{4}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} - 9\sqrt[5]{x}\right) dx$

d) $\int \left(\frac{8}{x} + \sqrt[3]{2x}\right) dx$

e) $\int \left(\sqrt[3]{x} - 8\sqrt[4]{x}\right) dx$

f) $\int \left(\frac{2}{\sqrt[3]{x}} - \frac{4}{\sqrt{x}}\right) dx$

a) $\int 3\sqrt{5x}\,dx = 2\sqrt{5x^3} + k$

b) $\int (2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x})\,dx = \frac{4}{3}\sqrt{x^3} - \frac{9}{4}\sqrt[3]{x^4} + k$

c) $\int \left(\frac{4}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} - 9\sqrt[5]{x}\right) dx = 8\sqrt{x} + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{15}{2}\sqrt[5]{x^6} + k$

d) $\int \left(\frac{8}{x} + \sqrt[3]{2x}\right) dx = 8 \ln|x| + \frac{3}{4}\sqrt[3]{2x^4} + k$

e) $\int (\sqrt[3]{x} - 8\sqrt[4]{x})\,dx = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} - \frac{32}{5}\sqrt[4]{x^5} + k$

f) $\int \left(\frac{2}{\sqrt[3]{x}} - \frac{4}{\sqrt{x}}\right) dx = 3\sqrt[3]{x^2} - 8\sqrt{x} + k$

044 **Determina estas integrales de funciones racionales.**

a) $\int \frac{4}{x-2}\,dx$

b) $\int \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}\right) dx$

c) $\int \left(\frac{2}{x+3} - \frac{1}{x-4}\right) dx$

d) $\int \frac{1}{(x+4)^2}\,dx$

e) $\int \left(\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{7}{x+3}\right) dx$

f) $\int \left(\frac{2}{(x+3)^3} - \frac{5}{(x-3)^2}\right) dx$

g) $\int \left(\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{x^2}\right) dx$

h) $\int \left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x}\right) dx$

a) $\int \frac{4}{x-2}\,dx = 4\ln|x-2| + k$

b) $\int \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}\right) dx = \ln|x| - \frac{2}{x} - \frac{6}{x^2} + k$

c) $\int \left(\frac{2}{x+3} - \frac{1}{x-4}\right) dx = 2\ln|x+3| - \ln|x-4| + k$

d) $\int \frac{1}{(x+4)^2}\,dx = -\frac{1}{x+4} + k$

e) $\int \left(\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{7}{x+3}\right) dx = \frac{-1}{x-1} + 7\ln|x+3| + k$

f) $\int \left(\frac{2}{(x+3)^3} - \frac{5}{(x-3)^2}\right) dx = \frac{-1}{(x+3)^2} + \frac{5}{(x-3)} + k$

g) $\int \left(\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{x^2}\right) dx = arc\,tg\ x - \frac{1}{x} + k$

h) $\int \left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x}\right) dx = arc\,tg\ x + \frac{2}{x} + 3\ln|x| + k$

045 Obtén la integral de cada una de las siguientes funciones, indicando las propiedades que utilizas.

a) $f(x)=\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{3}{x+4}$

b) $f(x)=\dfrac{7}{x+3}-\dfrac{1}{x-5}$

c) $f(x)=\dfrac{1.492}{x-7}-\dfrac{5}{x}$

d) $f(x)=\dfrac{6}{x^2+1}-\dfrac{1}{x^2}$

a) $$\int\left(\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x+4}\right)dx \underset{\int(f+g)=\int f+\int g}{=} \int\frac{2}{x-1}\,dx+\int\frac{3}{x+4}\,dx \underset{\int a\cdot f=a\int f}{=}$$

$$=2\int\frac{1}{x-1}\,dx+3\int\frac{1}{x+4}\,dx \underset{\int\frac{f'}{f}=\ln|f|+k}{=} 2\ln|x-1|+3\ln|x+4|+k$$

b) $$\int\left(\frac{7}{x+3}-\frac{1}{x-5}\right)dx \underset{\int(f+g)=\int f+\int g}{=} \int\frac{7}{x+3}\,dx-\int\frac{1}{x-5}\,dx \underset{\int a\cdot f=a\int f}{=}$$

$$=7\int\frac{1}{x+3}\,dx-\int\frac{1}{x-5}\,dx \underset{\int\frac{f'}{f}=\ln|f|+k}{=} 7\ln|x+3|-\ln|x-5|+k$$

c) $$\int\left(\frac{1.492}{x-7}-\frac{5}{x}\right)dx \underset{\int(f+g)=\int f+\int g}{=} \int\frac{1.492}{x-7}\,dx-\int\frac{5}{x}\,dx \underset{\int a\cdot f=a\int f}{=}$$

$$=1.492\int\frac{1}{x-7}\,dx-5\int\frac{1}{x}\,dx \underset{\int\frac{f'}{f}=\ln|f|+k}{=} 1.492\ln|x-7|-5\ln|x|+k$$

d) $$\int\left(\frac{6}{x^2+1}-\frac{1}{x^2}\right)dx \underset{\int(f+g)=\int f+\int g}{=} \int\frac{6}{x^2+1}\,dx-\int\frac{1}{x^2}\,dx \underset{\int a\cdot f=a\int f}{=}$$

$$=6\int\frac{1}{x^2+1}\,dx-\int\frac{1}{x^2}\,dx \underset{\substack{\int\frac{f'}{1+f\cdot 2}=arc\ tg\ x\ f \\ \int f'f^n=\frac{f^{n+1}}{n+1}}}{=} 6\,arc\ tg\ x-\frac{1}{x}+k$$

046 Halla estas integrales de funciones exponenciales.

a) $\int e^{x-3}\,dx$

b) $\int e^{2x+14}\,dx$

c) $\int (3^x + e^x)\,dx$

d) $\int 5^{\frac{2}{3}x}\,dx$

e) $\int 7^{3x-\frac{1}{2}}\,dx$

f) $\int (3\cdot 2^{2x} + 7)\,dx$

a) $\int e^{x-3}\,dx = e^{x-3} + k$

b) $\int e^{2x+14}dx = \frac{e^{2x+14}}{2} + k$

c) $\int (3^x + e^x)\,dx = \frac{3^x}{\ln 3} + e^x + k$

d) $\int 5^{\frac{2}{3}x}\,dx = \frac{3\cdot 5^{\frac{2}{3}x}}{2\ln 5} + k$

e) $\int 7^{3x-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{7^{3x-\frac{1}{2}}}{3\ln 7} + k$

f) $\int (3\cdot 2^{2x} + 7)\,dx = \frac{3\cdot 2^{2x}}{2\ln 2} + 7x + k$

047 Calcula las integrales de estas funciones.

a) $\int \cos 2x\,dx$

b) $\int 4\,\text{sen}\,(x+\pi)\,dx$

c) $\int 3\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{3}\right)dx$

d) $\int 5\,\text{sen}\,(2x-\pi)\,dx$

e) $\int 3\sec^2 \frac{1}{5}x\,dx$

f) $\int \frac{7}{\text{sen}^2\,3x}\,dx$

g) $\int \frac{5}{\cos^2 \frac{x}{3}}\,dx$

h) $\int \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

i) $\int \frac{3}{x^2+1}\,dx$

j) $\int \frac{1}{(3x)^2+1}\,dx$

a) $\int \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\text{sen}\,2x + k$

b) $\int 4\,\text{sen}\,(x+\pi)\,dx = -4\cos(x+\pi) + k$

c) $\int 3\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{3}\right)dx = -9\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{3}\right) + k$

d) $\displaystyle\int 5\ sen\,(2x-\pi)\,dx = \frac{-5}{2} cos\,(2x-\pi) + k$

e) $\displaystyle\int 3\ sec^2 \frac{1}{5}x\ dx = 15\int \frac{\frac{1}{5}}{cos^2 \frac{1}{5}x}\,dx = 15\ tg\,\frac{1}{5}x + k$

f) $\displaystyle\int \frac{7}{sen^2 3x}\,dx = \frac{7}{3}\int \frac{3}{sen^2 3x}\,dx = -\frac{7}{3}\,cotg\ 3x + k$

g) $\displaystyle\int \frac{5}{cos^2 \frac{x}{3}}\,dx = 15\int \frac{\frac{1}{3}}{cos^2 \frac{x}{3}}\,dx = 15\ tg\,\frac{x}{3} + k$

h) $\displaystyle\int \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 3\ arc\,sen\ x + k$

i) $\displaystyle\int \frac{3}{x^2+1}\,dx = 3\ arc\,tg\ x + k$

j) $\displaystyle\int \frac{1}{(3x)^2+1}\,dx = \frac{1}{3}\ arc\,tg\ 3x + k$

048 **Resuelve estas integrales.**

a) $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{8x-3}{4x^2-3x+1}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{6x^2+1}{2x^3+x-9}\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{sen\ x}{cos\ x}\,dx$

e) $\displaystyle\int cotg\ x\ dx$

f) $\displaystyle\int 3x^2\ sen\ x^3\ dx$

g) $\displaystyle\int (2x+1)\,sen\,(x^2+x+5)\,dx$

h) $\displaystyle\int 6x\ cos\,(3x^2-5)\,dx$

i) $\displaystyle\int 6xe^{3x^2}\,dx$

j) $\displaystyle\int (3x^2+1)\,e^{x^3+x}\,dx$

k) $\displaystyle\int (12x^2-6x)e^{4x^3-3x^2+7}\,dx$

l) $\displaystyle\int xe^{7x^2}\,dx$

m) $\displaystyle\int \frac{-2}{4+x^2}\,dx$

n) $\displaystyle\int \frac{-2}{\sqrt{3-x^2}}\,dx$

ñ) $\displaystyle\int -xe^{x^2}\,dx$

o) $\displaystyle\int \left(\frac{x+\ln x}{x}\right)dx$

a) $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \ln\left|x^2+1\right| + k$

b) $\displaystyle\int \frac{8x-3}{4x^2-3x+1}\,dx = \ln\left|4x^2-3x+1\right| + k$

c) $\displaystyle\int \frac{6x^2+1}{2x^2+x-9}\,dx = \ln\left|2x^2+x-9\right| + k$

d) $\displaystyle\int \frac{sen\,x}{cos\,x}\,dx = -\ln\left|cos\,x\right| + k$

e) $\displaystyle\int cotg\,dx = \int \frac{cos\,x}{sen\,x}\,dx = \ln\left|sen\,x\right| + k$

f) $\displaystyle\int 3x^2\,sen\,x^3\,dx = -cos\,x^3 + k$

g) $\displaystyle\int (2x+1)\,sen\,(x^2+x+5)\,dx = -cos\,(x^2+x+5) + k$

h) $\displaystyle\int 6x\,cos\,(3x^2-5)\,dx = sen\,(3x^2-5) + k$

i) $\displaystyle\int 6x\,e^{3x^2}dx = e^{3x^2} + k$

j) $\displaystyle\int (3x^2+1)\,e^{x^3+x}dx = e^{x^3+x} + k$

k) $\displaystyle\int (12x^2-6x)e^{4x^3-3x^2+7}dx = e^{4x^3-3x^2+7} + k$

l) $\displaystyle\int xe^{7x^2}dx = \frac{e^{7x^2}}{14} + k$

m) $\displaystyle\int \frac{-2}{4+x^2}\,dx = \frac{-1}{2}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\,dx = -arc\,tg\,\frac{x}{2} + k$

n) $\displaystyle\int \frac{-2}{\sqrt{3-x^2}}\,dx = \frac{-2}{\sqrt{3}}\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}}\,dx = -2\,arc\,sen\,\frac{x}{\sqrt{3}} + k$

ñ) $\displaystyle\int -x\,e^{x^2}dx = \frac{-1}{2}\int 2x\,e^{x^2}dx = \frac{-e^{x^2}}{2} + k$

o) $\displaystyle\int \frac{x+\ln x}{x}\,dx = \int dx + \int \frac{\ln x}{x}\,dx = x + \int \frac{\ln x}{x}\,dx = x + \frac{\ln^2 x}{2} + k$

049 Calcula las siguientes integrales.

a) $\displaystyle\int cos\,(5x+1)\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{(x+2)^3}}\,dx$

a) $\displaystyle\int cos\,(5x-1)\,dx = \frac{sen\,(5x-1)}{5} + k$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{(x+2)^3}}\,dx = \frac{-2}{\sqrt{(x+2)}} + k$

050 Calcula la integral de cada una de las funciones, indicando las propiedades que utilizas.

a) $f(x) = x + \cos x$

b) $f(x) = 6e^x$

c) $f(x) = 5x^2 + 7x$

d) $f(x) = 2x^3 - x^2 + 4$

e) $f(x) = 10x^4 - 3\,\operatorname{sen} x$

f) $f(x) = 8 \cdot 2^x + \dfrac{10}{\sqrt{x}}$

a) $$\int (x + \cos x)\,dx \underset{\int (f+g) = \int f + \int g}{=} \int x\,dx + \int \cos x\,dx \underset{\substack{\int f'\,f^n = \frac{f^{n+1}}{n+1} \\ \int f'\cos f = \operatorname{sen} f}}{=} \frac{x^2}{2} + \operatorname{sen} x + k$$

b) $$\int 6\,e^x dx \underset{\int a \cdot f = a\int f}{=} 6\int e^x dx \underset{\int f'\,e^f = e^f}{=} 6\,e^x + k$$

c) $$\int (5x^2 + 7x)\,dx \underset{\int (f+g) = \int f + \int g}{=} \int 5x^2\,dx + \int 7x\,dx \underset{\int a \cdot f = a\int f}{=} 5\int x^2\,dx + 7\int x\,dx \underset{\int f'\,f^n = \frac{f^{n+1}}{n+1}}{=} \frac{5x^3}{3} + \frac{7x^2}{2} + k$$

d) $$\int (2x^3 - x^2 + 4)\,dx \underset{\int (f+g) = \int f + \int g}{=} \int 2x^3\,dx - \int x^2\,dx + \int 4x\,dx \underset{\int a \cdot f = a\int f}{=}$$

$$= 2\int x^3\,dx - \int x^2\,dx + 4\int x\,dx \underset{\int f'\,f^n = \frac{f^{n+1}}{n+1}}{=} \frac{x^4}{2} - \frac{x^3}{3} + 4x + k$$

e) $$\int (10x^4 - 3\,\operatorname{sen} x)\,dx \underset{\int (f+g) = \int f + \int g}{=} \int 10x^4\,dx - \int 3\,\operatorname{sen} x\,dx \underset{\int a \cdot f = a\int f}{=}$$

$$= 10\int x^4\,dx - 3\int \operatorname{sen} x\,dx \underset{\substack{\int f'\,f^n = \frac{f^{n+1}}{n+1} \\ \int f'\operatorname{sen} f = -\cos f}}{=} 2x^5 + 3\cos x + k$$

f) $$\int\left(8\cdot 2^x+\frac{10}{\sqrt{x}}\right)dx \underset{\int (f+g)=\int f+\int g}{=} \int (8\cdot 2^x)\,dx+\int\frac{10}{\sqrt{x}}\,dx \underset{\int a\cdot f=a\int f}{=}$$

$$=8\int 2^x\,dx+10\int\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \underset{\substack{\int f'\,a^f=\frac{a^f}{\ln a}\\ \int f'\,f^n=\frac{f^{n+1}}{n+1}}}{=} 8\cdot\frac{2^x}{\ln 2}+20\sqrt{x}+k$$

051 Comprueba, con ejemplos, las siguientes afirmaciones.

a) La integral de un producto de funciones no coincide con el producto de las integrales de cada una de ellas.

b) La integral indefinida de un cociente de funciones no coincide con el cociente de las integrales de cada una de ellas.

a) $$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\int x^2dx=\frac{x^3}{3}+k\\ \displaystyle\int x\,dx=\frac{x^2}{2}\to\int x\,dx\cdot\int x\,dx=\frac{x^4}{4}+k\end{array}\right\}\to\int x^2\,dx\neq\int x\,dx\cdot\int x\,dx$$

b) $$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\int 1\,dx=\int\frac{x}{x}\,dx=x+k\\ \displaystyle\int x\,dx=\frac{x^2}{2}\to\frac{\int x\,dx}{\int x\,dx}=\frac{\frac{x^2}{2}}{\frac{x^2}{2}}+k=1+k\end{array}\right\}\to\int\frac{x}{x}dx\neq\frac{\int x\,dx}{\int x\,dx}$$

052 Calcular $\displaystyle\int\frac{\cos\ x}{\operatorname{sen}^3\ x}\,dx$.

(Castilla y León. Junio 2002. Prueba A. Cuestión 3)

$$\int\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x}\,dx=\frac{-1}{2\operatorname{sen}^2 x}+k$$

053 Calcula $\displaystyle\int(2x-3)\,tg\,(x^2-3x)\,dx$, siendo *tg* la función tangente.

(Andalucía. Septiembre 2006. Opción A. Ejercicio 2)

$$\int(2x-3)\,tg\,(x^2-3x)\,dx=\int\frac{(2x-3)\operatorname{sen}(x^2-3x)}{\cos(x^2-3x)}\,dx=-\ln\left|\cos\,(x^2-3x)\right|+k$$

054 Sea la función $f(x) = \dfrac{6x}{x^2+1}$. Encontrar una función primitiva de f.

(Asturias. Junio 2002. Bloque 4)

$$\int \frac{6x}{x^2+1}\,dx = 3\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = 3\ln\left|x^2+1\right| + k$$

055 Calcular $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}\,dx$.

(Castilla y León. Septiembre 2002. Prueba A. Cuestión 4)

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{4x}{\sqrt{1+2x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{1+2x^2} + k$$

056 Calcula la integral indefinida $\displaystyle\int \frac{x+4}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

(La Rioja. Septiembre 2003. Propuesta A. Ejercicio 4)

$$\int \frac{x+4}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + 4\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$
$$= -\sqrt{1-x^2} + 4\,\mathrm{arc\,sen}\,x + k$$

057 Calcula: $\displaystyle\int \frac{3x+4}{x^2+1}\,dx$

(Andalucía. Año 2007. Modelo 5. Opción B. Ejercicio 2)

$$\int \frac{3x+4}{x^2+1}\,dx = \int \frac{3x}{x^2+1}\,dx + 4\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \frac{3}{2}\ln\left|x^2+1\right| + 4\,\mathrm{arc\,tg}\,x + k$$

058 Calcula la primitiva de $\displaystyle\int \frac{x+\sqrt{x}}{x^2}\,dx$.

(Castilla-La Mancha. Septiembre 2005. Bloque 2. Pregunta A)

$$\int \frac{x+\sqrt{x}}{x^2}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{1}{\sqrt{x^3}}\,dx = \ln|x| - \frac{2}{\sqrt{x}} + k$$

059 Calcular la primitiva que sigue: $\displaystyle\int \frac{2x+A}{x^2+4}\,dx$ en función del valor de A.

(País Vasco. Julio 2004. Bloque D. Cuestión D)

$$\int \frac{2x+A}{x^2+4}\,dx = \int \frac{2x}{x^2+4}\,dx + A\int \frac{1}{x^2+4}\,dx = \ln\left|x^2+4\right| + 2A\cdot\mathrm{arc\,tg}\,\frac{x}{2} + k$$

060 Una función $y = f(x)$, con $x > -1$, tiene por derivada: $y' = \dfrac{a}{1+x}$, donde a es una constante. Determina la función si, además, sabemos que $f(0) = 1$ y $f(1) = -1$.

$$f(x) = \int \frac{a}{1+x}\,dx = a\ln|1+x| + k \rightarrow \begin{cases} f(0) = 1 \rightarrow a\ln 1 + k = 1 \rightarrow k = 1 \\ f(1) = -1 \rightarrow a\ln 2 + 1 = -1 \rightarrow a = \dfrac{-2}{\ln 2} \end{cases}$$

Por tanto la función es $f(x) = \dfrac{-2}{\ln 2}\ln|1+x| + 1$.

061 Calcular la primitiva de la función $f(x) = (x^2+1)^{-1}x$ que se anula en $x = 2$.

(Extremadura. Septiembre 2002. Repertorio B. Ejercicio 4)

$$F(x) = \int (x^2+1)^{-1}x\,dx = \int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + k$$

$$f(2) = 0 \rightarrow \frac{1}{2}\ln|1+2^2| + k = 0 \rightarrow k = -\frac{\ln 5}{2} = -\ln\sqrt{5}$$

$$\rightarrow F(x) = \frac{1}{2}\ln|1+x^2| - \ln\sqrt{5}$$

062 De la función $f\colon (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ se sabe que $f'(x) = \dfrac{3}{(x+1)^2}$ y que $f(2) = 0$.

a) Determina f.

b) Halla la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(0, 1)$.

(Andalucía. Año 2004. Modelo 6. Opción A. Ejercicio 1)

a) $$f(x) = \int \frac{3}{(x+1)^2}\,dx = \frac{-3}{x+1} + k$$

$$f(2) = 0 \rightarrow \frac{-3}{3} + k = 0 \rightarrow k = 1 \rightarrow f(x) = \frac{-3}{x+1} + 1$$

b) $$F(x) = \int \left(\frac{-3}{x+1} + 1\right)dx = -3\ln|x+1| + x + k$$

$$F(0) = 1 \rightarrow k = 1 \rightarrow F(x) = -3\ln|x+1| + \frac{3}{2}x + 1$$

063 Calcular la primitiva de la función $f(x) = (x+1)^2 x^{-\frac{1}{2}}$ que se anule en $x = 1$.

(Extremadura. Septiembre 2005. Repertorio A. Ejercicio 4)

$$\int (x+1)^2 x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}}\,dx \underset{\substack{t=\sqrt{x}\\ dt=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx}}{=} 2\int (t^2+1)^2\,dt = 2\left(\frac{t^5}{5} + \frac{2t^3}{3} + t\right) + k =$$

$$= \frac{2\sqrt{x^5}}{5} + \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + \sqrt{x} + k$$

$$F(1) = 0 \rightarrow \frac{2}{5} + \frac{2}{3} + 1 + k = 0 \rightarrow k = -\frac{31}{15} \rightarrow F(x) = \frac{2\sqrt{x^5}}{5} + \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + \sqrt{x} - \frac{31}{15}$$

064 Determina la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sabiendo que su derivada segunda es constante e igual a 3 y que la recta tangente a su gráfica en el punto de abscisa $x = 1$ tiene de ecuación $5x - y - 3 = 0$.

(Andalucía. Año 2001. Modelo 3. Opción B. Ejercicio 2)

$$f''(x) = 3$$

$$f'(x) = \int f''(x)\,dx = \int 3\,dx = 3x + k_1$$

$$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int (3x + k_1)\,dx = \frac{3}{2}x^2 + k_1x + k_2$$

La recta tangente en el punto de abscisa $x = 1$ es $y = 5x - 3$
$\to$ La pendiente es $m = 5$.

Para $x = 1 \to y = 5 \cdot 1 - 3 = 2 \to$ La función pasa por el punto $(1, 2)$.

$$f'(1) = 5 \to 3 + k_1 = 5 \to k_1 = 2$$

$$f(1) = 2 \to \frac{3}{2} + k_1 + k_2 = 2 \to \frac{3}{2} + 2 + k_2 = 2 \to k_2 = -\frac{3}{2}$$

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2}$$

065 Halla una función polinómica de tercer grado $f(x)$ que cumpla simultáneamente las siguientes condiciones:

- Su derivada es $f'(x) = x^2 - 3x$.
- El valor del máximo relativo es el doble del mínimo relativo.

$$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int (x^2 - 3x)\,dx = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + k$$

Calculamos su máximo y mínimo relativo.

$$f'(x) = 0 \to \begin{cases} x = 3 \to f(3) = 9 - \dfrac{27}{2} + k = \dfrac{-9}{2} + k \\ x = 0 \to f(0) = k \end{cases}$$

Imponemos la condición.

$$f(0) = 2f(3) \to k = 2\left(\frac{-9}{2} + k\right) \to k = 9$$

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 9$$

066 De una función derivable se sabe que pasa por el punto $(-1, -4)$ y que su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{si } x \le 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

a) Halla la expresión de $f(x)$.

b) Determina la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$.

a) $f(x) = \begin{cases} 2x - \dfrac{x^2}{2} + k_1 & \text{si } x \le 1 \\ \ln|x| + k_2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Como pasa por el punto $(-1, -4)$:

$$f(-1) = -4 \rightarrow -2 - \frac{1}{2} + k_1 = -4 \rightarrow k_1 = -\frac{3}{2}$$

Como existe la derivada en $x = 1$, necesariamente la función es continua y derivable en dicho punto.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) \rightarrow 2 - \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = 0 + k_2 \rightarrow k_2 = 0$$

La función es: $f(x) = \begin{cases} 2x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{3}{2} & \text{si } x \le 1 \\ \ln|x| & \text{si } x > 1 \end{cases}$

b) La recta tangente es: $y - f(2) = f'(2)(x - 2)$

$$f'(2) = \frac{1}{2} \rightarrow y - \ln 2 = \frac{1}{2}(x-2) \rightarrow y = \frac{x-2}{2} + \ln 2$$

067 **Calcula estas integrales por partes.**

a) $\displaystyle\int x^3 \ln x \, dx$

b) $\displaystyle\int \ln(2x+1)\, dx$

c) $\displaystyle\int e^{-x} \operatorname{sen} 2x \, dx$

d) $\displaystyle\int \operatorname{arc\,tg} x \, dx$

e) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x} \, dx$

f) $\displaystyle\int x \operatorname{sen} 2x \, dx$

g) $\displaystyle\int x^2 \operatorname{sen} 2x \, dx$

h) $\displaystyle\int (2x+3)e^{2x} \, dx$

i) $\displaystyle\int \frac{x}{e^x} \, dx$

j) $\displaystyle\int (x^2 - 5) \cos x \, dx$

k) $\displaystyle\int (2x^2 + x - 2)e^{3x} \, dx$

l) $\displaystyle\int (2 + e^{2x}) \cos(x+1) \, dx$

a) $$\int x^3 \ln x \, dx = \frac{x^4 \ln x}{4} - \int \frac{x^3}{4} dx = \frac{x^4 \ln x}{4} - \frac{x^4}{16} + k = \frac{x^4}{4}\left(\ln x - \frac{1}{4}\right) + k$$

$u = \ln x \rightarrow du = \dfrac{1}{x} dx$

$dv = x^3\, dx \rightarrow v = \dfrac{x^4}{4}$

b) $$\int \ln(2x+1)\, dx = x\ln|2x+1| - \int \frac{2x}{2x+1} dx = x\ln|2x+1| - \int\left(1 - \frac{1}{2x+1}\right) dx =$$

$u = \ln(2x+1) \rightarrow du = \dfrac{2}{2x+1} dx$

$dv = dx \rightarrow v = x$

$$= x\ln|2x+1| - x + \frac{\ln|2x+1|}{2} + k = \left(x + \frac{1}{2}\right)\ln|2x+1| - x + k$$

c) $$\int e^{-x}\,\text{sen}\,2x\,dx = -e^{-x}\frac{\cos 2x}{2} - \frac{1}{2}\int e^{-x}\cos 2x\,dx =$$

$u = e^{-x} \to du = -e^{-x}dx$

$dv = \text{sen}\,2x\,dx \to v = \dfrac{-\cos 2x}{2}$

$u = e^{-x} \to du = -e^{-x}dx$

$dv = \cos 2x\,dx \to v = \dfrac{\text{sen}\,2x}{2}$

$$= -e^{-x}\frac{\cos 2x}{2} - \frac{1}{2}\left(e^{-x}\frac{\text{sen}\,2x}{2} + \frac{1}{2}\int e^{-x}\,\text{sen}\,2x\,dx\right)\int e^{-x}\,\text{sen}\,2x\,dx =$$

$$= -e^{-x}\frac{\cos 2x}{2} - e^{-x}\frac{\text{sen}\,2x}{4} - \frac{1}{4}\int e^{-x}\,\text{sen}\,2x\,dx$$

$$\frac{5}{4}\int e^{-x}\,\text{sen}\,2x\,dx = -e^{-x}\left(\frac{\cos 2x}{2} + \frac{\text{sen}\,2x}{4}\right)$$

$$\to \int e^{-x}\,\text{sen}\,2x\,dx = \frac{-e^{-x}}{5}(2\cos 2x + \text{sen}\,2x) + k$$

d) $$\int \text{arc tg}\,x\,dx = x\cdot\text{arc tg}\,x - \int \frac{x}{x^2+1}\,dx = x\cdot\text{arc tg}\,x - \frac{\ln|x^2+1|}{2} + k$$

$u = \text{arc tg}\,x \to du = \dfrac{1}{x^2+1}\,dx$

$dv = dx \to v = x$

e) $$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \ln^2 x - \int \frac{\ln x}{x}\,dx \to 2\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \ln^2 x \to \int \frac{\ln x}{x}\,dx = \frac{\ln^2 x}{2} + k$$

$u = \ln x \to du = \dfrac{1}{x}\,dx$

$dv = \dfrac{1}{x}\,dx \to v = \ln x$

f) $$\int x\,\text{sen}\,2x\,dx = \frac{-x\cos 2x}{2} + \int \frac{\cos 2x}{2}\,dx = -\frac{x\cos 2x}{2} + \frac{\text{sen}\,2x}{4} + k$$

$u = x \to du = dx$

$dv = \text{sen}\,2x\,dx \to v = \dfrac{-\cos 2x}{2}$

g) $$\int x^2\,\text{sen}\,2x\,dx = \frac{-x^2\cos 2x}{2} + \int x\cos 2x\,dx =$$

$u = x^2 \to du = 2x\,dx$

$dv = \text{sen}\,2x\,dx \to v = \dfrac{-\cos 2x}{2}$

$u = x \to du = dx$

$dv = \cos 2x\,dx \to v = \dfrac{\text{sen}\,2x}{2}$

$$= \frac{-x^2\cos 2x}{2} + \frac{x\,\text{sen}\,2x}{2} - \int \frac{\text{sen}\,2x}{2}\,dx = \frac{-x^2\cos 2x}{2} + \frac{x\,\text{sen}\,2x}{2} + \frac{\cos 2x}{4} + k$$

h) $$\int (2x+3)e^{2x}\,dx = \frac{(2x+3)e^{2x}}{2} - \int e^{2x}\,dx = \frac{(2x+3)e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{2} + k = (x+1)e^{2x} + k$$

$u = 2x+3 \to du = 2\,dx$

$dv = e^{2x}dx \to v = \dfrac{e^{2x}}{2}$

i) $$\int \frac{x}{e^x}\,dx = \frac{x}{e^x} + \int e^{-x}\,dx = \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x} + k = \frac{x-1}{e^x} + k$$

$u = x \to du = dx$
$dv = e^{-x}dx \to v = -e^{-x}$

j) $$\int (x^2-5)\cos x\,dx = (x^2-5)\,\text{sen}\,x - 2\int x\,\text{sen}\,x\,dx =$$

$u = x^2-5 \to du = 2x\,dx$
$dv = \cos x\,dx \to v = \text{sen}\,x$

$u = x \to du = dx$
$dv = \text{sen}\ x\ dx \to v = -\cos\ x$

$$= (x^2-5)\ \text{sen}\ x + 2x\ \cos\ x - 2\int \cos\ x\ dx = (x^2-5)\ \text{sen}\ x + 2x\ \cos\ x - 2\ \text{sen}\ x + k$$

k) $$\int (2x^2+x-2)e^{3x}dx = \frac{(2x^2+x-2)e^{3x}}{3} - \int \frac{(4x+1)e^{3x}}{3}\,dx = \frac{(2x^2+x-2)e^{3x}}{3} -$$

$u = 2x^2+x-2 \to du = (4x+1)\,dx$
$dv = e^{3x}dx \to v = \frac{e^{3x}}{3}$

$u = 4x+1 \to du = 4\,dx$
$dv = e^{3x}dx \to v = \frac{e^{3x}}{3}$

$$-\frac{1}{3}\left(\frac{(4x+1)e^{3x}}{3} - \int \frac{4e^{3x}}{3}\,dx\right) = \frac{(2x^2+x-2)e^{3x}}{3} - \frac{(4x+1)e^{3x}}{9} + \frac{4}{27}e^{3x} + k$$

l) $$\int (2+e^{2x})\cos(x+1)\,dx = \int 2\cos(x+1)\,dx + \int e^{2x}\cos(x+1)\,dx =$$

$$= 2\,\text{sen}\,(x+1) + e^{2x}\text{sen}\,(x+1) - \int 2e^{2x}\text{sen}\,(x+1)\,dx =$$

$u = e^{2x} \to du = 2e^{2x}dx$
$dv = \text{sen}\,(x+1)\,dx \to v = -\cos\,(x+1)$

$$= 2\ \text{sen}\ (x+1) + e^{2x}\text{sen}\ (x+1) + 2e^{2x}\cos\ (x+1) - 2\int 2e^{2x}\cos\ (x+1) =$$

$$= 2\ \text{sen}\ (x+1) + \frac{e^{2x}\text{sen}\ (x+1) + 2e^{2x}\cos\ (x+1)}{5} + k$$

068 Utilizando el método de integración por partes, calcule $I = \int \ln\,x\ dx$.

(Murcia. Septiembre 2002. Bloque 4. Cuestión 1)

$$I = \int \ln x\ dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + k$$

$u = \ln x \to du = \frac{1}{x}\,dx$
$dv = dx \to v = x$

069 Utilizar el método de integración por partes para encontrar una primitiva de la función $f(x) = x\cos 3x$.

(País Vasco. Septiembre 2002. Bloque D. Cuestión D)

$$\int x\cos 3x\ dx = \frac{x\,\text{sen}\ 3x}{3} - \int \frac{\text{sen}\ 3x}{3}\ dx = \frac{x\,\text{sen}\ 3x}{3} + \frac{\cos\ 3x}{9} + k$$

$u = x \to du = dx$
$dv = \cos 3x\ dx \to v = \frac{\text{sen}\ 3x}{3}$

070 Aplicar el método de integración por partes para calcular las siguientes primitivas.

a) $I = \int x\, e^{2x}\, dx$ b) $J = \int x \ln x\, dx$

(País Vasco. Junio 2004. Bloque D. Cuestión D)

a) $$\int x e^{2x} dx = \frac{x e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2}\, dx = \frac{x e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + k$$

$u = x \rightarrow du = dx$

$dv = e^{2x} dx \rightarrow v = \dfrac{e^{2x}}{2}$

b) $$\int x \ln x\, dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \int \frac{x}{2}\, dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{x^2}{4} + k$$

$u = \ln x \rightarrow du = \dfrac{1}{x} dx$

$dv = x\, dx \rightarrow v = \dfrac{x^2}{2}$

071 Calcula la integral $\int \frac{2}{\pi} x \text{ sen } x\, dx$ indicando los pasos realizados.

(C. Valenciana. Junio 2003. Ejercicio A. Problema 2)

$$\int \frac{2}{\pi} x \text{ sen } x\, dx = \frac{2}{\pi} \int x \text{ sen } x\, dx = \frac{2}{\pi}\left(-x \cos x + \int \cos x\, dx\right) =$$

$u = x \rightarrow du = dx$

$dv = \text{sen } x\, dx \rightarrow v = -\cos x$

$$= \frac{2}{\pi}(-x \cos x + \text{sen } x) + k$$

072 Sea la función $f(x) = x^2 e^x$. Calcular una primitiva.

(Asturias. Septiembre 2002. Bloque 4)

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2x\, e^x dx = x^2 e^x - 2\left(x\, e^x - \int e^x dx\right) =$$

$u = x^2 \rightarrow du = 2x\, dx$

$dv = e^x dx \rightarrow v = e^x$

$u = x \rightarrow du = dx$

$dv = e^x dx \rightarrow v = e^x$

$$= x^2 e^x - 2x\, e^x + 2\, e^x + k = (x^2 - 2x + 2)\, e^x + k$$

073 Calcula $\int (x^2 - 1) e^{-x}\, dx$.

(Andalucía. Año 2006. Modelo 4. Opción A. Ejercicio 2)

$$\int (x^2 - 1) e^{x} dx = -(x^2 - 1) e^{-x} + \int 2x\, e^{-x} dx = -(x^2 - 1) e^{-x} - 2x\, e^{-x} + \int 2\, e^{-x} dx =$$

$u = x^2 - 1 \rightarrow du = 2x\, dx$

$dv = e^{-x} dx \rightarrow v = -e^{-x}$

$u = 2x \rightarrow du = 2\, dx$

$dv = e^{-x} dx \rightarrow v = -e^{-x}$

$$= -(x^2 - 1) e^{-x} - 2x\, e^{-x} - 2e^{-x} + k = (-x^2 - 2x - 1) e^{-x} + k$$

074 Calcular la primitiva siguiente: $\int \ln(25+x^2)\,dx$

(Canarias. Junio 2003. Opción A. Cuestión 2)

$$\int \ln(25+x^2)\,dx = x\ln(25+x^2) - \int \frac{2x^2}{25+x^2}\,dx =$$

$$u = \ln(25+x^2) \rightarrow du = \frac{2x}{25+x^2}\,dx$$
$$dv = dx \rightarrow v = x$$

$$= x\ln(25+x^2) - \int\left(2 - \frac{50}{25+x^2}\right)dx = x\ln(25+x^2) - \int 2\,dx + \int \frac{50}{25+x^2}\,dx =$$

$$= x\ln(25+x^2) - 2x + 10\,arc\,tg\,\frac{x}{5} + k$$

075 Halla una función primitiva de:

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$$

que pase por el punto $P(e, 2)$.

$$F(x) = \int\left(\frac{1}{x} - \ln x\right)dx = \ln|x| - x\ln|x| + x + k$$

$$F(e) = 2 \rightarrow 1 - e + e + k = 2 \rightarrow k = 1 \rightarrow F(x) = \ln|x| - x\ln|x| + x + 1$$

076 En cada uno de los siguientes casos, obtén una función $f(x)$ que cumpla las condiciones que se señalan:

a) $f'(x) = x^2\,sen\,x,\ f(0) = -1$ b) $f'(x) = x\ln x,\ f(1) = \frac{1}{2}$

a) $$\int x^2\,sen\,x\,dx = -x^2\cos x + 2\int x\cos x\,dx = -x^2\cos x + 2x\,sen\,x + 2\cos x + k =$$

$$u = x^2 \rightarrow du = 2x\,dx \qquad u = x \rightarrow du = dx$$
$$dv = sen\,x\,dx \rightarrow v = -\cos x \qquad \cos x\,dv = dx \rightarrow v = sen\,x$$

$$= (2 - x^2)\cos x + 2x\,sen\,x + k$$

$$f(0) = -1 \rightarrow 2 + k = -1 \rightarrow k = -3 \rightarrow f(x) = (1 - x^2)\cos x + x\,sen\,x - 3$$

b) $$\int x\ln x\,dx = \frac{x^2\ln x}{2} - \int \frac{x}{2}\,dx = \frac{x^2\ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + k$$

$$u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x}\,dx$$
$$dv = x\,dx \rightarrow v = \frac{x^2}{2}$$

$$f(1) = \frac{1}{2} \rightarrow -\frac{1}{4} + k = \frac{1}{2} \rightarrow k = \frac{3}{4} \rightarrow f(x) = \frac{x^2\ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{3}{4}$$

077 Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f'(x) = x^2\,sen\,2x$. Calcula la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(0, 1)$.

(Andalucía. Año 2005. Modelo 5. Opción B. Cuestión 2)

$$\int x^2 \operatorname{sen} 2x\,dx = \underbrace{-\frac{x^2\cos 2x}{2} + \int x\cos 2x\,dx}_{\substack{u = x^2 \to du = 2x\,dx \\ dv = \operatorname{sen} 2x\,dx \to v = -\frac{\cos 2x}{2}}} = \underbrace{-\frac{x^2\cos 2x}{2} + \frac{x \operatorname{sen} 2x}{2}}_{\substack{u = x \to du = dx \\ dv = \cos 2x\,dx \to v = \frac{\operatorname{sen} 2x}{2}}} - \int \frac{\operatorname{sen} 2x}{2}dx =$$

$$= -\frac{x^2\cos 2x}{2} + \frac{x\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\cos 2x}{4} = \frac{(1-2x^2)\cos 2x}{4} + \frac{x\operatorname{sen} 2x}{2} + k$$

$$f(0) = 1 \to \frac{1}{4} + k = 1 \to k = \frac{3}{4} \to f(x) = \frac{(1-2x^2)\cos 2x}{4} + \frac{x\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{3}{4}$$

078 Obtener la expresión de una función $f(x)$ sabiendo que $f'(x) = (x+1)e^{2x}$ y que $f(0) = \frac{5}{4}$.

(Canarias. Septiembre 2001. Opción B. Cuestión 2)

$$\int (x+1)e^{2x}dx = \underbrace{\frac{(x+1)e^{2x}}{2}}_{\substack{u = x+1 \to du = dx \\ dv = e^{2x}dx \to v = \frac{e^{2x}}{2}}} - \int \frac{e^{2x}}{2}dx = \frac{(x+1)e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + k = \frac{(x+1)e^{2x}}{4} + k$$

$$f(0) = \frac{5}{4} \to \frac{1}{4} + k = \frac{5}{4} \to k = 1 \to f(x) = \frac{(2x+1)e^{2x}}{4} + 1$$

079 Dada la función $f(x) = (2x+1)e^{(x^2+x)}$, determina la función $g(x)$ tal que $g'(x) = f(x)$ (es decir, una primitiva de $f(x)$) y que su gráfica pase por el punto (0, 2).

(Cataluña. Septiembre 2003. Cuestión 1)

$$g(x) = \int (2x+1)e^{x^2+x}dx = e^{x^2+x} + k$$

$$g(0) = 2 \to 1 + k = 2 \to k = 1 \to g(x) = e^{x^2+x} + 1$$

080 Halla la expresión de la familia de funciones tales que la pendiente de las rectas tangentes a sus gráficas en cualquier punto viene dada por $m = (2x+3)e^{2x}$. Determina, entre todas ellas, la que pasa por el punto (0, 1).

La pendiente de la recta tangente es el valor de la derivada de la función.

$$F(x) = \int (2x+3)e^{2x}dx = \underbrace{\frac{(2x+3)e^{2x}}{2}}_{\substack{u = 2x+3 \to du = 2\,dx \\ dv = e^{2x}\,dx \to v = \frac{e^{2x}}{2}}} - \int e^{2x}dx = \frac{(2x+3)e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{2} + k =$$

$$= \frac{(2x+3)e^{2x}}{2} + k = (x+1)e^{2x} + k$$

$F(0) = 1 \to 1 + k = 1 \to k = 0 \to$ La función pedida es $F(x) = (x+1)e^{2x}$.

081 Calcular $\int \frac{1}{x(x+1)}\,dx$.

(Castilla y León. Septiembre 2008. Prueba A. Cuestión 4)

$$\int \frac{1}{x(x+1)}\,dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) dx = \ln|x| - \ln|x+1| + k$$

082 Calcula la siguiente integral indefinida: $\int \frac{2}{x^2-1}\,dx$

(Navarra. Junio 2005. Grupo 2. Opción C)

$$\int \frac{2}{x^2-1}\,dx = \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) dx = \ln|x-1| - \ln|x+1| + k$$

083 Calcule $\int \frac{dx}{x^2-4}$.

(Murcia. Junio 2003. Bloque 4. Cuestión 1)

$$\int \frac{1}{x^2-4}\,dx = \int \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\right) dx = \frac{\ln|x-2| - \ln|x+2|}{4} + k$$

084 Calcular la integral indefinida $\int \frac{dx}{(x-1)^2}$.

(La Rioja. Junio 2004. Propuesta A. Ejercicio 3)

$$\int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \frac{-1}{x-1} + k$$

085 Calcular la primitiva que sigue: $\int \frac{2dx}{x^3-x}$.

(País Vasco. Junio 2005. Bloque D. Problema D)

$$\int \frac{2}{x^3-x}\,dx = \int \left(-\frac{2}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}\right) dx = -2\ln|x| + \ln|x+1| + \ln|x-1| + k$$

086 Calcula las siguientes integrales de funciones racionales.

a) $\int \frac{x+3}{x-1}\,dx$

b) $\int \frac{2x+3}{2x+1}\,dx$

c) $\int \frac{3}{x^2+x-2}\,dx$

d) $\int \frac{5x-1}{x^2-1}\,dx$

e) $\int \frac{x-2}{x^2-x}\,dx$

f) $\int \frac{x+2}{x^2-1}\,dx$

g) $\int \frac{1}{x^2+9}\,dx$

h) $\int \frac{12}{x^3+4x^2+x-6}\,dx$

a) $\int \frac{x+3}{x-1}\,dx = \int \left(1+\frac{4}{x-1}\right) dx = x + 4\ln|x-1| + k$

b) $\int \frac{2x+3}{2x+1}\,dx = \int \left(1+\frac{2}{2x+1}\right) dx = x + \ln|2x+1| + k$

c) $\int \frac{3}{x^2+x-2}\,dx = \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}\right) dx = \ln|x-1| - \ln|x+2| + k$

d) $\int \frac{5x-1}{x^2-1}\,dx = \int \left(\frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+1}\right) dx = 2\ln|x-1| + 3\ln|x+1| + k$

e) $\int \frac{x-2}{x^2-x}\,dx = \int \left(\frac{-1}{x-1} + \frac{2}{x}\right) dx = -\ln|x-1| + 2\ln|x| + k$

f) $\int \frac{x+2}{x^2-1}\,dx = \int \left(\frac{3}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)}\right) dx = \frac{3}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + k$

g) $\int \frac{1}{x^2+9}\,dx = \frac{1}{3}\,arc\,tg\,\frac{x}{3} + k$

h) $\int \frac{12}{x^3+4x^2+x-6}\,dx = \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{4}{x+2} + \frac{3}{x+3}\right) dx =$

$= \ln|x-1| - 4\ln|x+2| + 3\ln|x+3| + k$

087 Halla estas integrales de funciones racionales.

a) $\int \frac{1}{x^2-5x+6}\,dx$

b) $\int \frac{x-2}{x^2+2x-3}\,dx$

c) $\int \frac{x-4}{x^2+2x-3}\,dx$

d) $\int \frac{2x+8}{x^2-4}\,dx$

e) $\int \frac{x^2}{x-4}\,dx$

f) $\int \frac{x}{x^4+1}\,dx$

g) $\int \frac{x^4-x^3-x-1}{x^3-x^2}\,dx$

h) $\int \frac{x^3}{(x+1)^4}\,dx$

i) $\int \frac{2x+5}{(x+3)^3}\,dx$

j) $\int \frac{2x}{(x+1)^2}\,dx$

a) $\int \frac{1}{x^2-5x+6}\,dx = \int \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}\right) dx = \ln|x-3| - \ln|x-2| + k$

b) $\int \frac{x-2}{x^2+2x-3}\,dx = \int \frac{1}{4}\left(\frac{5}{x+3} - \frac{1}{x-1}\right) dx = \frac{5}{4}\ln|x+3| - \frac{1}{4}\ln|x-1| + k$

c) $\int \frac{x-4}{x^2+2x-3}\,dx = \int \frac{1}{4}\left(\frac{7}{x+3} - \frac{3}{x-1}\right) dx = \frac{7}{4}\ln|x+3| - \frac{3}{4}\ln|x-1| + k$

d) $\int \frac{2x+8}{x^2-4}\,dx = \int \left(\frac{3}{x-2} - \frac{1}{x+2}\right) dx = 3\ln|x-2| - \ln|x+2| + k$

e) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x-4}\,dx = \int\left(x+4+\frac{16}{x-4}\right)dx = \frac{x}{2} + 4x + 16\ln|x-4| + k$

f) $\displaystyle\int \frac{x}{x^4+1}\,dx = \frac{1}{2}\,arc\,tg\,x^2 + k$

g) $\displaystyle\int \frac{x^4-x^3-x+1}{x^3-x^2}\,dx = \int\left(x-\frac{1}{x^2}\right)dx = \frac{x^2}{2}+\frac{1}{x}+k$

h) $$\int \frac{x^3}{(x+1)^4}\,dx = \int\left(\frac{-1}{(x+1)^4}+\frac{3}{(x+1)^3}-\frac{3}{(x+1)^2}+\frac{1}{x+1}\right)dx =$$
$$= \frac{1}{3(x+1)^3} - \frac{3}{2(x+1)^2} + \frac{3}{x+1} + \ln|x+1| + k$$

i) $\displaystyle\int \frac{2x+5}{(x+3)^3}\,dx = \int\left(\frac{-1}{(x+3)^3}+\frac{2}{(x+3)^2}\right)dx = \frac{1}{2(x+3)^2} - \frac{2}{x+3} + k$

j) $\displaystyle\int \frac{2x}{(x+1)^2}\,dx = \int\left(\frac{-2}{(x+1)^2}+\frac{2}{x+1}\right)dx = \frac{2}{x+1} + 2\ln|x+1| + k$

088 Halla la integral indefinida $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+x-6}\,dx.$

(Navarra. Junio 2007. Grupo 2. Opción C)

$$\int \frac{1}{x^2+x-6}\,dx = \int \frac{1}{5}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+3}\right)dx = \frac{\ln|x-2|}{5} - \frac{\ln|x+3|}{5} + k$$

089 Calcúlese $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+4x+13}\,dx.$

(Castilla y León. Septiembre 2005. Prueba B. Cuestión 1)

$$\int \frac{1}{x^2+4x+13}\,dx = \int \frac{1}{(x+2)^2+9}\,dx = \frac{1}{9}\int \frac{1}{\frac{(x+2)^2}{9}+1}\,dx =$$
$$= \frac{1}{9}\int \frac{1}{\left(\frac{x+2}{3}\right)^2+1}\,dx = \frac{1}{3}\,arc\,tg\left(\frac{x+2}{3}\right) + k$$

090 Calcular $\displaystyle\int \frac{3x}{x^2+3x-10}\,dx.$

(Canarias. Septiembre 2004. Opción B. Cuestión 2)

$$\int \frac{3x}{x^2+3x-10}\,dx = \int \frac{1}{7}\left(\frac{6}{x-2}+\frac{15}{x+5}\right)dx = \frac{6}{7}\ln|x-2| + \frac{15}{7}\ln|x+5| + k$$

091 Calcule $\int \frac{dx}{x^2 - 5x + 6}$.

(Murcia. Septiembre 2003. Bloque 4. Cuestión 2)

$$\int \frac{1}{x^2 - 5x + 6}\,dx = \int \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2} \right) dx = \ln|x-3| - \ln|x-2| + k$$

092 Calcula $\int \frac{5x^2 - x - 160}{x^2 - 25}\,dx$.

(Andalucía. Septiembre 2006. Opción A. Ejercicio 2)

$$\int \frac{5x^2 - 5x - 160}{x^2 - 25}\,dx = \int \left(5 - \frac{6}{x-5} + \frac{1}{x+5} \right) dx =$$
$$= 5x - 6\ln|x-5| + \ln|x+5| + k$$

093 Calcula la integral $\int \frac{3x^3 + x^2 - 10x + 1}{x^2 - x - 2}\,dx$.

(Andalucía. Año 2005. Modelo 2. Opción A. Ejercicio 2)

$$\int \frac{3x^3 + x^2 - 10x + 1}{x^2 - x - 2}\,dx = \int \left(3x + 4 + \frac{3}{x-2} - \frac{3}{x+1} \right) dx =$$
$$= \frac{3x^2}{2} + 4x + 3\ln|x-2| - 3\ln|x+1| + k$$

094 Calcular la integral $\int \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 2x + 1}\,dx$.

(Murcia. Junio 2008. Bloque 4. Cuestión A)

$$\int \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 2x + 1}\,dx = \int \left(x - \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} \right) dx =$$
$$= \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x-1} - \ln|x-1| + k$$

095 Calcular $\int \frac{x^3 - 2x^2 + x + 1}{x^2 - 3x + 2}\,dx$.

(Canarias. Junio 2006. Opción B. Cuestión 1)

$$\int \frac{x^3 - 2x^2 + x + 1}{x^2 - 3x + 2}\,dx = \int \left(x + 1 + \frac{3}{x-2} - \frac{1}{x-1} \right) dx =$$
$$= \frac{x^2}{2} + x + 3\ln|x-2| - \ln|x-1| + k$$

096 Calcula la siguiente integral: $\int \frac{x^3+1}{x^2+4}\,dx$.

(Castilla-La Mancha. Septiembre 2006. Bloque 2. Pregunta A)

$$\int \frac{x^3+1}{x^2+4}\,dx = \int \left(x + \frac{1-4x}{x^2+4} \right) dx =$$

$$= \int \left(x + \frac{1}{x^2+4} - \frac{4x}{x^2+4} \right) dx = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} arc\,tg\,\frac{x}{2} - 2\ln\left|x^2+4\right| + k$$

097 Se consideran las funciones reales $f(x) = 12x^3 - 8x^2 + 9x - 5$ y $g(x) = 6x^2 - 7x + 2$. Calcular la función $H(x) = \int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx$ que cumple $H(1) = 1$.

(C. Valenciana. Junio 2007. Bloque 3. Problema 1)

$$H(x) = \int \frac{12x^3 - 8x^2 + 9x - 5}{6x^2 - 7x + 2}\,dx = \int \left(2x + 1 + \frac{12x - 7}{6x^2 - 7x + 2} \right) dx =$$

$$= x^2 + x + \ln\left|6x^2 - 7x + 2\right| + k$$

098 Calcula $I = \int \frac{2}{2 - e^x}\,dx$ haciendo el cambio de variable $t = e^x$.

(Andalucía. Año 2007. Modelo 4. Opción A. Ejercicio 2)

$$I = \int \frac{2}{2 - e^x}\,dx \underset{\substack{t = e^x \\ dt = e^x dx}}{=} \int \frac{2}{2-t} \cdot \frac{dt}{t} = \int \left(\frac{1}{2-t} + \frac{1}{t} \right) dt =$$

$$= \ln\left|2 - t\right| + \ln\left|t\right| + k = \ln\left|2 - e^x\right| + x + k$$

099 Sea la integral $\int e^{2x}\,sen\,e^x\,dx$.

a) Intégrala mediante el cambio $t = e^x$.

b) Calcula la constante de integración para que la función integral pase por el origen de coordenadas.

(Aragón. Junio 2002. Opción B. Cuestión 3)

a) $$\int e^{2x}\,sen\,e^x\,dx \underset{\substack{t = e^x \\ dt = e^x dx}}{=} \int \frac{t^2\,sen\,t}{t}\,dt = \int t\,sen\,t\,dt \underset{\substack{u = t \to du = dt \\ dv = sen t\;dt \to v = -cos\;t}}{=} -t\cos t + \int \cos t\,dt =$$

$$= -t\cos t + sen\,t + k = -e^x\cos e^x + sen\,e^x + k$$

b) $$f(0) = 0 \to -cos\,1 + sen\,1 + k = 0 \to k = cos\,1 - sen\,1$$

$$\to f(x) = -e^x\cos e^x - sen\,e^x + cos\,1 + sen\,1$$

100 Sea $\ln x$ el logaritmo neperiano de x y sea $f: D \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^2}$. Usa el cambio de variable $t = \ln x$ para calcular una primitiva de f.

(Andalucía. Año 2002. Modelo 1. Opción A. Ejercicio 1)

$$F(x) = \int \frac{1}{x\,(\ln x)^2}\,dx = \int \frac{1}{t^2}\,dt = \frac{-1}{t} + k = \frac{-1}{\ln x} + k$$

$$t = \ln x \qquad dt = \frac{1}{x}\,dx$$

101 Considera la integral $\displaystyle\int \frac{\cos x}{(\operatorname{sen} x)^3}\,dx$.

a) Calcularla realizando el cambio de variable $\operatorname{sen} x = t$.

b) Calcula la misma integral pero haciendo el cambio de variable $\operatorname{tg} x = t$.

c) ¿Se obtiene el mismo resultado? Justifica la respuesta.

(La Rioja. Junio 2000. Propuesta A. Ejercicio 6)

a) $$\int \frac{\cos x}{(\operatorname{sen} x)^3}\,dx = \int \frac{1}{t^3}\,dt = \frac{-1}{2t^2} + k = \frac{-1}{2\,(\operatorname{sen} x)^2} + k$$

$$t = \operatorname{sen} x \qquad dt = \cos x\,dx$$

b) $$\int \frac{\cos x}{(\operatorname{sen} x)^3}\,dx = \int \frac{1}{\operatorname{tg} x\,\operatorname{sen}^2 x}\,dx = \int \frac{1}{t^3}\,dt = \frac{-1}{2t^2} + k = \frac{-1}{2\,(\operatorname{tg} x)^2} + k$$

$$t = \operatorname{tg} x \qquad dt = \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$$

c) $$\frac{-1}{2\,(\operatorname{tg} x)^2} + k = \frac{-\cos^2 x}{2\,\operatorname{sen}^2 x} + k = \frac{\operatorname{sen}^2 x - 1}{2\,\operatorname{sen}^2 x} + k =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2\,\operatorname{sen}^2 x} + k = \frac{-1}{2\,\operatorname{sen}^2 x} + \frac{1}{2} + k = \frac{-1}{2\,\operatorname{sen}^2 x} + k'$$

Los resultados solo difieren en una constante por lo que obtenemos la misma integral.

102 Halla, realizando un cambio de variable, las siguientes integrales.

a) $\displaystyle\int \cos x\,\operatorname{sen}^3 x\,dx$

b) $\displaystyle\int x \ln(1 + x^2)\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{\ln 2x}{x}\,dx$

d) $\displaystyle\int 2x\,\operatorname{sen} x^2\,dx$

e) $\displaystyle\int x\sqrt{x+1}\,dx$

f) $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2 - 1}\,dx$

g) $\displaystyle\int \cos^2 x\,\operatorname{sen} x\,dx$

h) $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\,e^{\cos x}\,dx$

i) $\displaystyle\int \cos^2 x\,\operatorname{sen}^3 x\,dx$

j) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos x}\,dx$

k) $\displaystyle\int (x^2 + 1)e^{x^3 + 3x}\,dx$

l) $\displaystyle\int \cos^5 x\,\operatorname{sen}^3 x\,dx$

a) $$\int \cos x \operatorname{sen}^3 x\, dx = \int t^3\, dt = \frac{t^4}{4} + k = \frac{\operatorname{sen}^4 x}{4} + k$$

$t = \operatorname{sen} x$
$dt = \cos x\, dx$

b) $$\int x \ln(1 + x^2)\, dx = \frac{1}{2}\int \ln t\, dt = \frac{1}{2}(t \ln t - t) + k =$$

$t = 1 + x^2$
$dt = 2x\, dx$

$$= \frac{1}{2}\left((1 + x^2)\ln(1 + x^2) - (1 + x^2)\right) + k$$

c) $$\int \frac{\ln 2x}{x}\, dx = \int t\, dt = \frac{t^2}{2} + k = \frac{\ln^2(2x)}{2} + k$$

$t = \ln 2x$
$dt = \frac{1}{x}\, dx$

d) $$\int 2x \operatorname{sen} x^2\, dx = \int \operatorname{sen} t\, dt = -\cos t + k = -\cos x^2 + k$$

$t = x^2$
$dt = 2x\, dx$

e) $$\int x\sqrt{x+1}\, dx = \int 2(t^2 - 1)t^2\, dt = \frac{2}{5}t^5 - \frac{2}{3}t^3 + k =$$

$t = \sqrt{x+1} \rightarrow t^2 - 1 = x$
$2t\, dt = dx$

$$= \sqrt{x+1}\left(\frac{2(x+1)^2}{5} - \frac{2(x+1)}{3}\right) + k$$

f) $$\int \frac{2x}{x^2 - 1}\, dx = \int \frac{1}{t}\, dt = \ln|t| + k = \ln|x^2 - 1| + k$$

$t = x^2 - 1$
$dt = 2x\, dx$

g) $$\int \cos^2 x \operatorname{sen} x\, dx = \int -t^2\, dt = \frac{-t^3}{3} + k = \frac{-\cos^3 x}{3} + k$$

$t = \cos x$
$dt = -\operatorname{sen} x\, dx$

h) $$\int \operatorname{sen} x\, e^{\cos x}\, dx = \int -e^t dt = -e^t + k = -e^{\cos x} + k$$

$t = \cos x$
$dt = -\operatorname{sen} x\, dx$

i) $$\int \cos^2 x \operatorname{sen}^3 x\, dx = \int -t^2(1 - t^2)\, dt = -\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + k = -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + k$$

$t = \cos x$
$dt = -\operatorname{sen} x\, dx$

j) $$\int \frac{sen^3 x}{\cos x}\, dx = \int \frac{t^2-1}{t} dt = \frac{t^2}{2} - \ln|t| + k = \frac{\cos^2 x}{2} - \ln|\cos x| + k$$

$t = \cos x$

$dt = -sen\, x\, dx$

k) $$\int (x^2+1)\, e^{x^3+3x}\, dx = \int \frac{e^t}{3} dt = \frac{e^t}{3} + k = \frac{e^{x^3+3x}}{3} + k$$

$t = x^3 + 3x$

$dt = (3x^2+3)\, dx$

l) $$\int \cos^5 x\, sen^3 x\, dx = \int t^5(t^2-1)\, dt = \frac{t^8}{8} - \frac{t^6}{6} + k = \frac{\cos^8 x}{8} - \frac{\cos^6 x}{6} + k$$

$t = \cos x$

$dt = -sen\, x\, dx$

103 Resuelve utilizando un cambio de variable.

a) $\int \frac{2}{4+x^2}\, dx$

b) $\int x(x+5)^{10}\, dx$

c) $\int \frac{tg\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$

d) $\int x e^{3x^2}\, dx$

e) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\, dx$

f) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

g) $\int tg\, 2x\, dx$

h) $\int cotg\, \frac{x}{5}\, dx$

i) $\int \frac{x^4}{\sqrt{1-x^{10}}}\, dx$

j) $\int e^x \sqrt{(e^x+1)^3}\, dx$

a) $$\int \frac{2}{4+x^2}\, dx = \int \frac{1}{1+t^2}\, dt = arc\, tg\, t + k = arc\, tg\, \frac{x}{2} + k$$

$t = \frac{x}{2}$

$dt = \frac{1}{2}\, dx$

b) $$\int x(x+5)^{10} dx = \int (t-5)\, t^{10} dt = \int (t^{11} - 5t^{10})\, dt =$$

$t = x+5 \rightarrow t-5 = x$

$dt = dx$

$$= \frac{t^{12}}{12} - \frac{5t^{11}}{11} + k = \frac{(x+5)^{12}}{12} - \frac{5(x+5)^{11}}{11} + k$$

c) $$\int \frac{tg\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx = \int 2tg\, t\, dt = -2\ln|\cos t| + k = -2\ln\left|\sqrt{x}\right| + k$$

$t = \sqrt{x}$

$dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx$

d) $$\int x e^{3x^2} dx \underset{\substack{t = 3x^2 \\ dt = 6x\,dx}}{=} \int \frac{e^t}{6}\, dt = \frac{e^t}{6} + k = \frac{e^{3x^2}}{6} + k$$

e) $$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\, dx \underset{\substack{t = x^2 \\ dt = 2x\,dx}}{=} \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \frac{1}{2}\, arc\,sen\, t + k = \frac{1}{2}\, arc\,sen\, x^2 + k$$

f) $$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \underset{\substack{t = 1-x^2 \\ dt = -2x\,dx}}{=} \int \frac{-1}{2\sqrt{t}}\, dt = -\sqrt{t} + k = -\sqrt{1-x^2} + k$$

g) $$\int tg\, 2x\, dx \underset{\substack{t = \cos 2x \\ dt = -2\,sen\, 2x\,dx}}{=} \int \frac{-1}{2t}\, dt = \frac{-1}{2} \ln|t| + k = \frac{-1}{2}\ln|\cos 2x| + k$$

h) $$\int cotg\, \frac{x}{5}\, dx \underset{\substack{t = sen\, \frac{x}{5} \\ dt = \frac{1}{5} \cos\frac{x}{5}\, dx}}{=} \int \frac{5}{t}\, dt = 5\ln|t| + k = 5\ln\left|sen\, \frac{x}{5}\right| + k$$

i) $$\int \frac{x^4}{\sqrt{1-x^{10}}}\, dx \underset{\substack{t = x^5 \\ dt = 5x^4\,dx}}{=} \frac{1}{5}\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \frac{1}{5}\, arc\,sen\, t + k = \frac{1}{5}\, arc\,sen\, x^5 + k$$

j) $$\int e^x\sqrt{(e^x+1)^3}\, dx \underset{\substack{t = e^x + 1 \\ dt = e^x\,dx}}{=} \int \sqrt{t^3}\, dt = \frac{2}{5}\sqrt{t^5} + k = \frac{2}{5}\sqrt{(e^x+1)^5} + k$$

104 Calcula la siguiente integral: $\displaystyle\int \frac{2}{1+\sqrt{x}}\, dx$

Indicación: Puede ayudarte realizar un cambio de variable adecuado.

(Castilla-La Mancha. Junio 2007. Bloque 2. Pregunta A)

$$\int \frac{2}{1+\sqrt{x}}\, dx \underset{\substack{t = \sqrt{x} \\ dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx}}{=} \int \frac{4t}{1+t}\, dt = \int\left(4 - \frac{4}{1+t}\right) dt = 4t - 4\ln|1+t| + k = 4\sqrt{x} - 4\ln\left|1+\sqrt{x}\right| + k$$

105 Resolver la integral indefinida:

$$\int \frac{dx}{x+1+\sqrt{x+1}}$$

(Canarias. Septiembre 2007. Opción B. Cuestión 2)

$$\int \frac{dx}{x+1+\sqrt{x+1}}\,dx \underset{\substack{t=\sqrt{x+1}\\ dt=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}dx}}{=} \int \frac{2t}{t^2+t}\,dt = \int \frac{2}{t+1}\,dt =$$

$$= 2\ln|t+1|+k = 2\ln\left|\sqrt{x+1}+1\right|+k$$

106 Calcula estas integrales.

a) $\displaystyle\int \frac{3x^2-5x+7}{x^3-4x^2+4x}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-9x^4}}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{3x^2-7x+4}{2x-3}\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{2}{9+4x^2}\,dx$

e) $\displaystyle\int \frac{5}{\sqrt{1-9x^2}}\,dx$

f) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

g) $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,dx$

h) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1+x}}\,dx$

a) $$\int \frac{3x^2-5x+7}{x^3-4x^2+4x}\,dx = \int\left(\frac{9}{2(x-2)^2}+\frac{5}{4(x-2)}+\frac{7}{4x}\right)dx =$$

$$= \frac{-9}{2(x-2)}+\frac{5}{4}\ln|x-2|+\frac{7}{4}\ln|x|+k$$

b) $$\int \frac{x}{\sqrt{1-9x^2}}\,dx = \frac{-1}{18}\int \frac{-18x}{\sqrt{1-9x^2}}\,dx = -\frac{\sqrt{1-9x^2}}{9}+k$$

c) $$\int \frac{3x^2-7x+4}{2x-3}\,dx = \int\left(\frac{3}{2}x-\frac{5}{4}+\frac{1}{4(2x-3)}\right)dx =$$

$$= \frac{3x^2}{4}-\frac{5x}{4}+\frac{1}{8}\ln|2x-3|+k$$

d) $$\int \frac{2}{9+4x^2}\,dx = \int \frac{2}{9+(2x)^2}\,dx = \frac{1}{3}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{2x}{3}+k$$

e) $$\int \frac{5}{\sqrt{1-9x^2}}\,dx = \frac{5}{3}\int \frac{3}{\sqrt{1-(3x)^2}}\,dx = \frac{5}{3}\,\mathrm{arc\,sen}\,3x+k$$

f) $$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \sqrt{1+x^2}+k$$

g) $$\int \sqrt{1-x^2}\,dx \underset{\substack{t=\operatorname{sen}x\\ dt=\cos x\,dx}}{=} \int \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}\,\cos t\,dt = \int \cos^2 t\,dt \underset{\substack{u=\cos t \to du=-\operatorname{sen} t\,dt\\ dv=\cos t\,dt \to v=\operatorname{sen} t}}{=} \cos t\operatorname{sen} t + \int \operatorname{sen}^2 t\,dt =$$

$$= \cos t\operatorname{sen} t + \int (1-\cos^2 t)\,dt = \cos t\operatorname{sen} t + t - \cos^2 t\,dt$$

$$\to \int \cos^2 t\,dt = \frac{\cos t\operatorname{sen} t + t}{2} + k = \frac{x\sqrt{1-x^2} + \operatorname{arc\,sen} x}{2} + k$$

h) $$\int \frac{x}{\sqrt{1+x}}\,dx \underset{\substack{t=1+x\\ dt=dx}}{=} \int \frac{t-1}{\sqrt{t}}\,dt = \int \sqrt{t}\,dt - \int \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{2}{3}\sqrt{t^3} - 2\sqrt{t} + k =$$

$$= \sqrt{1+x}\cdot\left(\frac{2(x+1)}{3} - 2\right) + k$$

107 Halla las siguientes integrales.

a) $\displaystyle\int \frac{x^3+4x^2-10x+7}{x^3-7x-6}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-7x+10}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{2^{3x}}{2^x-4}\,dx$

d) $\displaystyle\int (2x+1)\operatorname{sen}(2x^2+2x)\,dx$

e) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{1-x}}\,dx$

f) $\displaystyle\int \frac{x+3}{4x^2+8}\,dx$

g) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} 2x + \cos x}{\cos x}\,dx$

h) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx$

a) $$\int \frac{x^3+4x^2-10x+7}{x^3-7x-6}\,dx = \int\left(1+\frac{2}{x-3}-\frac{5}{x+1}+\frac{7}{x+2}\right)dx =$$

$$= x + 2\ln|x-3| - 5\ln|x+1| + 7\ln|x+2| + k$$

b) $$\int \frac{1}{x^2-7x+10}\,dx = \int\left(\frac{1}{3(x-5)}-\frac{1}{3(x-2)}\right)dx = \frac{1}{3}\ln|x-5| - \frac{1}{3}\ln|x-2| + k$$

c) $$\int \frac{2^{3x}}{2^x-4}\,dx \underset{\substack{t=2^x\\ dt=2^x\ln 2\,dx}}{=} \frac{1}{\ln 2}\int \frac{t^3}{t-4}\,dt = \frac{1}{\ln 2}\int\left(t^2+4t+16+\frac{64}{t-4}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{\ln 2}\left(\frac{t^3}{3} + 2t^2 + 16t + 64\ln|t-4|\right) + k =$$

$$= \frac{1}{\ln 2}\left(\frac{2^{3x}}{3} + 2\cdot 2^{2x} + 16\cdot 2^x + 64\ln(2^x-4)\right) + k$$

d) $$\int (2x+1)\operatorname{sen}(2x^2+2x)\,dx = \frac{1}{2}\int (4x+2)\operatorname{sen}(2x^2+2x)\,dx =$$

$$= \frac{-\cos(2x^2+2x)}{2} + k$$

e) $$\int \frac{1}{x\sqrt{1-x}}\,dx \underset{\substack{t=\sqrt{1-x}\\ dt=\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}dx}}{=} \int \frac{-2}{1-t^2}\,dt = \int \frac{-1}{1-t}\,dt - \int \frac{1}{1+t}\,dt =$$

$$= \ln|1-t| - \ln|1+t| + k = \ln\left|1-\sqrt{1-x}\right| - \ln\left|1+\sqrt{1-x}\right| + k$$

f) $$\int \frac{x+3}{4x^2+8}\,dx = \frac{1}{8}\int \frac{2x}{x^2+2}\,dx + \frac{1}{4}\int \frac{3}{x^2+2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{8}\ln|x^2+2| + \frac{3}{4\sqrt{2}}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{x}{\sqrt{2}} + k$$

g) $$\int \frac{\mathrm{sen}\,2x+\cos x}{\cos x}\,dx = \int \frac{2\,\mathrm{sen}\,x\cos x+\cos x}{\cos x}\,dx = \int (2\,\mathrm{sen}\,x+1)\,dx =$$

$$= -2\cos x + x + k$$

h) $$\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx \underset{\substack{t=e^x\\ dt=e^x dx}}{=} \int \frac{t}{1+t}\,dt = \int 1\,dt - \int \frac{1}{1+t}\,dt =$$

$$= t - \ln|1+t| + k = e^x - \ln|1+e^x| + k$$

108 Calcula estas integrales.

a) $\displaystyle\int \mathrm{cosec}\,x\,dx$

b) $\displaystyle\int \sec x\,dx$

c) $\displaystyle\int e^{x^2-5x}(2x-5)\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{sen}\,x}{\sqrt{1+\cos x}}\,dx$

e) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}\,dx$

f) $\displaystyle\int \frac{1+e^{3x}}{e^{2x}}\,dx$

g) $\displaystyle\int \sqrt{e^x-1}\,dx$

h) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{sen}\,2x}{1+\cos^2 x}\,dx$

a) $$\int \mathrm{cosec}\,x\,dx = \int \frac{1}{\mathrm{sen}\,x}\,dx \underset{\substack{t=\cos x\\ dt=-\mathrm{sen}\,x\,dx}}{=} \int \frac{-1}{1-t^2}\,dt = -\frac{1}{2}\ln|1+t| + \frac{1}{2}\ln|1-t| + k =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|1+\cos x| + \frac{1}{2}\ln|1-\cos x| + k$$

b) $$\int \sec x\,dx = \int \frac{1}{\cos x}\,dx \underset{\substack{t=\cos x\\ dt=-\mathrm{sen}\,x\,dx}}{=} \int \frac{1}{1-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\ln|1+t| - \frac{1}{2}\ln|1-t| + k =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|1+\mathrm{sen}\,x| - \frac{1}{2}\ln|1-\mathrm{sen}\,x| + k$$

c) $\displaystyle\int e^{x^2-5x}(2x-5)\,dx = e^{x^2-5x} + k$

d) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{1+\cos x}}\,dx = -2\sqrt{1+\cos x} + k$

e) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}\,dx = \operatorname{arc\,sen}(\ln x) + k$

f) $\displaystyle\int \frac{1+e^{3x}}{e^{2x}}\,dx = \int \frac{1}{e^{2x}}\,dx + \int e^x dx = \frac{-e^{-2x}}{2} + e^x + k$

g) $\displaystyle\int \sqrt{e^x-1}\,dx \underset{\substack{t=e^x-1\\ dt=e^x dx}}{=} \int (t+1)\sqrt{t}\,dt = \frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + k =$

$\displaystyle= \sqrt{e^x-1}\left(\frac{2}{5}(e^x-1)^2 + \frac{2}{3}(e^x-1)\right) + k$

h) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{1+\cos^2 x}\,dx = \int \frac{2\operatorname{sen} x\cos x}{1+\cos^2 x}\,dx = -\int \frac{-2\operatorname{sen} x\cos x}{1+\cos^2 x}\,dx = -2\ln\left|1+\cos^2 x\right| + k$

109 **Calcula el resultado de las integrales.**

a) $\displaystyle\int (x-2)e^{3x}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{7}{x\sqrt[3]{\ln x}}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{(\ln x)^2 + x}{x}\,dx$

d) $\displaystyle\int (\ln x)^2\,dx$

e) $\displaystyle\int \frac{5e^{2x}-e^x}{e^{2x}-1}\,dx$

f) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x\,dx$

g) $\displaystyle\int \cos^2 x\,dx$

h) $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\cos x\,dx$

a) $\displaystyle\int (x-2)e^{3x}dx \underset{\substack{u=x-2\to du=dx\\ dv=e^{3x}dx\to v=\frac{e^{3x}}{3}}}{=} \frac{1}{3}(x-2)e^{3x} - \int \frac{e^{3x}}{3}\,dx = \frac{1}{3}(x-2)e^{3x} - \frac{e^{3x}}{9} + k$

b) $\displaystyle\int \frac{7}{x\sqrt[3]{\ln x}}\,dx = \frac{21}{2}\sqrt[3]{(\ln x)^2} + k$

c) $\displaystyle\int \frac{(\ln x)^2 + x}{x}\,dx = \int \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx + \int dx = \frac{(\ln x)^3}{3} + x + k$

d) $\displaystyle\int (\ln x)^2 dx \underset{\substack{u=\ln x\to du=\frac{dx}{x}\\ dv=\ln x\,dx\to v=x\ln x-x}}{=} (x\ln x - x)\ln x - \int (\ln x - 1)\,dx =$

$= (x\ln x - x)\ln x - x\ln x + 2x + k = x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + k$

e) $$\int \frac{5e^{2x}-e^{x}}{e^{2x}-1}\,dx \underset{\substack{t=e^{x}\\ dt=e^{x}dx}}{=} \int \frac{5t-1}{t^{2}-1}\,dt = \int \frac{2}{t-1}\,dt + \int \frac{3}{t+1}\,dt =$$

$$= 2\ln|t-1| + 3\ln|t+1| + k = 2\ln|e^{x}-1| + 3\ln|e^{x}+1| + k$$

f) $$\int sen^{2}x\,dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \frac{x}{2} - \frac{sen\,2x}{4} + k$$

g) $$\int \cos^{2}x\,dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = \frac{x}{2} + \frac{sen\,2x}{4} + k = \frac{x + sen\,x\cos x}{2} + k$$

h) $$\int sen\,x\cos x\,dx = \frac{sen^{2}x}{2} + k$$

110 Determina estas integrales.

a) $\int 2^{x}\cos x\,dx$

b) $\int \frac{\ln x+3}{x(\ln x-1)}\,dx$

c) $\int \cos(\ln x)\,dx$

d) $\int sen\sqrt{x}\,dx$

e) $\int sen^{2}x\cos x\,dx$

f) $\int sen^{3}x\cos x\,dx$

g) $\int sen^{3}x\,dx$

h) $\int \cos^{3}x\,dx$

a) $$\int 2^{x}\cos x\,dx \underset{\substack{u=2^{x}\to du=2^{x}\ln 2dx\\ dv=\cos x\,dx\to v=sen\,x}}{=} 2^{x}sen\,x - \ln 2\int 2^{x}sen\,x\,dx \underset{\substack{u=2^{x}\to du=2^{x}\ln 2\,dx\\ dv=sen\,x\,dx\to v=-\cos x}}{=} 2^{x}sen\,x + \ln 2\cdot 2^{x}\cos x - (\ln 2)^{2}\int 2^{x}\cos x\,dx$$

$$\int 2^{x}\cos x\,dx = \frac{2^{x}sen\,x + \ln 2\cdot 2^{x}\cos x}{1+(\ln 2)^{2}}$$

b) $$\int \frac{\ln x+3}{x(\ln x-1)}\,dx \underset{\substack{t=\ln x\\ dt=\frac{dx}{x}}}{=} \int \frac{t+3}{t-1}\,dt = t + 4\ln|t-1| + k = \ln|x| + 4\ln|\ln x - 1| + k$$

c) $$\int \cos(\ln x)dx \underset{\substack{t=\ln x\to x=e^{t}\\ dt=\frac{dx}{x}}}{=} \int e^{t}\cos t\,dt$$

$$\int e^{t}\cos t\,dt \underset{\substack{u=e^{t}\to du=e^{t}dt\\ dv=\cos t\,dt\to v=sen\,t}}{=} e^{t}sen\,t - \int e^{t}sen\,t\,dt \underset{\substack{u=e^{t}\to du=e^{t}dx\\ dv=sen\,t\,dt\to v=-\cos t}}{=} e^{t}sen\,t + e^{t}\cos t - \int e^{t}\cos t\,dt$$

$$\int \cos(\ln x)\,dx = \int e^{t}\cos t\,dt = \frac{e^{t}sen\,t + e^{t}\cos t}{2} + k = \frac{x\,sen(\ln x) + x\cos(\ln x)}{2} + k$$

d) $$\int sen\sqrt{x}\,dx \underset{\substack{t=\sqrt{x}\\ dt=\frac{dx}{2\sqrt{x}}}}{=} 2\int t\,sen\,t\,dt \underset{\substack{u=t\to du=dt\\ dv=sen\,t\,dt\to v=-cos\,t}}{=} 2\left(-t\cos t+\int \cos t\,dt\right)=$$
$$=-2t\cos t+2sen t+k=-2\sqrt{x}\,cos\sqrt{x}+2sen\sqrt{x}+k$$

e) $$\int sen^2 x\cos x\,dx=\frac{sen^3 x}{3}+k$$

f) $$\int sen^3 x\cos x\,dx=\frac{sen^3 x}{4}+k$$

g) $$\int sen^3 x\,dx=\int(1-cos^2 x)\,sen\,x\,dx=\int sen\,x\,dx-\int cos^2 x\,sen\,x\,dx=$$
$$=-cos\,x+\frac{cos^3 x}{3}+k$$

h) $$\int cos^3 x\,dx=\int(1-sen^2 x)\cos x\,dx=\int \cos x\,dx-\int sen^2 x\cos x\,dx=$$
$$=sen\,x-\frac{sen^3 x}{3}+k$$

111 Calcula:

a) $\int x\ sen\ (\ln x)\ dx$

b) $\int tg\ x\ sec^2\ x\ dx$

c) $\int \frac{cos^3 x}{sen\ x}\,dx$

d) $\int (cos^2\ x-sen\ x\ cos^2\ x)\ dx$

e) $\int \frac{cos\ x-sen\ x}{2}\,dx$

f) $\int \frac{cos^2\ x\ sen\ x+cos\ x\ sen^2\ x}{sen\ x}\,dx$

a) $$\int x\ sen\,(\ln x)\,dx \underset{\substack{u=sen\,(\ln x)\to du=\frac{cos\,(\ln x)}{x}dx\\ dv=x\,dx\to v=\frac{x^2}{2}dx}}{=} \frac{x^2}{2}sen\,(\ln x)-\frac{1}{2}\int x\cos(\ln x)\,dx \underset{\substack{u=cos\,(\ln x)\to du=\frac{-sen\,(\ln x)}{x}dx\\ dv=x\,dx\to v=\frac{x^2}{2}dx}}{=}$$
$$=\frac{x^2}{2}sen\,(\ln x)-\frac{x^2}{4}cos\,(\ln x)-\frac{1}{4}\int x\,sen\,(\ln x)\,dx$$
$$\frac{5}{4}\int x\,sen\,(\ln x)\,dx=\frac{x^2}{2}sen\,(\ln x)-\frac{x^2}{4}cos\,(\ln x)+k$$
$$\to\int x\,sen\,(\ln x)\,dx=\frac{2x^2 sen\,(\ln x)-x^2 cos\,(\ln x)}{5}+k$$

b) $$\int tg\,x\sec^2 x\,dx=\int\frac{sen\,x}{cos^3 x}\,dt=\frac{1}{2cos^2 x}+k$$

c) $$\int\frac{cos^3 x}{sen\,x}\,dx \underset{\substack{t=sen\,x\\ dt=cos\,x\,dx}}{=} \int\frac{(1-t^2)}{t}\,dt=\ln|t|-\frac{t^2}{2}+k=\ln|sen\,x|-\frac{sen^2 x}{2}+k$$

d) $\int (\cos^2 x - \operatorname{sen} x \cos^2 x)\,dx = \int \cos^2 x\,dx - \int \operatorname{sen} x \cos^2 x\,dx =$

$$= \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx - \int \operatorname{sen} x \cos^2 x\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + \frac{-\cos^3 t}{3} + k$$

e) $\int \frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{2}\,dx = \int \frac{\cos x}{2}\,dx - \int \frac{\operatorname{sen} x}{2}\,dx = \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{2} + k$

f) $\int \frac{\cos^2 x \operatorname{sen} x + \cos x \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x}\,dx = \int (\cos^2 x + \cos x \operatorname{sen} x)\,dx =$

$$= \int \cos^2 x\,dx + \int \cos x \operatorname{sen} x\,dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx + \int \cos x \operatorname{sen} x\,dx =$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} + k$$

112 Hallar todas las funciones f cuya derivada es $f'(x) = \frac{x^4 + x + 1}{x^2 + x}$.

(Aragón. Junio 2001. Opción B. Cuestión 4)

$$f(x) = \int \frac{x^4 + x + 1}{x^2 + x}\,dx = \int \left(x^2 - x + 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + \ln|x| - \ln|x+1| + k$$

113 Obtener razonadamente la siguiente integral:

$$\int \frac{4x - 11}{(x+1)^2 + 1}\,dx$$

(C. Valenciana. Septiembre 2004. Ejercicio B. Problema 3)

$$\int \frac{4x - 11}{(x+1)^2 + 1}\,dx \underset{\substack{t = x+1 \\ dt = dx}}{=} \int \frac{4t - 15}{t^2 + 1}\,dt = \int \frac{4t}{t^2+1}\,dt - \int \frac{15}{t^2+1}\,dt =$$

$$= 2\ln|t^2 + 1| - 15 \operatorname{arc\,tg} t + k = 2\ln|(x+1)^2 + 1| - 15 \operatorname{arc\,tg}(x+1) + k$$

114 Dadas las funciones reales $f(x) = 4x^2 + 2x + 10$ y $g(x) = x^3 + x^2 + 5x + 5$.

Calcular la función $H(x) = \int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx$ que cumple $H(0) = 0$.

(C. Valenciana. Septiembre 2007. Bloque 3. Problema 1)

$$H(x) = \int \frac{4x^2 + 2x + 10}{x^3 + x^2 + 5x + 5}\,dx = \int \left(\frac{2}{x+1} + \frac{2x}{x^2+5} \right) dx =$$

$$= 2\ln|x+1| + \ln|x^2 + 5| + k$$

$$H(0) = 0 \rightarrow \ln 5 + k = 0 \rightarrow k = -\ln 5 \rightarrow H(x) = 2\ln(x+1) + \ln(x^2+5) - \ln 5$$

115 Calcula la integral $\int \frac{2x^3 - 9x^2 + 9x + 6}{x^2 - 5x + 6}\,dx$.

(Castilla-La Mancha. Junio 2008. Bloque 2. Pregunta A)

$$f(x) = \int \frac{2x^3 - 9x^2 + 9x + 6}{x^2 - 5x + 6}\,dx = \int \left(2x + 1 + \frac{6}{x-3} - \frac{4}{x-2}\right) dx =$$
$$= x^2 + x + 6 \ln|x-3| - 4 \ln|x-2| + k$$

116 Calcular la siguiente primitiva: $\int \frac{1}{x^2 - (a+1)x + a}\,dx$ donde se supone que a no es cero.

(País Vasco. Junio 2008. Bloque D. Cuestión D)

- Si $a \neq 1$:

$$\int \frac{1}{x^2 - (a+1)x + a}\,dx = \int \left(\frac{\frac{1}{1-a}}{x-1} + \frac{\frac{1}{a-1}}{x-a}\right) dx = \int \frac{1}{a-1}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-1}\right) dx =$$
$$= \frac{1}{a-1}\left(\ln|x-a| - \ln|x-1|\right) + k$$

- Si $a = 1$:

$$\int \frac{1}{x^2 - 2x + 1}\,dx = \int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = -\frac{1}{2(x-1)} + k$$

117 Calcula $\int \frac{x^3 + 2x^2 - 2x + 3}{x^2 - 1}\,dx$.

(Andalucía. Año 2002. Modelo 1. Opción B. Ejercicio 2)

$$\int \frac{x^3 + 2x^2 - 2x + 3}{x^2 - 1}\,dx = \int \left(x + 2 - \frac{3}{x+1} + \frac{2}{x-1}\right) dx =$$
$$= \frac{x^2}{2} + 2x - 3 \ln|x+1| + 2 \ln|x-1| + k$$

118 Resuelve $\int \frac{x^2 - 2}{x^3 - 3x + 2}\,dx$.

(Castilla-La Mancha. Septiembre 2002. Bloque 2. Pregunta A)

$$\int \frac{x^2 - 2}{x^3 - 3x + 2}\,dx = \int \left(\frac{7}{9} \cdot \frac{1}{(x-1)} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{(x+2)}\right) dx =$$
$$= \frac{7}{9} \ln|x-1| + \frac{1}{3(x-1)} + \frac{2}{9} \ln|x+2| + k$$

119 Resuelve $\int \frac{x^2 - 1}{x(x^2 + 1)}\,dx$.

(Castilla-La Mancha. Junio 2001. Bloque 2. Pregunta A)

$$\int \frac{x^2 - 1}{x(x^2 + 1)}\,dx = \int \left(\frac{2x}{x^2 + 1} - \frac{1}{x}\right) dx = \ln|x^2 + 1| - \ln|x| + k$$

120 ¿Existe alguna primitiva de la función $f(x) = x^{-1}$ que no tome ningún valor positivo en el intervalo $1 \leq x \leq 2$?

(Extremadura. Junio 2004. Repertorio A. Ejercicio 1)

Las primitivas de $f(x) = x^{-1}$ son: $F(x) = \int x^{-1}dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + k$

Por ser $F(x)$ una función creciente en $(1, 2) \rightarrow 1 \leq x \leq 2 \rightarrow k \leq F(x) \leq \ln 2 + k$

Para que $F(x)$ no tome valores positivos $\rightarrow \ln 2 + k \leq 0 \rightarrow k \leq -\ln 2$.

La función primitiva $F(x) = \ln|x| + k$ toma valores no positivos en el intervalo $[1, 2]$ cuando $k \leq -\ln 2$.

121 Resuelve $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^3 + x^2 - 6x}\,dx$.

(Castilla-La Mancha. Junio 2000. Bloque 2. Pregunta A)

$$\int \frac{x+1}{x^3 + x^2 - 6x}\,dx = \int\left(\frac{3}{10(x-2)} - \frac{1}{6x} + \frac{2}{15(x+3)}\right)dx =$$
$$= \frac{3}{10}\ln|x-2| - \frac{1}{6}\ln|x| + \frac{2}{15}\ln|x+3| + k$$

122 Resuelve $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^3 - 4x^2 + 4x}\,dx$.

(Castilla-La Mancha. Septiembre 2001. Bloque 4. Pregunta A)

$$\int \frac{x+2}{x^3 - 4x^2 + 4x}\,dx = \int\left(\frac{2}{(x-2)^2} - \frac{1}{2(x-2)} + \frac{1}{2x}\right)dx =$$
$$= \frac{-2}{x-2} - \frac{1}{2}\ln|x-2| + \frac{\ln|x|}{2} + k$$

123 Calcular las siguientes integrales.

a) $\displaystyle\int (2x - 1)\ln x\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{1-x}{1+4x^2}\,dx$

(Canarias. Septiembre 2008. Bloque 2. Opción B)

a) $$\int (2x-1)\ln x\,dx = (x^2 - x)\ln x - \int (x-1)\,dx = (x^2 - x)\ln x - \frac{x^2}{2} + x + k$$

b) $$\int \frac{1-x}{1+4x^2}\,dx = \int\left(\frac{1}{1+(2x)^2} - \frac{x}{1+4x^2}\right)dx = \frac{\operatorname{arc\,tg} 2x}{2} - \frac{\ln|1+4x^2|}{8} + k$$

124 Calcular la integral $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x^2+1}\,dx$.

(Murcia. Septiembre 2008. Bloque 4. Cuestión A)

$$\int \frac{x^3+1}{x^2+1}\,dx = \int\left(x - \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}\right)dx = \frac{x^2}{2} - \frac{\ln|1+x^2|}{2} + \operatorname{arc\,tg}\,x + k$$

125 Calcular la integral $\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx$.

(Castilla y León. Junio 2008. Prueba A. Problema 2)

$$\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + k = -\frac{1+\ln x}{x} + k$$

$$u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x}\,dx$$
$$dv = \frac{1}{x^2}\,dx \rightarrow v = \frac{-1}{x}$$

PREPARA TU SELECTIVIDAD

1 Dada la función $f(x) = \frac{x}{\sqrt{5x^2-4}}$:

a) Calcula la integral $\int f(x)\,dx$. b) Halla la primitiva F de f que cumple que $F(1) = 1$.

(Cataluña. Septiembre 2005. Cuestión 2)

a) $F(x) = \int f(x)\,dx = \int \frac{x}{\sqrt{5x^2-4}}\,dx = \frac{1}{10}\int \frac{10x}{\sqrt{5x^2-4}}\,dx = \frac{1}{5}\left(\sqrt{5x^2-4}\right) + k$

b) $F(1) = 1 \rightarrow \frac{1}{5} + k = 1 \rightarrow k = \frac{4}{5} \rightarrow F(x) = \frac{1}{5}\left(\sqrt{5x^2-4}\right) + \frac{4}{5}$

2 Determina $f(x)$ sabiendo que $f'''(x) = 24x$; $f''(0) = 2$; $f'(0) = 1$ y $f(0) = 0$.

(Castilla-La Mancha. Junio 2005. Bloque 1. Pregunta B)

$$f'''(x) = 24x \rightarrow f''(x) = \int 24x\,dx = 12x^2 + k_1$$

Como $f''(0) = 2 \rightarrow k_1 = 2 \rightarrow f''(x) = 12x^2 + 2$

$$f''(x) = 12x^2 + 2 \rightarrow f'(x) = \int (12x^2+2)dx = 4x^3 + 2x + k_2$$

Como $f'(0) = 1 \rightarrow k_2 = 1 \rightarrow f'(x) = 4x^3 + 2x + 1$

$$f'(x) = 4x^3 + 2x + 1 \rightarrow f(x) = \int (4x^3+2x+1)\,dx = x^4 + x^2 + x + k_3$$

Como $f(0) = 0 \rightarrow k_3 = 0 \rightarrow f(x) = x^4 + x^2 + x$

3 Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = (x-1)e^{2x}$. Calcula la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(1, e^2)$.

(Andalucía. Año 2004. Modelo 3. Opción B. Ejercicio 2)

$$F(x) = \int (x-1)e^x dx = (x-1)e^x - \int e^x dx = (x-1)e^x - e^x + k = (x-2)e^x + k$$

$$u = x-1 \rightarrow du = dx$$
$$dv = e^x dx \rightarrow v = e^x$$

$$F(1) = e^2 \rightarrow -e + k = e^2 \rightarrow k = e^2 + e \rightarrow F(x) = (x-2)e^x + e^2 + e$$

4 Dada la función f: $[1, e] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$, calcúlese una función primitiva de $f(x)$ que pase por el punto $P(e, 2)$.

(Castilla y León. Septiembre 2004. Prueba B. Problema 2)

$$F(x) = \int\left(\frac{1}{x} + \ln x\right) dx = \int \frac{1}{x}\, dx + \int \ln x\, dx = \ln|x| + x\ln|x| - x + k$$

$$u = \ln x \to du = \frac{1}{x}\, dx$$
$$dv = dx \to v = x$$

$$F(e) = 2 \to 1 + k = 2 \to k = 1 \to F(x) = F(x) = \ln|x| + x\ln|x| - x + 1$$

5 Dada la función f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \text{Ln}\,(1 + x^2)$, halla la primitiva de f cuya gráfica pasa por el origen de coordenadas (Ln denota la función logaritmo neperiano).

(Andalucía. Junio 2007. Opción B. Ejercicio 2)

$$F(x) = \int \ln(1 + x^2)\, dx = x\ln(1 + x^2) - \int \frac{2x^2}{1 + x^2}\, dx =$$

$$u = \ln(1 + x^2) \to du = \frac{2x}{1 + x^2}\, dx$$
$$dv = dx \to v = x$$

$$= x\ln(1 + x^2) - \int\left(2 - \frac{2}{1 + x^2}\right) dx = x\ln(1 + x^2) - 2x + 2\,\text{arc tg}\,x + k$$

$$F(0) = 0 \to k = 0 \to F(x) = x\ln(1 + x^2) - 2x + 2\,\text{arc tg}\,x$$

6 Hallar una primitiva de la función $f(x) = xe^x$.

(Extremadura. Junio 2006. Repertorio B. Ejercicio 2)

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + k$$

$$u = x \to du = dx$$
$$dv = e^x dx \to v = e^x$$

7 Calcula la siguiente integral: $\int \frac{x}{(x+1)^3}\, dx$

(Castilla-La Mancha. Septiembre 2007. Bloque 2. Pregunta A)

$$\int \frac{x}{(x+1)^3}\, dx = \int\left(\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)^3}\right) dx = -\frac{1}{(x+1)} + \frac{1}{2\,(x+1)^2} + k$$

8 Resolver $\int \frac{2x}{x^3 - 3x^2 - x + 3}\, dx$.

(Canarias. Septiembre 2006. Opción A. Cuestión 1)

$$\int \frac{2x}{x^2 + 4x + 3}\, dx = \int\left(-\frac{1}{x+1} + \frac{3}{x+3}\right) dx = -\ln|x+1| + 3\ln|x+3| + k$$

9 Calcular la primitiva que sigue:

$$\int \frac{x^3 + x^2 + 1}{x^2 - 4}\, dx$$

(País Vasco. Julio 2007. Bloque D. Cuestión D)

$$\int \frac{x^3 + x^2 + 1}{x^2 - 4}\, dx = \int \left(x + 1 + \frac{13}{4} \cdot \frac{1}{x-2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{x+2} \right) dx =$$
$$= \frac{x^2}{2} + x + \frac{13}{4} \ln|x-2| + \frac{3}{4} \ln|x+2| + k$$

10 Calcule $\displaystyle\int \frac{x+5}{x^2 + 4x + 3}\, dx$.

(Galicia. Junio 2008. Bloque 3. Opción 2)

$$\int \frac{x+5}{x^2 + 4x + 3}\, dx = \int \left(\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x+3} \right) dx = 2 \ln|x+1| - \ln|x+3| + k$$

11 Utilizando el cambio de variable $t = \ln x$, calcular $\displaystyle\int \frac{\ln(\ln x)}{x \ln x}\, dx$.

(Aragón. Septiembre 2006. Opción B. Cuestión 2)

$$\int \frac{\ln(\ln x)}{x \ln x}\, dx \underset{\substack{t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x} dx}}{=} \int \frac{\ln t}{t}\, dt = \frac{(\ln t)^2}{2} + k = \frac{(\ln(\ln x))^2}{2} + k$$

12 Dados a y b dos números reales, calcula la integral indefinida:

$$\int \frac{\text{sen } x}{(a + b \cos x)^2}\, dx$$

Presta atención a las posibilidades $a = 0$ o $b = 0$.

(La Rioja. Septiembre 2004. Propuesta B. Ejercicio 5)

- Si $a \neq 0$ y $b \neq 0$: $\displaystyle\int \frac{\text{sen } x}{(a + b\cos x)^2}\, dx = -\frac{1}{b(a + b\cos x)} + k$
- Si $a = 0$ y $b \neq 0$: $\displaystyle\int \frac{\text{sen } x}{b\cos^2 x}\, dx = -\frac{1}{b\cos x} + k$
- Si $a \neq 0$ y $b = 0$: $\displaystyle\int \frac{\text{sen } x}{a^2}\, dx = -\frac{\cos x}{a^2} + k$
- a y b no pueden ser 0 simultáneamente, pues no existiría la función que tenemos que integrar.