10 Representación de funciones

LITERATURA Y MATEMÁTICAS

Nubosidad variable

A ella le gustaba inventar palabras y desmontar las que oía por primera vez, hacer combinaciones con las piezas resultantes, separar y poner juntas las que se repetían. Las palabras un poco largas eran como vestidos con corpiño, chaleco y falda, y se le podía poner el chaleco de una a la falda de otra con el mismo corpiño, o al revés, que fuera la falda lo que cambiase. Alternando la «f» y la «g», por ejemplo, salían diferentes modalidades de paz, de muerte, de santidad y de testimonio: pacificar y apaciguar, mortificar y amortiguar, santificar y santiguar, testificar y atestiguar; era un juego bastante divertido para hacerlo con diccionario. Algunos corpiños como «filo», que quería decir amistad y «logos», que quería decir palabra, abrigaban mucho y permitían variaciones muy interesantes. Ella un día los puso juntos y resultó un personaje francamente seductor: el filólogo o amigo de las palabras. Lo dibujó en un cuaderno tal como se lo imaginaba, con gafas color malva, un sombrero puntiagudo y en la mano un cazamariposas grande por donde entraban frases en espiral a las que pintó alas. Luego vino a saber que la palabra «filólogo» ya existía, que no la había inventado ella.

–Pero da igual, lo que ha hecho usted es entenderla y aplicársela –le dijo don Pedro Larroque, el profesor de Literatura–. No deje nunca el cazamariposas. Es uno de los entretenimientos más sanos: atrapar palabras y jugar con ellas. […]

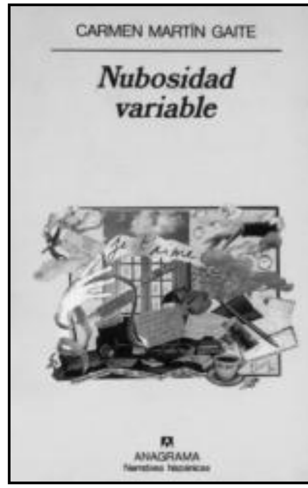
A1 profesor de Matemáticas, en cambio, no le divertían nada estos juegos de palabras, le parecían una desatención a los problemas serios, una manipulación peligrosa del dos y dos son cuatro, una pérdida de tiempo. Cuando un buen día, sin más preámbulo, empezó a hablar de logaritmos, hubo en clase una interrupción inesperada y un tanto escandalosa. La niña del cazamariposas se había puesto de pie para preguntar si aquello, que oía por primera vez, podía significar una mezcla de palabra y ritmo. Las demás alumnas se quedaron con la boca abierta y el profesor se enfadó.

–No hace al caso, señorita Montalvo. Está usted siempre en las nubes –dijo con gesto severo–. Le traería más cuenta atender.

La niña rubia, que ya estaba empezando a pactar con la realidad y a enterarse de que las cosas que traen cuenta para unos no la traen para otros, se sentó sin decir nada más y apuntó en su cuaderno: «Logaritmo: palabra sin ritmo y sin alas. No trae cuenta».

CARMEN MARTÍN GAITE

Nubosidad variable
Carmen Martín Gaite



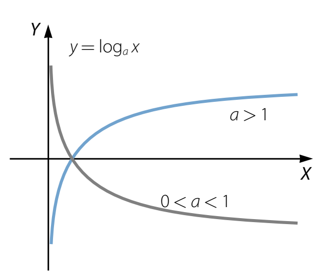
Sofía, la protagonista y narradora de esta novela, es una mujer madura que buscando un documento que le había pedido su marido Lorenzo, encuentra de pronto el libro escolar con las calificaciones del instituto y eso le hace recordar algunas vivencias de aquellos días y reflexionar sobre la trayectoria que ha seguido su vida. Para ella, «los números eran un mero dibujo inalterable y los nombres que los designaban no daban pie a la fantasía». ¿Qué queda de aquella experiencia escolar?

Yo ahora, si digo «logaritmo», «guarismo», «raíz cuadrada» o «ecuación», veo bastoncitos grises y articulados que reptan por la alfombra como una procesión de gusanos. Y no se atreve uno a tocarlos. Unidades, decenas, centenas, millares, pi, tres-catorce-dieciséis. Dan grima. Se enredan unos con otros, se arremolinan en mi costado izquierdo (porque ya, vencida, me he tumbado en la alfombra), y los miro de reojo, llena de aprensión, avanzar camino abajo, sortear mi cintura, contornear mis piernas. Desplazarme tampoco puedo: estoy cercada. Descubro que hay otra procesión de gusanos, igualmente nutrida, que baja por la derecha más aprisa. Éstos son verdes y, al llegarme a los pies, dan la vuelta y confunden su caudal con el del bando gris. Pero es un error óptico. Pesan más que la alfombra, y entre todos impiden que levante el vuelo. No me dejan olvidar que están ahí.

Los gusanos verdes son las horas muertas, las horas podridas de mi vida entera, horas gastadas en sortear los escollos de la realidad para lograr aprobar materias que no me acuerdo de qué trataban, en las que ni siquiera me doy por examinada, a pesar de haber lidiado tanto con ellas. Porque lo único que sé de esas asignaturas es que siempre hay que estar haciéndoles frente como si fuera la primera vez, y el miedo a suspenderlas sigue siendo el mismo. Muy parecido, además, al miedo de haber perdido los papeles donde pudiera constar que se han aprobado. Se estudiaban para la nota. No eran optativas. Aprobado en hija de familia. Aprobado en noviazgo. Aprobado en economía doméstica. Aprobado en trato conyugal y en deberes para con la parentela política. Aprobado en partos. Aprobado en suavizar asperezas, en buscar un sitio para cada cosa y en poner a mal tiempo buena cara. Aprobado en maternidad activa, aunque esta asignatura, por ser la más difícil, está sometida a continua revisión. Tales materias, sobre todo la última, pueden llegar a ser apasionantes. Depende de cómo se tomen. Pero se parecen a los problemas de logaritmos en una cosa: en que de una vez para otra ya no se sabe cómo se resolvieron, ni por qué los tenía uno que resolver.

Aunque ese profesor no quisiera explicar la etimología de las palabras que designan conceptos matemáticos, todas tienen su justificación. Busca en un diccionario la etimología de «logaritmo» y ayuda a la protagonista a cazar visualmente este concepto, dibujando la gráfica de una función logarítmica.

La palabra logaritmo se debe a John Napier y está formada por las palabras griegas *λογος (logos),* que significa *razón o cociente*, y *αριθμος (arithmos), número*, y se define, así como *un número que indica una relación o proporción.*



Representación de funciones

ANTES DE COMENZAR… RECUERDA

001 Calcula estos límites.

a) $\lim_{x\to+\infty} (x^3 - 2x + 7)$ c) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x}$ e) $\lim_{x\to+\infty} 8^{\frac{x^3 - x}{x+1}}$

b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 - 2x + 7}{x^2 + 3x}$ d) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 + x - 2}{x^5 + x^2}$ f) $\lim_{x\to+\infty} (x^3 - 1)^{\frac{x^2 - 1}{x}}$

a) $\lim_{x\to+\infty} (x^3 - 2x + 7) = +\infty$

b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 - 2x + 7}{x^2 + 3x} = +\infty$

c) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x} = 1$

d) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 + x - 2}{x^5 + x^2} = 0$

e) $\lim_{x\to+\infty} 8^{\frac{x^3 - x}{x+1}} = +\infty$

f) $\lim_{x\to+\infty} (x^3 - 1)^{\frac{x^2 - 1}{x}} = +\infty$

002 Estudia la continuidad y clasifica los puntos de discontinuidad de esta función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x - 1} & \text{si } x < 2 \\ x^2 - x + 7 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

- Si $x < 2$: $\frac{x^2}{x - 1}$ → Función racional, no definida en $x = 1$.
- Si $x \geq 2$: $x^2 - x + 7$ → Función polinómica, definida en $\mathbb{R}$.

Así, $f(x)$ está definida y es continua en $\mathbb{R} - \{1, 2\}$. Estudiamos la continuidad en $x = 1$ y en $x = 2$:

- Si $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2}{x - 1} = +\infty \\ \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2}{x - 1} = -\infty \end{array}\right\} \to \text{Discontinuidad de salto infinito}$$

- Si $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2}{x - 1} = \frac{4}{1} = 4 \\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (x^2 - x + 7) = 4 - 2 + 7 = 9 \end{array}\right\} \to \text{Discontinuidad de salto finito}$$

ACTIVIDADES

001 Determina el dominio y los puntos de corte con los ejes de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 16}$ b) $f(x) = sen\ x$

a) $f(x)$ está definida si $x^2 - 16 \geq 0 \to (x - 4)(x + 4) \geq 0$
$\to x \in (-\infty, -4] \cup [4, +\infty) \to \text{Dom } f = (-\infty, -4] \cup [4, +\infty)$

- Cortes con el eje X: $\sqrt{x^2 - 16} = 0 \to x^2 = 16 \to x = \pm 4 \to (-4, 0), (4, 0)$
- Corte con el eje Y: no tiene ya que $x = 0$ no está en el dominio.

b) Dom $f = \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X:

  $sen\, x = 0 \rightarrow x = 0 + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z} \rightarrow (0 + k\pi, 0)$ con $k \in \mathbb{Z}$

- Corte con el eje Y:

  $x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$

002 **Halla el dominio y los puntos de corte con los ejes.**

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 81}{x - 7}$

b) $f(x) = \log (x + 8)$

a) Dom $f = \mathbb{R} - \{7\}$

- Cortes con el eje X:

  $\dfrac{x^2 - 81}{x - 7} = 0 \rightarrow x^2 = 81 \rightarrow x = \pm 9 \rightarrow (-9, 0), (9, 0)$

- Corte con el eje Y:

  $x = 0 \rightarrow y = \dfrac{-81}{-7} = \dfrac{81}{7} \rightarrow \left(0, \dfrac{81}{7}\right)$

b) $f(x)$ está definida cuando $x + 8 > 0 \rightarrow x > -8 \rightarrow$ Dom $f = (-8, +\infty)$

- Cortes con el eje X:

  $\log (x + 8) = 0 \rightarrow x + 8 = 10^0 = 1 \rightarrow x = -7 \rightarrow (-7, 0)$

- Corte con el eje Y:

  $x = 0 \rightarrow y = \log 8 \rightarrow (0, \log 8)$

003 **Estudia la simetría de las siguientes funciones.**

a) $f(x) = \sqrt{2x^2 - 25}$ **b)** $f(x) = -x^2 - 27$

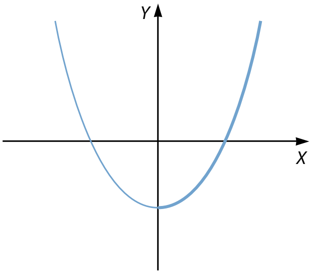
a) $f(-x) = \sqrt{2(-x)^2 - 25} = \sqrt{2x^2 - 25} = f(x) \rightarrow f(x)$ es simétrica respecto al eje Y.

b) $f(-x) = -(-x)^2 - 27 = -x^2 - 27 = f(x) \rightarrow f(x)$ es simétrica respecto al eje Y.

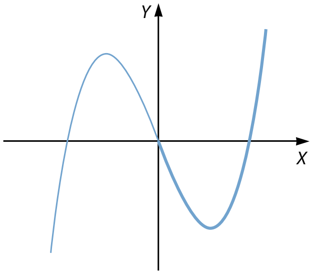
004 **Dibuja la gráfica de una función que sea:**

a) Par. **b)** Impar.

a)



b)



005 **Determina el período de las siguientes funciones.**

a) $f(x) = cos\ x$ **b)** $f(x) = sen\ 2x$

a)

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π	$\frac{7\pi}{2}$	4π	$\frac{9\pi}{2}$	5π
$f(x)$	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1	0	-1

La función se repite con período 2π: $cos\ x = cos\ (x + 2k\pi),\ \forall k \in \mathbb{Z}$

b)

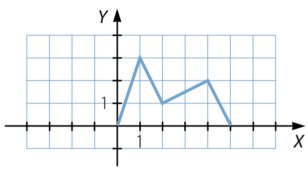
x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π	$\frac{9\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{2}$
$f(x)$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1	0

La función se repite con período π: $sen\ 2x = sen\ (2x + k\pi),\ \forall k \in \mathbb{Z}$

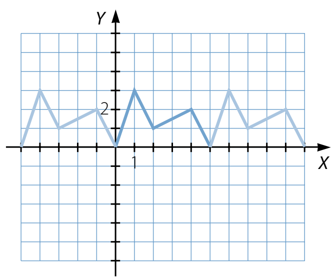
006 **La función que a cada número le asocia su parte decimal, ¿es periódica? Si es así, ¿cuál es el período?**

Una función que a cada número le asocia su parte decimal es periódica de período 1.

007 **Representa una función periódica a partir de esta.**



¿Cuál es el período?



El período de esta función es 5.

008 **Escribe una función que tenga como asíntotas verticales las rectas cuyas ecuaciones son:**

a) $x = 4$ y $x = -2$ **b)** $x = 1$ y $x = 0$

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $f(x) = \dfrac{5}{(x-4)(x+2)}$ b) $f(x) = \dfrac{6x+3}{x(x-1)}$

009 Halla las asíntotas verticales de las funciones.

a) $f(x) = \log(x^2 - 16)$ b) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$

a) $x^2 - 16 \geq 0 \rightarrow (x-4)(x+4) \geq 0 \rightarrow x \in (-\infty, -4] \cup [4, +\infty)$
Así, tenemos que: $\text{Dom } f = (-\infty, -4] \cup [4, +\infty)$

$\lim\limits_{x \to -4^-} \log(x^2 - 16) = -\infty \rightarrow$ Asíntota vertical: $x = -4$

$\lim\limits_{x \to 4^+} \log(x^2 - 16) = -\infty \rightarrow$ Asíntota vertical: $x = 4$

b) $x - 1 = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{1\}$

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2}{x-1} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical: $x = 1$

010 Estudia si las siguientes funciones tienen asíntotas horizontales.

a) $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$ b) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{e^x + 1} = 1 \rightarrow$ Asíntota horizontal: $y = 1$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x}{e^x + 1} = \dfrac{0}{0+1} = 0 \rightarrow$ Asíntota horizontal: $y = 0$

b) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x-1} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{x-1} = -\infty \end{array}\right\} \rightarrow f(x)$ no tiene asíntotas horizontales.

011 Determina la situación de la gráfica respecto de las asíntotas horizontales de estas funciones.

a) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^4 + 3}}$ b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^4 + 3}} = 1 \rightarrow$ Asíntota horizontal: $y = 1$

- Si $x \rightarrow +\infty \rightarrow \dfrac{x^2}{\sqrt{x^4 + 3}} - 1 < 0 \rightarrow f(x)$ está por debajo de la asíntota.
- Si $x \rightarrow -\infty \rightarrow \dfrac{x^2}{\sqrt{x^4 + 3}} - 1 < 0 \rightarrow f(x)$ está por debajo de la asíntota.

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{x^2 - 1} = 0 \rightarrow$ Asíntota horizontal: $y = 0$

- Si $x \rightarrow +\infty \rightarrow \dfrac{x}{x^2 - 1} - 0 > 0 \rightarrow f(x)$ está por encima de la asíntota.
- Si $x \rightarrow -\infty \rightarrow \dfrac{x}{x^2 - 1} - 0 < 0 \rightarrow f(x)$ está por debajo de la asíntota.

012 Estudia si las siguientes funciones tienen asíntotas oblicuas.

a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$ b) $f(x) = \dfrac{-x^2+3}{x+2}$

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{x(x-1)} = 1 \neq 0 \to m = 1$

$\lim\limits_{x\to\infty} \big(f(x) - mx\big) = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2}{x-1} - x\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2 - x^2 + x}{x-1}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x-1} = 1 \to n = 1$

$\to$ Asíntota oblicua: $y = mx + n \to y = x + 1$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-x^2+3}{x(x+2)} = -1 \neq 0 \to m = -1$

$\lim\limits_{x\to\infty} \big(f(x) - mx\big) = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{-x^2+3}{x+2} + x\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-x^2+3+x^2+2x}{x+2} =$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3+2x}{x+2} = 2 \to n = 2$

$\to$ Asíntota oblicua: $y = mx + n \to y = -x + 2$

013 Determina la situación de la gráfica respecto de las asíntotas oblicuas de estas funciones.

a) $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x-1}$ b) $f(x) = \sqrt{x^2+5}$

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+2}{x(x-1)} = 1 \neq 0 \to m = 1$

$\lim\limits_{x\to\infty} \big(f(x) - mx\big) = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2+2}{x-1} - x\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+2}{x-1}\right) = 1 \to n = 1$

$\to$ Asíntota oblicua: $y = mx + n \to y = x + 1$

$f(x) - (mx+n) = \dfrac{x^2+2}{x-1} - x - 1 = \dfrac{3}{x-1}$

- Si $x \to +\infty \to \dfrac{3}{x-1} > 0 \to f(x)$ está por encima de la asíntota.
- Si $x \to -\infty \to \dfrac{3}{x-1} < 0 \to f(x)$ está por debajo de la asíntota.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+5}}{x} = 1 \neq 0 \to m = 1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \big(f(x) - mx\big) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+5} - x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+5-x^2}{\sqrt{x^2+5}+x} =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5}{\sqrt{x^2+5}+x} = 0$

$\to$ Asíntota oblicua: $y = x$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+5}}{x}=-1\neq 0\to m=-1\\ \lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-mx)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+5}+x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+5-x^2}{\sqrt{x^2+5}-x}=\\ \qquad=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5}{\sqrt{x^2+5}-x}=0\end{array}\right\}$$

$\rightarrow$ Asíntota oblicua: $y=-x$

- Si $x\rightarrow+\infty\rightarrow\dfrac{5}{\sqrt{x^2+5}+x}>0\rightarrow f(x)$ está por encima de la asíntota $y=x$.
- Si $x\rightarrow-\infty\rightarrow\dfrac{5}{\sqrt{x^2+5}-x}>0\rightarrow f(x)$ está por encima de la asíntota $y=-x$.

014 **Estudia si estas funciones presentan ramas parabólicas.**

a) $f(x)=x^4-x^3+4$ b) $g(x)=x\ln x$

a) Función polinómica $\rightarrow$ Dom $f=\mathbb{R}\rightarrow$ No tiene asíntotas verticales.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}(x^4-x^3+4)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}(x^4-x^3+4)=+\infty\end{array}\right\}\rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4-x^3+4}{x}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^4-x^3+4}{x}=-\infty\end{array}\right\}\rightarrow \text{No tiene asíntotas oblicuas.}$$

Por tanto, la función tiene ramas parabólicas cuando $x\rightarrow+\infty$ y $x\rightarrow-\infty$.

b) Dom $g=(0,+\infty)$

$$\lim_{x\to 0^+}x\ln x\rightarrow 0\cdot\infty\rightarrow\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\rightarrow\frac{\infty}{\infty}\xrightarrow{\text{L'Hôpital}}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0$$

$\rightarrow$ No tiene asíntotas verticales.

$\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln x=+\infty\rightarrow$ No tiene asíntotas horizontales.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty\rightarrow$ No tiene asíntotas oblicuas.

Por tanto, la función tiene una rama parabólica cuando $x\rightarrow+\infty$.

015 **Determina las ramas infinitas de $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$.**

Dom $f=\mathbb{R}\rightarrow$ No tiene asíntotas verticales.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x^2+1}=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x^2+1}=0\end{array}\right\}\rightarrow \text{Asíntota horizontal: } y=0$$

Como la función tiene asíntota horizontal cuando $x\rightarrow+\infty$ y cuando $x\rightarrow-\infty$, no tiene asíntotas oblicuas y tampoco ramas parabólicas.

016 Estudia el crecimiento y decrecimiento de estas funciones, y calcula los máximos y mínimos.

a) $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$ b) $f(x)=\dfrac{-x^2+3}{x+2}$

a) $x-1=0 \rightarrow x=1 \rightarrow \text{Dom } f=\mathbb{R}-\{1\}$

$$f'(x)=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=0 \rightarrow x^2-2x=0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$$

- En $(-\infty, 0)\cup(2, +\infty) \rightarrow f'(x)>0 \rightarrow f(x)$ creciente
- En $(0, 1)\cup(1, 2) \rightarrow f'(x)<0 \rightarrow f(x)$ decreciente

$x=0 \rightarrow f(x)=0 \rightarrow (0, 0)$ Máximo $x=2 \rightarrow f(x)=4 \rightarrow (2, 4)$ Mínimo

b) $x+2=0 \rightarrow x=-2 \rightarrow \text{Dom } f=\mathbb{R}-\{-2\}$

$$f'(x)=\frac{-x^2-4x-3}{(x+2)^2}=0 \rightarrow -x^2-4x-3=0 \rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=-3 \end{cases}$$

- En $(-3, -2)\cup(-2, -1) \rightarrow f'(x)>0 \rightarrow f(x)$ creciente
- $(-\infty, -3)\cup(-1, +\infty) \rightarrow f'(x)<0 \rightarrow f(x)$ decreciente

$x=-1 \rightarrow f(x)=2 \rightarrow (-1, 2)$ Máximo
$x=-3 \rightarrow f(x)=6 \rightarrow (-3, 6)$ Mínimo

017 Estudia el crecimiento y decrecimiento de las funciones, y halla los máximos y mínimos.

a) $f(x)=x^2-3x+15$ b) $f(x)=\sqrt{x^2+5}$

a) $\text{Dom } f=\mathbb{R}$

$$f'(x)=2x-3=0 \rightarrow x=\frac{3}{2}$$

- En $\left(-\infty, \dfrac{3}{2}\right) \rightarrow f'(x)<0 \rightarrow f(x)$ decreciente
- En $\left(\dfrac{3}{2}, +\infty\right) \rightarrow f'(x)>0 \rightarrow f(x)$ creciente

$x=\dfrac{3}{2} \rightarrow f(x)=\dfrac{51}{4} \rightarrow \left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{51}{4}\right)$ Mínimo

b) $x^2+5\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R} \rightarrow \text{Dom } f=\mathbb{R}$

$$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+5}}=0 \rightarrow x=0$$

- En $(-\infty, 0) \rightarrow f'(x)<0 \rightarrow f(x)$ decreciente
- En $(0, +\infty) \rightarrow f'(x)>0 \rightarrow f(x)$ creciente

$x=0 \rightarrow f(x)=\sqrt{5} \rightarrow \left(0, \sqrt{5}\right)$ Mínimo

018 **Estudia la concavidad y convexidad de estas funciones, y calcula los puntos de inflexión.**

a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$ b) $f(x) = \dfrac{-x^2+3}{x+2}$

a) $x - 1 = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{1\}$

$f'(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$

$f''(x) = \dfrac{2}{(x-1)^3} \neq 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow$ No presenta puntos de inflexión.

- En $(-\infty, 1) \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ convexa
- En $(1, +\infty) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ cóncava

b) $x + 2 = 0 \rightarrow x = -2 \rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-2\}$

$f'(x) = \dfrac{-x^2 - 4x - 3}{(x+2)^2}$

$f''(x) = \dfrac{-2}{(x+2)^3} \neq 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow$ No presenta puntos de inflexión.

- En $(-\infty, -2) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ cóncava
- En $(-2, +\infty) \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ convexa

019 **Halla los intervalos de concavidad y convexidad de las siguientes funciones, y comprueba el resultado gráficamente.**

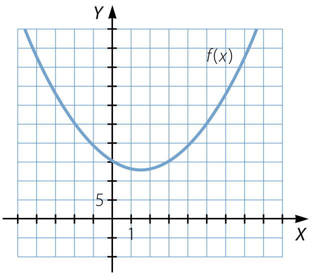
a) $f(x) = x^2 - 3x + 15$ b) $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

$f'(x) = 2x - 3$

$f''(x) = 2 > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$

Por tanto, es $f(x)$ cóncava en todo su dominio y no presenta puntos de inflexión.

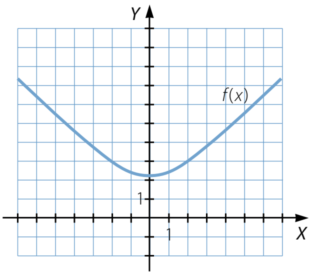


b) $x^2 + 5 \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R}$

$f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+5}}$

$$f''(x) = \frac{\sqrt{x^2+5} - \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+5}}}{x^2+5} =$$

$$= \frac{5}{(x^2+5)\sqrt{x^2+5}} > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$$



Así, $f(x)$ es cóncava en todo su dominio y no presenta puntos de inflexión.

020 **Representa las siguientes funciones polinómicas.**

a) $f(x) = x^4 - 12x$ **b)** $g(x) = -2x^3 + 6x$

a) Dom $f = \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X:

$$f(x) = 0 \to x^4 - 12x = 0 \to x(x^3 - 12) = 0 \to \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt[3]{12} \end{cases} \to (0, 0), \left(\sqrt[3]{12}, 0\right)$$

- Corte con el eje Y: $x = 0 \to f(0) = 0 \to (0, 0)$

Como f es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas.

$$\lim_{x \to -\infty} (x^4 - 12x) = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} (x^4 - 12x) = +\infty$$

$f'(x) = 4x^3 - 12 = 0 \to x = \sqrt[3]{3}$

- En $\left(-\infty, \sqrt[3]{3}\right) \to f'(x) < 0 \to f(x)$ decreciente
- En $\left(\sqrt[3]{3}, +\infty\right) \to f'(x) > 0 \to f(x)$ creciente

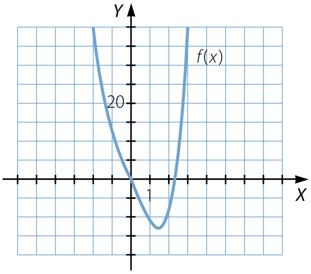
$x = \sqrt[3]{3} \to f\left(\sqrt[3]{3}\right) = 3\sqrt[3]{3} - 12\sqrt[3]{3} = -9\sqrt[3]{3}$

$\to \left(\sqrt[3]{3}, -9\sqrt[3]{3}\right)$ Mínimo

$f''(x) = 12x^2 = 0 \to x = 0$

- En $(-\infty, 0) \to f''(x) > 0 \to f(x)$ cóncava
- En $(0, +\infty) \to f''(x) > 0 \to f(x)$ cóncava

No presenta puntos de inflexión.



b) Dom $g = \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X:

$$g(x) = 0 \to -2x^3 + 6x = 0 \to x(-2x^2 + 6) = 0 \to \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\to \left(-\sqrt{3}, 0\right), (0, 0), \left(0, \sqrt{3}\right)$$

- Corte con el eje Y: $x = 0 \to g(0) = 0 \to (0, 0)$

Como g es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas.

$$\lim_{x \to -\infty} (-2x^3 + 6x) = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} (-2x^3 + 6x) = -\infty$$

$g'(x) = -6x^2 + 6 = 0 \to x = \pm 1$

- En $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \to g'(x) < 0 \to g(x)$ decreciente
- En $(-1, 1) \to g'(x) > 0 \to g(x)$ creciente

$x = -1 \to g(-1) = -2(-1)^3 + 6(-1) = -4$

$\to (-1, -4)$ Mínimo

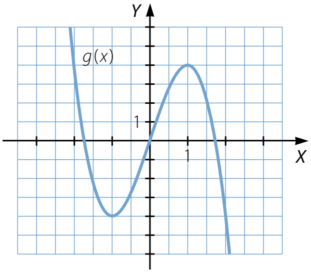
$x = 1 \to g(1) = -2 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1 = 4$

$\to (1, 4)$ Máximo

$g''(x) = -12x = 0 \to x = 0$

- En $(-\infty, 0) \to g''(x) > 0 \to g(x)$ cóncava
- En $(0, +\infty) \to g''(x) < 0 \to g(x)$ convexa

$x = 0 \to g(0) = 0 \to (0, 0)$ Punto de inflexión



021 **Representa estas funciones polinómicas.**

a) $f(x) = 6x^5 - 12x^3 - 4x$

b) $g(x) = -x^3 + x$

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X:

$$f(x) = 0 \rightarrow 6x^5 - 12x^3 - 4x = 0 \rightarrow x(6x^4 - 12x^2 - 4) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1,51 \end{cases}$$

- Corte con el eje Y:

$x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$

Como f es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas.

$$\lim_{x \to -\infty} (6x^5 - 12x^3 - 4x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} (6x^5 - 12x^3 - 4x) = +\infty$$

$f'(x) = 30x^4 - 36x^2 - 4$

$f'(x) = 0 \rightarrow x = \pm 1,14$

- En $(-\infty; -1,14) \cup (1,14; +\infty) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente
- En $(-1,14; 1,14) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente

$x = -1,14 \rightarrow f(-1,14) = 10,79 \rightarrow (-1,14; 10,79)$ Máximo

$x = 1,14 \rightarrow f(1,14) = -10,79 \rightarrow (1,14; -10,79)$ Mínimo

$f''(x) = 120x^3 - 72x$

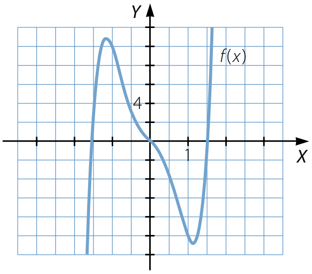
$$f''(x) = 0 \rightarrow x(120x^2 - 72) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 0,77 \end{cases}$$

- En $(-\infty; -0,77) \cup (0; 0,77) \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ convexa
- En $(-0,77; 0) \cup (0,77; +\infty) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ cóncava

$x = -0,77 \rightarrow f(-0,77) = 6,93 \rightarrow (-0,77; 6,93)$ Punto de inflexión

$x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$ Punto de inflexión

$x = 0,77 \rightarrow f(0,77) = -6,93 \rightarrow (0,77; -6,93)$ Punto de inflexión



b) $\text{Dom } g = \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X:

$$g(x) = -x^3 + x = 0 \rightarrow x(-x^2 + 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases} \rightarrow (-1, 0), (0, 0), (1, 0)$$

- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow g(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$

Como g es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas.

$$\lim_{x \to -\infty} (-x^3 + x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} (-x^3 + x) = -\infty$$

$$g'(x) = -3x^2 + 1 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

- En $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right) \rightarrow g'(x) < 0 \rightarrow g(x)$ decreciente

- En $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \rightarrow g'(x) > 0 \rightarrow g(x)$ creciente

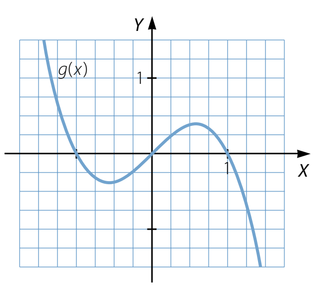
$$x = -\sqrt{\frac{1}{3}} \rightarrow g\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} \rightarrow \left(-\sqrt{\frac{1}{3}}, -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}\right) \text{ Mínimo}$$

$$x = \sqrt{\frac{1}{3}} \rightarrow g\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} \rightarrow \left(\sqrt{\frac{1}{3}}, \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}\right) \text{ Máximo}$$

$$g''(x) = -6x = 0 \rightarrow x = 0$$

- En $(-\infty, 0) \rightarrow g''(x) > 0 \rightarrow g(x)$ cóncava
- En $(0, +\infty) \rightarrow g''(x) < 0 \rightarrow g(x)$ convexa

$x = 0 \rightarrow g(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$ Punto de inflexión



022 **Representa las siguientes funciones racionales.**

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 5}{x}$ b) $g(x) = \dfrac{x^2}{x^3 + x}$

a) $\text{Dom}\, f = \mathbb{R} - \{0\}$

- Cortes con el eje X:

  $f(x) = 0 \to \dfrac{x^2 - 5}{x} = 0 \to x^2 - 5 = 0 \to x = \pm\sqrt{5} \to \left(-\sqrt{5}, 0\right), \left(\sqrt{5}, 0\right)$

- Corte con el eje Y: no tiene porque $f(x)$ no está definida para $x = 0$.

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 - 5}{x} = \infty \to \text{Asíntota vertical: } x = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 5}{x} = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 5}{x} = -\infty \end{array}\right\} \to \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 5}{x^2} = 1 \neq 0 \to m = 1 \\ \displaystyle\lim_{x \to \infty} \left(f(x) - x\right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 - 5}{x} - x\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{-5}{x} = 0 \to n = 0 \end{array}\right\}$$

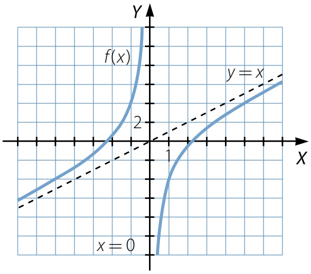
$\to$ Asíntota oblicua: $y = x$

No tiene ramas parabólicas ya que tiene asíntota oblicua cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$.

$f'(x) = \dfrac{x^2 + 5}{x^2} > 0 \to f(x)$ creciente

No presenta máximos ni mínimos.

$f''(x) = \dfrac{-10}{x^3} \neq 0 \to f(x)$ no presenta puntos de inflexión.



- En $(-\infty, 0) \to f''(x) > 0 \to f(x)$ cóncava
- En $(0, +\infty) \to f''(x) < 0 \to f(x)$ convexa

b) $x^3 + x = 0 \to x(x^2 + 1) = 0 \to x = 0 \to \text{Dom}\, g = \mathbb{R} - \{0\}$

- Cortes con el eje X:

  $g(x) = 0 \to \dfrac{x^2}{x^3 + x} = 0 \to x = 0 \to$ No tiene porque $g(x)$ no está definida para $x = 0$.

- Corte con el eje Y: no tiene porque $g(x)$ no está definida para $x = 0$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x^3 + x} \to \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x \to 0} \frac{2x}{3x^2 + 1} = 0 \to \text{No tiene asíntotas verticales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^3 + x} = 0 \\ \displaystyle\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x^3 + x} = 0 \end{array}\right\} \to \text{Asíntota horizontal: } y = 0$$

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas ya que tiene asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$.

$$g'(x) = \frac{-x^4 + x^2}{(x^3 + x)^2} = \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2} = 0 \to x = \pm 1$$

- En $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \rightarrow g'(x) < 0 \rightarrow g(x)$ decreciente
- En $(-1, 0) \cup (0, 1) \rightarrow g'(x) > 0 \rightarrow g(x)$ creciente

$x = -1 \rightarrow g(-1) = -\dfrac{1}{2} \rightarrow \left(-1, -\dfrac{1}{2}\right)$ Mínimo

$x = 1 \rightarrow g(1) = \dfrac{1}{2} \rightarrow \left(1, \dfrac{1}{2}\right)$ Máximo

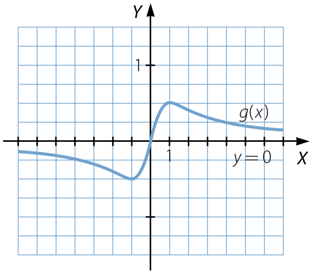
$$g''(x) = \frac{2x^3 - 6x}{(x^2+1)^3} = 0 \rightarrow 2x^3 - 6x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

- En $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3}) \rightarrow g''(x) < 0 \rightarrow g(x)$ convexa
- En $\left(-\sqrt{3}, 0\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right) \rightarrow g''(x) > 0 \rightarrow g(x)$ cóncava

$x = -\sqrt{3} \rightarrow g\left(-\sqrt{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{4} \rightarrow \left(-\sqrt{3}, -\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$ Punto de inflexión

$x = 0 \rightarrow g(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$ Punto de inflexión

$x = \sqrt{3} \rightarrow g\left(\sqrt{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \rightarrow \left(\sqrt{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$ Punto de inflexión



023 Representa estas funciones racionales.

a) $f(x) = \dfrac{x^3 - 3}{x}$ b) $g(x) = \dfrac{x^4 - 3x}{x}$

a) Dom $f = \mathbb{R} - \{0\}$

- Cortes con el eje X: $f(x) = 0 \rightarrow \dfrac{x^3 - 3}{x} = 0 \rightarrow x = \sqrt[3]{3} \rightarrow \left(\sqrt[3]{3}, 0\right)$
- Corte con el eje Y: no tiene porque $f(x)$ no está definida para $x = 0$.

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3 - 3}{x} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical: $x = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 - 3}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3 - 3}{x} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 - 3}{x^2} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3 - 3}{x^2} = -\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas oblicuas.}$$

Tiene ramas parabólicas:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 3}{x} = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 - 3}{x} = +\infty$$

$$f'(x) = \frac{2x^3 + 3}{x^2} = 0 \to 2x^3 + 3 = 0 \to x = \sqrt[3]{\frac{-3}{2}} = -1{,}14$$

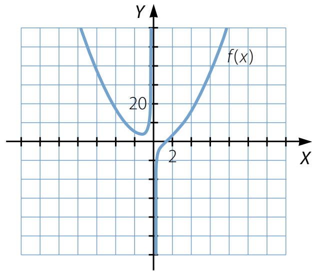
- En $\left(-\infty, \sqrt[3]{\frac{-3}{2}}\right) \to f'(x) < 0 \to f(x)$ decreciente
- En $\left(\sqrt[3]{\frac{-3}{2}}, 0\right) \cup (0, +\infty) \to f'(x) > 0 \to f(x)$ creciente

$$x = \sqrt[3]{\frac{-3}{2}} \to f\left(\sqrt[3]{\frac{-3}{2}}\right) = \frac{3\sqrt[3]{12^2}}{4} = 3{,}93 \to \left(\sqrt[3]{\frac{-3}{2}}, \frac{3\sqrt[3]{12^2}}{4}\right) \text{ Mínimo}$$

$$f''(x) = \frac{2x^3 - 6}{x^3} = 0 \to 2x^3 - 6 = 0 \to x = \sqrt[3]{3} \to \left(\sqrt[3]{3}, 0\right)$$

- En $(-\infty, 0) \cup \left(\sqrt[3]{3}, +\infty\right) \to f''(x) > 0 \to f(x)$ cóncava
- En $\left(0, \sqrt[3]{3}\right) \to f''(x) < 0 \to f(x)$ convexa

$$x = \sqrt[3]{3} \to f(\sqrt[3]{3}) = 0 \to \left(\sqrt[3]{3}, 0\right) \text{ Punto de inflexión}$$



b) Dom $g = \mathbb{R} - \{0\}$

- Cortes con el eje X:

$$g(x) = 0 \to \frac{x^4 - 3x}{x} = 0 \to x^4 - 3x = 0 \to x(x^3 - 3) = 0$$
$$\to x = \sqrt[3]{3} \to \left(\sqrt[3]{3}, 0\right)$$

- Corte con el eje Y: no tiene porque $g(x)$ no está definida para $x = 0$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^4 - 3x}{x} \to \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x \to 0} \frac{4x^3 - 3}{1} = -3 \to \text{No tiene asíntotas verticales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^4 - 3x}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^4 - 3x}{x} = -\infty \end{array}\right\} \to \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^4 - 3x}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^4 - 3x}{x} = +\infty \end{array}\right\} \to \text{No tiene asíntotas oblicuas.}$$

Tiene ramas parabólicas:

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^4 - 3x}{x} = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^4 - 3x}{x} = -\infty$$

$g'(x) = 3x^2 = 0 \rightarrow x = 0$

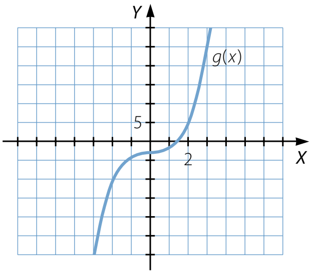
- En $(-\infty, 0) \rightarrow g'(x) > 0 \rightarrow g(x)$ creciente
- En $(0, +\infty) \rightarrow g'(x) > 0 \rightarrow g(x)$ creciente

No presenta máximos ni mínimos.

$g''(x) = 6x = 0 \rightarrow x = 0$

- En $(-\infty, 0) \rightarrow g''(x) < 0 \rightarrow g(x)$ convexa
- En $(0, +\infty) \rightarrow g''(x) > 0 \rightarrow g(x)$ cóncava

No presenta puntos de inflexión, ya que en $x = 0$ no está definida la función.



024 **Representa las siguientes funciones con radicales.**

a) $f(x) = \sqrt{x - 3}$ **b)** $g(x) = \sqrt{x^2 - 7x}$

a) $x - 3 \geq 0 \rightarrow x \geq 3 \rightarrow \text{Dom } f = [3, +\infty)$

- Cortes con el eje X: $f(x) = 0 \rightarrow x - 3 = 0 \rightarrow x = 3 \rightarrow (3, 0)$
- Corte con el eje Y: no tiene porque $f(x)$ no está definida para $x = 0$.

No tiene asíntotas verticales porque en el extremo del dominio la función está definida.

$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x - 3} = +\infty \rightarrow$ No tiene asíntotas horizontales.

$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x - 3}}{x} = 0 \rightarrow$ No tiene asíntotas oblicuas.

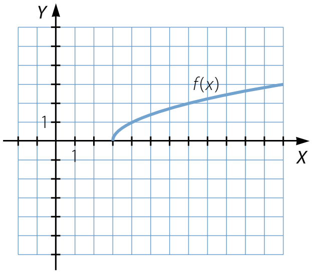
Tiene una rama parabólica: $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x - 3} = +\infty$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x - 3}} > 0, \forall x \in (3, +\infty) \rightarrow f(x)$ creciente

No presenta máximos ni mínimos.

$f''(x) = \frac{-1}{4(x - 3)\sqrt{x - 3}} < 0, \forall x \in (3, +\infty) \rightarrow f(x)$ convexa

No presenta puntos de inflexión.



b) $x^2 - 7x \geq 0 \rightarrow x \in (-\infty, 0] \cup [7, +\infty) \rightarrow \text{Dom}\, g = (-\infty, 0] \cup [7, +\infty)$

- Cortes con el eje X: $g(x) = 0 \rightarrow \sqrt{x^2 - 7x} = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 7 \end{cases} \rightarrow (0, 0), (7, 0)$
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow (0, 0)$

No tiene asíntotas verticales.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - 7x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 - 7x} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 - 7x}}{x} = 1 \rightarrow m = 1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \left(g(x) - x\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 - 7x} - x\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 7x - x^2}{\sqrt{x^2 - 7x} + x} = \\ \qquad = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-7x}{\sqrt{x^2 - 7x} + x} = \dfrac{-7}{2} \rightarrow n = \dfrac{-7}{2} \end{array}\right\}$$

$$\rightarrow \text{Asíntota oblicua: } y = mx + n \rightarrow y = x - \frac{7}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 - 7x}}{x} = -1 \rightarrow m = -1 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \left(g(x) + x\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 - 7x} + x\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 - 7x - x^2}{\sqrt{x^2 - 7x} - x} = \\ \qquad = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-7x}{\sqrt{x^2 - 7x} - x} = \dfrac{7}{2} \rightarrow n = \dfrac{7}{2} \end{array}\right\}$$

$$\rightarrow \text{Asíntota oblicua: } y = mx + n \rightarrow y = -x + \frac{7}{2}$$

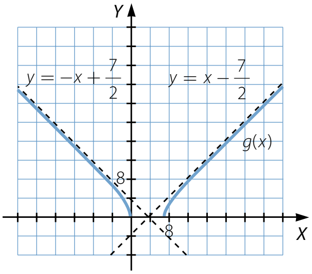
No tiene ramas parabólicas.

$g'(x) = \dfrac{2x - 7}{2\sqrt{x^2 - 7x}} = 0 \rightarrow x = \dfrac{7}{2} \notin \text{Dom}\, g \rightarrow$ No presenta máximos ni mínimos.

- En $(-\infty, 0) \rightarrow g'(x) < 0 \rightarrow g(x)$ decreciente
- En $(7, +\infty) \rightarrow g'(x) > 0 \rightarrow g(x)$ creciente

$g''(x) = \dfrac{-49}{4(x^2 - 7x)\sqrt{x^2 - 7x}} < 0, \forall x \in (-\infty, 0) \cup (7, +\infty) \rightarrow g(x)$ convexa

No presenta puntos de inflexión.



025 **Representa estas funciones con radicales.**

a) $f(x) = \sqrt{x^3 - x^2}$

b) $g(x) = x + \sqrt{x}$

a) $x^3 - x^2 \geq 0 \rightarrow x^2(x-1) \geq 0 \rightarrow x \geq 1 \rightarrow \text{Dom } f = [1, +\infty)$

- Cortes con el eje X:

$$f(x) = 0 \rightarrow \sqrt{x^3 - x^2} = 0 \rightarrow x^2(x-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \rightarrow (1, 0)$$

- Corte con el eje Y: no tiene porque $f(x)$ no está definida para $x = 0$.

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^3 - x^2} = +\infty \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^3 - x^2}}{x} = +\infty \rightarrow \text{No tiene asíntotas oblicuas.}$$

Tiene una rama parabólica:

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^3 - x^2} = +\infty$$

$$f'(x) = \frac{3x^2 - 2x}{2\sqrt{x^3 - x^2}} = 0 \rightarrow 3x^2 - 2x = 0 \rightarrow x(3x-2) = 0$$

$$\rightarrow x = 0,\ x = \frac{2}{3} \notin \text{Dom } f \rightarrow \text{No presenta máximos ni mínimos.}$$

$f'(x) > 0,\ \forall x \in (1, +\infty) \rightarrow f(x)$ creciente

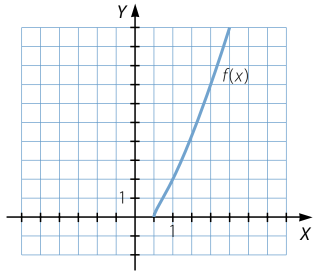
$$f''(x) = \frac{3x^4 - 4x^3}{4(x^3 - x^2)\sqrt{x^3 - x^2}} = \frac{3x^2 - 4x}{4(x-1)\sqrt{x^3 - x^2}} = 0$$

$$\rightarrow x(3x-4) = 0 \rightarrow x = 0,\ x = \frac{4}{3}$$

- En $\left(1, \frac{4}{3}\right) \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ convexa

- En $\left(\frac{4}{3}, +\infty\right) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ cóncava

$$x = \frac{4}{3} \rightarrow f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{4\sqrt{3}}{9} \rightarrow \left(\frac{4}{3}, \frac{4\sqrt{3}}{9}\right) \text{ Punto de inflexión}$$



b) Dom $g = [0, +\infty)$

- Cortes con el eje X: $g(x) = 0 \rightarrow x + \sqrt{x} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow g(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$

No tiene asíntotas verticales.

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x + \sqrt{x}) = +\infty \rightarrow$ No tiene asíntotas horizontales.

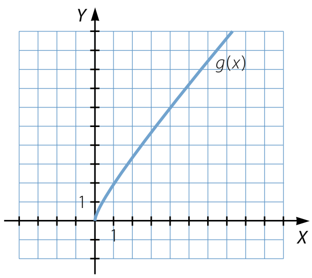
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x + \sqrt{x}}{x} = 1 \rightarrow m = 1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} (g(x) - x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x + \sqrt{x} - x) = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas oblicuas.}$$

Tiene una rama parabólica: $\lim\limits_{x \to +\infty} (x + \sqrt{x}) = +\infty$

$g'(x) = 1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} > 0 \rightarrow g(x)$ creciente

No presenta máximos ni mínimos.

$g''(x) = \dfrac{-1}{4x\sqrt{x}} < 0, \forall x \in (0, +\infty) \rightarrow g(x)$ convexa



026 **Representa las siguientes funciones exponenciales.**

a) $f(x) = e^{-x} + 7$ **b)** $g(x) = 5 + e^{x}$

a) Dom $f = \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X: no tiene.
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow f(0) = 8 \rightarrow (0, 8)$

No tiene asíntotas verticales.

$\lim\limits_{x \to +\infty} (e^{-x} + 7) = 7 \rightarrow$ Asíntota horizontal

$\lim\limits_{x \to -\infty} (e^{-x} + 7) = +\infty \rightarrow$ No tiene asíntota horizontal.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{-x} + 7}{x} = +\infty \rightarrow$ No tiene asíntotas oblicuas.

Tiene una rama parabólica:

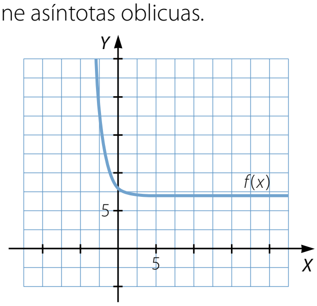
$\lim\limits_{x \to -\infty} (e^{-x} + 7) = +\infty$

$f'(x) = -e^{-x} < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente

No presenta máximos ni mínimos.

$f''(x) = e^{-x} > 0 \rightarrow f(x)$ cóncava

No presenta puntos de inflexión.



b) Dom $g = \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X: no tiene.
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow g(0) = 6 \rightarrow (0, 6)$

No tiene asíntotas verticales.

Asíntotas horizontales:

$\lim\limits_{x \to +\infty} (5 + e^x) = +\infty \rightarrow$ No tiene asíntota horizontal.

$\lim\limits_{x \to -\infty} (5 + e^x) = 5 \rightarrow$ Asíntota horizontal: $y = 5$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5 + e^x}{x} = +\infty \rightarrow$ No tiene asíntotas oblicuas.

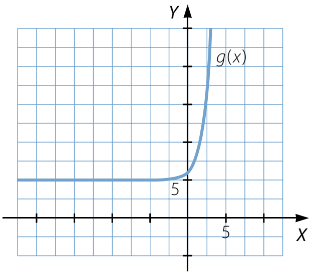
Tiene una rama parabólica:

$\lim\limits_{x \to +\infty} (5 + e^x) = +\infty$

$g'(x) = e^x > 0 \rightarrow g(x)$ creciente

No presenta máximos ni mínimos.

$g''(x) = e^x > 0 \rightarrow g(x)$ cóncava y no presenta puntos de inflexión.



027 **Representa estas funciones exponenciales.**

a) $f(x) = e^{\sqrt{x}}$ **b)** $g(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$

a) Dom $f = [0, +\infty)$

- Cortes con el eje X: no tiene.
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow f(0) = e^0 = 1 \rightarrow (0, 1)$

No tiene asíntotas verticales.

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^{\sqrt{x}} = +\infty \rightarrow$ No tiene asíntotas horizontales.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{x} = +\infty \rightarrow$ No tiene asíntotas oblicuas.

Tiene una rama parabólica: $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{\sqrt{x}} = +\infty$

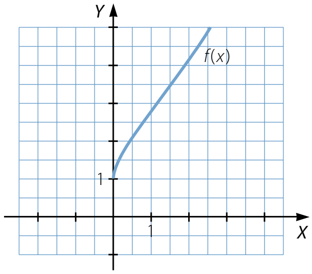
$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \cdot e^{\sqrt{x}} > 0 \rightarrow f(x)$ creciente

No presenta máximos ni mínimos.

$$f''(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{4x} - \frac{e^{\sqrt{x}}}{4x\sqrt{x}} = 0 \to \sqrt{x}\,e^{\sqrt{x}} - e^{\sqrt{x}} = 0 \to e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x} - 1\right) = 0 \to x = 1$$

- En (0, 1) $\to f''(x) < 0 \to f(x)$ convexa
- En (1, $+\infty$) $\to f''(x) > 0 \to f(x)$ cóncava

$x = 1 \to f(1) = e \to (1, e)$ Punto de inflexión



b) Dom $g = \mathbb{R}$
- Cortes con el eje X: no tiene.
- Corte con el eje Y: $x = 0 \to g(0) = e^0 = 1 \to (0, 1)$

No tiene asíntotas verticales.

$\lim\limits_{x \to \infty} e^{\frac{-x^2}{2}} = 0 \to$ Asíntota horizontal: $y = 0$

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas.

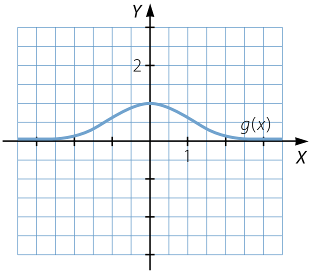
$g'(x) = -xe^{\frac{-x^2}{2}} = 0 \to x = 0$
- En $(-\infty, 0) \to g'(x) > 0 \to g(x)$ creciente
- En $(0, +\infty) \to g'(x) < 0 \to g(x)$ decreciente

$x = 0 \to f(0) = 1 \to (0, 1)$ Máximo

$g''(x) = -e^{\frac{-x^2}{2}} - xe^{\frac{-x^2}{2}}(-x) = e^{\frac{-x^2}{2}}(x^2 - 1) = 0 \to x = \pm 1$
- En $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \to g''(x) > 0 \to g(x)$ cóncava
- En $(-1, 1) \to g''(x) < 0 \to g(x)$ convexa

$x = -1 \to f(1) = e^{\frac{-1}{2}} \to \left(-1, e^{\frac{-1}{2}}\right)$ Punto de inflexión

$x = 1 \to f(1) = e^{\frac{-1}{2}} \to \left(1, e^{\frac{-1}{2}}\right)$ Punto de inflexión



028 **Representa las siguientes funciones logarítmicas.**

a) $f(x) = \ln(x + 4)$ b) $g(x) = \ln(x^2 - 4)$

a) $x + 4 > 0 \rightarrow x > -4 \rightarrow \text{Dom } f = (-4, +\infty)$

- Cortes con el eje X: $\ln(x + 4) = 0 \rightarrow x + 4 = e^0 = 1 \rightarrow x = -3 \rightarrow (-3, 0)$
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow f(0) = \ln 4 \rightarrow (0, \ln 4)$

$\lim\limits_{x \to -4^+} \ln(x + 4) = -\infty \rightarrow$ Asíntota vertical: $x = -4$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x + 4) = +\infty \rightarrow$ No tiene asíntotas horizontales.

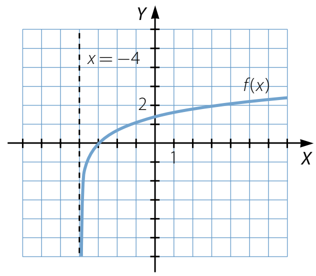
$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x + 4)}{x} = 0 \rightarrow$ No tiene asíntotas oblicuas.

Tiene una rama parabólica:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x + 4) = +\infty$

$f'(x) = \dfrac{1}{x + 4} > 0 \rightarrow f(x)$ creciente

$f''(x) = \dfrac{-1}{(x + 4)^2} < 0 \rightarrow f(x)$ convexa



b) $x^2 - 4 > 0 \rightarrow (x - 2)(x + 2) > 0 \rightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

$\rightarrow \text{Dom } g = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

- Cortes con el eje X: $\ln(x^2 - 4) = 0 \rightarrow x^2 - 4 = e^0 = 1 \rightarrow x^2 = 1 + 4$

$\rightarrow x = \pm\sqrt{5} \rightarrow \left(-\sqrt{5}, 0\right), \left(\sqrt{5}, 0\right)$

- Corte con el eje Y: no tiene porque $g(x)$ no está definida para $x = 0$.

$\lim\limits_{x \to -2^-} \ln(x^2 - 4) = -\infty \rightarrow$ Asíntota vertical: $x = -2$

$\lim\limits_{x \to 2^+} \ln(x^2 - 4) = -\infty \rightarrow$ Asíntota vertical: $x = 2$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x^2 - 4) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \ln(x^2 - 4) = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x^2 - 4)}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\ln(x^2 - 4)}{x} = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas oblicuas.}$$

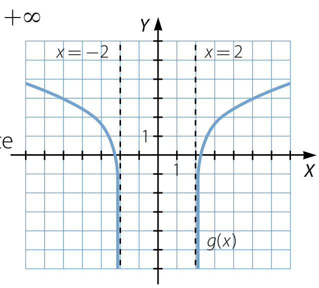
Tiene ramas parabólicas:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x^2 - 4) = +\infty \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} \ln(x^2 - 4) = +\infty$

$g'(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 4} = 0 \rightarrow x = 0$

- En $(-\infty, -2) \rightarrow g'(x) < 0 \rightarrow g(x)$ decreciente
- En $(2, +\infty) \rightarrow g'(x) > 0 \rightarrow g(x)$ creciente

$g''(x) = \dfrac{-2x^2 - 8}{(x^2 - 4)^2} < 0 \rightarrow g(x)$ convexa



029 Representa esta función logarítmica: $f(x) = \ln(x^2 - x + 1)$

$x^2 - x + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X: $\ln(x^2 - x + 1) = 0 \rightarrow x^2 - x + 1 = e^0 = 1 \rightarrow x^2 - x = 0$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \rightarrow (0, 0), (1, 0)$$

- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = \ln 1 = 0 \rightarrow (0, 0)$

No tiene asíntotas verticales.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x^2 - x + 1) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \ln(x^2 - x + 1) = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\ln(x^2 - x + 1)}{x} = 0 \rightarrow \text{No tiene asíntotas oblicuas.}$$

Tiene ramas parabólicas:

$$\lim_{x \to +\infty} \ln(x^2 - x + 1) = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} \ln(x^2 - x + 1) = +\infty$$

$$f'(x) = \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1} = 0 \rightarrow 2x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

- En $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente
- En $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente

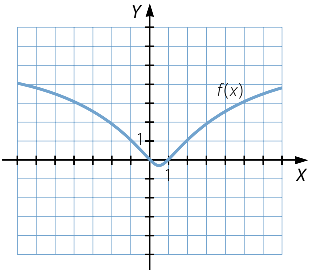
$$x = \frac{1}{2} \rightarrow f(x) = \ln\frac{3}{4} \rightarrow \left(\frac{1}{2}, \ln\frac{3}{4}\right) \text{ Mínimo}$$

$$f''(x) = \frac{-2x^2 + 2x + 1}{(x^2 - x + 1)^2} = 0 \rightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{3}}{-2} = -0{,}37;\ x = \frac{-1 - \sqrt{3}}{-2} = 1{,}37$$

- En $\left(-\infty, \frac{-1 + \sqrt{3}}{-2}\right) \cup \left(\frac{-1 - \sqrt{3}}{-2}, +\infty\right) \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ convexa
- En $\left(\frac{-1 + \sqrt{3}}{-2}, \frac{-1 - \sqrt{3}}{-2}\right) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ cóncava

$$x = \frac{-1 + \sqrt{3}}{-2} \rightarrow f\left(\frac{-1 + \sqrt{3}}{-2}\right) = 0{,}41 \rightarrow (-0{,}37;\ 0{,}41) \text{ Punto de inflexión}$$

$$x = \frac{-1 - \sqrt{3}}{-2} \rightarrow f\left(\frac{-1 - \sqrt{3}}{-2}\right) = 0{,}41 \rightarrow (1{,}37;\ 0{,}41) \text{ Punto de inflexión}$$



030 Representa la función: $f(x) = \begin{cases} e^{\sqrt{-x}} & \text{si } x < 1 \\ x^2 - x + 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

$f(x) = e^{\sqrt{-x}} \rightarrow$ Está definida para $x \leq 0 \rightarrow \text{Dom } f = (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$

- Cortes con el eje X: no tiene.
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = e^{\sqrt{0}} = 1 \rightarrow (0, 1)$

No tiene asíntotas verticales.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 - x + 1 = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} e^{\sqrt{-x}} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - x + 1}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{\sqrt{-x}}}{x} \rightarrow \dfrac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-e^{\sqrt{-x}}}{2\sqrt{-x}} \rightarrow \dfrac{\infty}{\infty} \\ \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{\sqrt{-x}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{-x}}}{\dfrac{-2}{2\sqrt{-x}}} = \lim\limits_{x \to -\infty} -\dfrac{1}{2} e^{\sqrt{-x}} = -\infty \end{array}\right\}$$

$\rightarrow$ No tiene asíntotas oblicuas.

Tiene dos ramas parabólicas:

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 - x + 1 = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} e^{\sqrt{-x}} = +\infty$$

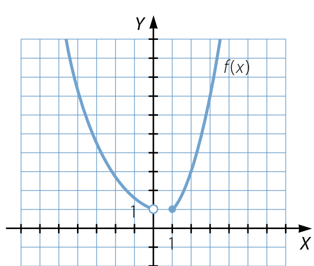
$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{2\sqrt{-x}} \cdot e^{\sqrt{-x}} & \text{si } x < 1 \\ 2x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \qquad f'(x) = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

- En $(-\infty, 0) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente
- En $(1, +\infty) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente

$$f''(x) = \begin{cases} e^{\sqrt{-x}} - \dfrac{e^{\sqrt{-x}}}{\sqrt{-x}} & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } x > 1 \end{cases} \qquad f''(x) = 0 \rightarrow x = -1$$

- En $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ cóncava
- En $(-1, 0) \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ convexa

$x = -1 \rightarrow f(-1) = e \rightarrow (-1, e)$ Punto de inflexión



031 Representa la función: $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } -2 < x < 2 \\ \ln(x^2 - 4) & \text{resto} \end{cases}$

Dom $f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

- Cortes con el eje X:

  $f(x) = 0 \rightarrow (0, 0), \left(-\sqrt{5}, 0\right), \left(\sqrt{5}, 0\right)$

- Corte con el eje Y:

  $x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$

$\lim\limits_{x \to -2^-} \ln(x^2 - 4) = -\infty \rightarrow$ Asíntota vertical: $x = -2$

$\lim\limits_{x \to 2^+} \ln(x^2 - 4) = -\infty \rightarrow$ Asíntota vertical: $x = 2$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x^2 - 4) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \ln(x^2 - 4) = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln(x^2 - 4)}{x} = 0 \rightarrow$ No tiene asíntotas oblicuas.

- Tiene ramas parabólicas:

  $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x^2 - 4) = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln(x^2 - 4) = +\infty$

- Crecimiento:

  $$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } -2 < x < 2 \\ \dfrac{2x}{x^2 - 4} & \text{resto} \end{cases}$$

  $f'(x) = 0 \rightarrow x = 0$

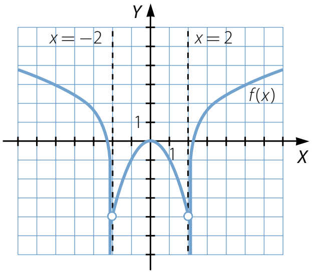
- En $(-\infty, -2) \cup (0, 2) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente
- En $(-2, 0) \cup (2, +\infty) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente

$x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$ Máximo

- Concavidad:

  $$f''(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } -2 < x < 2 \\ \dfrac{-2x^2 - 8}{(x^2 - 4)^2} & \text{resto} \end{cases}$$

- En $(-2, 2) \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ convexa
- En $\mathbb{R} - (-2, 2) \rightarrow f''(x) = \dfrac{-2x^2 - 8}{(x^2 - 4)^2} < 0 \rightarrow f(x)$ convexa



032 **Representa las siguientes funciones con valor absoluto.**

a) $f(x) = 4x + |-x^2 - 18x|$ b) $g(x) = |x^3 + 2x^2 - 6x|$

a) $f(x) = \begin{cases} 4x - x^2 - 18x & \text{si } -x^2 - 18x \geq 0 \\ 4x + x^2 + 18x & \text{si } -x^2 - 18x < 0 \end{cases}$

Por tanto: $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 14x & \text{si } x \in [-18, 0] \\ x^2 + 22x & \text{si } x \in (-\infty, -18) \cup (0, +\infty) \end{cases}$

Se trata de representar dos parábolas en sus respectivos intervalos.

Puntos de intersección:

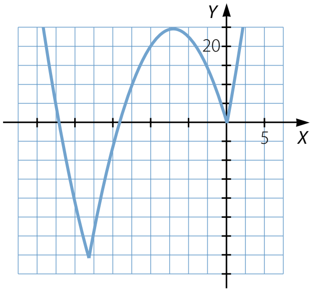
$-x^2 - 14x = x^2 + 22x \rightarrow 2x^2 + 36x = 0 \rightarrow x(2x + 36) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -18 \end{cases}$

$x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$

$x = -18 \rightarrow y = -72 \rightarrow (-18, -72)$

Vértice de $f(x) = -x^2 - 14x \rightarrow (-7, 49)$

Vértice de $f(x) = x^2 + 22x \rightarrow (-11, -121)$



b) Estudiamos primero la función $f(x) = x^3 + 2x^2 - 6x$ y tras representarla, dibujamos las partes negativas como positivas haciendo una simetría respecto del eje X.

Dominio $f = \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X:

$x^3 + 2x^2 - 6x = 0 \rightarrow x(x^2 + 2x - 6) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \pm \sqrt{7} \end{cases}$

- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$

Como f es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = 3x^2 + 4x - 6 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{22}}{3} \rightarrow \begin{cases} x = -2{,}23 \\ x = 0{,}9 \end{cases}$

- En $\left(-\infty, \dfrac{-2 - \sqrt{22}}{3}\right) \cup \left(\dfrac{-2 + \sqrt{22}}{3}, +\infty\right) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente
- En $\left(\dfrac{-2 - \sqrt{22}}{3}, \dfrac{-2 + \sqrt{22}}{3}\right) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente

$x = -2{,}23 \rightarrow f(-2{,}23) = 12{,}24 \rightarrow (-2{,}23;\ 12{,}24)$ Máximo

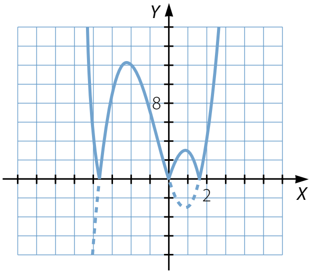
$x = 0{,}9 \rightarrow f(0{,}9) = -3{,}05 \rightarrow (0{,}9;\ -3{,}05)$ Mínimo

$f''(x) = 6x + 4 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-4}{6} = \dfrac{-2}{3} = -0{,}67$

- En $\left(-\infty, \dfrac{-2}{3}\right) \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ convexa
- En $\left(\dfrac{-2}{3}, +\infty\right) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ cóncava

$x = \dfrac{-2}{3} \rightarrow f\left(\dfrac{-2}{3}\right) = \dfrac{124}{27} = 4{,}59$

$\rightarrow \left(\dfrac{-2}{3}, \dfrac{124}{27}\right)$ Punto de inflexión



033 **Representa esta función:** $f(x) = \begin{cases} |-x^2 - 3x| & \text{si } x \le 0 \\ -e^x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

- Representamos $f(x) = -x^2 - 3x$ en el intervalo $(-\infty, 0]$.

  Se trata de una parábola de vértice $\left(\dfrac{-3}{2}, \dfrac{9}{4}\right)$.

  Cortes en el eje X: $-x^2 - 3x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \end{cases} \rightarrow (0, 0), (-3, 0)$

  Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$

  En $(-\infty, -3)$ la función es negativa, por lo que para conseguir el valor absoluto, dibujamos la simétrica respecto al eje X.

- Representamos $f(x) = -e^x$ en el intervalo $(0, +\infty)$.

  No corta al eje X.

  Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = -e^0 = -1 \rightarrow (0, -1)$

  No tiene asíntotas verticales.

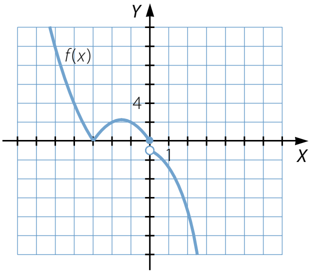
  $\lim\limits_{x \to +\infty} - e^x = -\infty \rightarrow$ No tiene asíntotas horizontales.

  $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-e^x}{x} = -\infty \rightarrow$ No tiene asíntotas oblicuas.

  Tiene una rama parabólica: $\lim\limits_{x \to +\infty} -e^x = -\infty$

  $f'(x) = -e^x < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente

  $f''(x) = -e^x < 0 \rightarrow f(x)$ convexa



034 **Halla el dominio de las siguientes funciones polinómicas.**

a) $y = 1 - 2x$ b) $y = x^2 - 2x - 3$ c) $y = x^3 + 4x$ d) $y = (x^2 - 4)^2$

El dominio de cualquier función polinómica es $\mathbb{R}$.

035 **Calcula el dominio de estas funciones racionales.**

a) $y = \dfrac{x-2}{x-3}$ b) $y = \dfrac{3x}{x^2-9}$ c) $y = \dfrac{x^2}{x-1}$

a) $x - 3 = 0 \rightarrow x = 3 \rightarrow$ Dominio $= \mathbb{R} - \{3\}$

b) $x^2 - 9 = 0 \rightarrow x = \pm 3 \rightarrow$ Dominio $= \mathbb{R} - \{-3, 3\}$

c) $x - 1 = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow$ Dominio $= \mathbb{R} - \{1\}$

036 **Determina el dominio de las siguientes funciones con radicales.**

a) $y = \sqrt{3-x} + 3$ c) $y = \sqrt{x^2 + 25}$

b) $y = \sqrt{16 - x^2}$ d) $y = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$

a) $3 - x \geq 0 \rightarrow x \leq 3 \rightarrow$ Dominio $= (-\infty, 3]$

b) $16 - x^2 \geq 0 \rightarrow (4 - x)(4 + x) \geq 0 \rightarrow x \in [-4, 4] \rightarrow$ Dominio $= [-4, 4]$

c) $x^2 + 25 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow$ Dominio $= \mathbb{R}$

d) $x^2 - 2x - 3 \geq 0 \rightarrow (x - 3)(x + 1) \geq 0 \rightarrow x \in (-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$

$\rightarrow$ Dominio $= (-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$

037 **Halla el dominio de estas funciones exponenciales y logarítmicas.**

a) $y = x^2e^x$ b) $y = 4^{-\frac{1}{x^2}}$ c) $y = \ln(x^2 + 4)$ d) $y = \dfrac{x}{\log_3 x}$

a) Dominio $= \mathbb{R}$

b) $x \neq 0 \rightarrow$ Dominio $= \mathbb{R} - \{0\}$

c) $x^2 + 4 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow$ Dominio $= \mathbb{R}$

d) $\log_3 x = 0 \rightarrow x = 3^0 = 1$. Como $x > 0 \rightarrow$ Dominio $= (0, 1) \cup (1, +\infty)$

038 **Determina el dominio de las siguientes funciones.**

a) $y = \dfrac{e^{3x} - e^{-3x}}{4x}$ c) $y = \sqrt{-x^2 - 2x + 3}$ e) $y = 2^{-x^2+7}$

b) $y = \sqrt[3]{x^2 + 4x - 1}$ d) $y = \ln(5x + x^2)$ f) $y = \dfrac{e^x}{(x+1)^2}$

a) Dominio $= \mathbb{R} - \{0\}$

b) Dominio $= \mathbb{R}$

c) $-x^2 - 2x + 3 \geq 0 \rightarrow -(x + 3)(x - 1) \geq 0 \rightarrow x \in [-3, 1] \rightarrow$ Dominio $= [-3, 1]$

d) $5x + x^2 > 0 \rightarrow x(5 + x) > 0 \rightarrow x \in (-\infty, -5) \cup (0, +\infty)$

$\rightarrow$ Dominio $= (-\infty, -5) \cup (0, +\infty)$

e) Dominio $= \mathbb{R}$

f) Dominio $= \mathbb{R} - \{-1\}$

039 **Encuentra el dominio de estas funciones.**

a) $y = \dfrac{sen\ x}{x - \pi}$ b) $y = tg\ \dfrac{x}{x-1}$ c) $y = arc\ cos\ (x^2 - 3)$ d) $y = x - sen\ x$

a) Dominio $= \mathbb{R} - \{\pi\}$

b) $\dfrac{x}{x-1} = \dfrac{\pi}{2} \to 2x = \pi x - \pi \to x = \dfrac{\pi}{\pi - 2} \to x = \dfrac{\pi}{2-\pi} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Además, $x - 1 = 0 \to x = 1$.

Dominio $= \mathbb{R} - \left\{1, \dfrac{\pi}{2-\pi} + k\pi\right\}$ con $k \in \mathbb{Z}$

c) $y = arc\ cos\ x$ está definida en:

$[-1, 1] \to -1 \leq x^2 - 3 \leq 1 \to 2 \leq x^2 \leq 4$

$$\to \begin{cases} x^2 - 2 \geq 0 \to x \in \left(-\infty, -\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}, +\infty\right) \\ x^2 - 4 \leq 0 \to x \in [-2, 2] \end{cases}$$

La zona común de ambos intervalos es $\left[-2, -\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}, 2\right]$ que es el dominio de la función.

d) Dominio $= \mathbb{R}$

040 **Calcula los puntos en que las gráficas de las siguientes funciones cortan a los ejes de coordenadas.**

a) $y = -x^2 - x + 12$ c) $y = x^4 - 8x^2 + 7$ e) $y = \dfrac{3x^2}{x^2 - 1}$

b) $y = x^3 - 4x^2 - x + 4$ d) $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

a) • Cortes con el eje X:

$y = 0 \to -x^2 - x + 12 = 0 \to \begin{cases} x = -4 \\ x = 3 \end{cases} \to (-4, 0), (3, 0)$

• Corte con el eje Y: $x = 0 \to y = 12 \to (0, 12)$

b) • Cortes con el eje X:

$y = 0 \to x^3 - 4x^2 - x + 4 = 0 \to \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = 4 \end{cases} \to (-1, 0), (1, 0), (4, 0)$

• Corte con el eje Y: $x = 0 \to y = 4 \to (0, 4)$

c) • Cortes con el eje X:

$y = 0 \to x^4 - 8x^2 + 7 = 0 \to \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = \pm\sqrt{7} \end{cases} \to (-1, 0), (1, 0), \left(-\sqrt{7}, 0\right), \left(\sqrt{7}, 0\right)$

• Corte con el eje Y: $x = 0 \to y = 7 \to (0, 7)$

d) • Cortes con el eje X: $y = 0 \to \dfrac{x}{x^2 + 1} = 0 \to x = 0 \to (0, 0)$

• Corte con el eje Y: $x = 0 \to y = 0 \to (0, 0)$

e) • Cortes con el eje X: $y = 0 \to \dfrac{3x^2}{x^2 - 1} = 0 \to x = 0 \to (0, 0)$

• Corte con el eje Y: $x = 0 \to y = 0 \to (0, 0)$

041 **Halla los puntos de corte con los ejes de las gráficas de estas funciones.**

a) $y = \dfrac{2x-1}{x-x^2}$ b) $y = \dfrac{x^2-9}{e^{x^2}}$ c) $y = \dfrac{\ln x}{x^2-4}$ d) $y = x + e^{-x}$

a) • Cortes con el eje X:

$$y = 0 \rightarrow \frac{2x-1}{x-x^2} = 0 \rightarrow 2x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2} \rightarrow \left(\frac{1}{2}, 0\right)$$

• Corte con el eje Y: no tiene porque la función no está definida para $x = 0$.

b) • Cortes con el eje X:

$$y = 0 \rightarrow \frac{x^2-9}{e^{x^2}} = 0 \rightarrow x^2 - 9 = 0 \rightarrow x = \pm 3 \rightarrow (-3, 0), (3, 0)$$

• Corte con el eje Y: si $x = 0 \rightarrow y = -9 \rightarrow (0, -9)$

c) • Cortes con el eje X:

$$y = 0 \rightarrow \frac{\ln x}{x^2-4} = 0 \rightarrow \ln x = 0 \rightarrow x = e^0 = 1 \rightarrow (1, 0)$$

• Corte con el eje Y: no tiene porque la función no está definida para $x = 0$.

d) • Cortes con el eje X: $y = 0 \rightarrow x + e^{-x} = 0$ para resolver esta ecuación estudiamos y'.

$y' = 1 - e^{-x} = 0 \rightarrow e^{-x} = 1 \rightarrow -x = \ln 1 = 0 \rightarrow x = 0$

En $(-\infty, 0) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente
En $(0, +\infty) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente

Así, en $x = 0$ alcanza el único mínimo, $(0, 1)$, por lo que no puede haber puntos de corte con el eje X.

• Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = 1 \rightarrow (0, 1)$

042 **Sea la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por: $f(x) = \dfrac{(x+2)^2}{x+1}$**
Calcular su dominio.

(Aragón. Junio 2007. Opción B. Cuestión 2)

$x + 1 = 0 \rightarrow x = -1 \rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1\}$

043 **Dada la función: $f(x) = 1 - \dfrac{3x}{x^2-4}$ se pide el dominio y cortes con el eje X.**

(Murcia. Junio 2008. Bloque 3. Cuestión A)

$$f(x) = 1 - \frac{3x}{x^2-4} = \frac{x^2-4-3x}{x^2-4}$$

$x^2 - 4 = 0 \rightarrow x = \pm 2 \rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

Cortes con el eje X:

$$f(x) = 0 \rightarrow \frac{x^2-3x-4}{x^2-4} = 0 \rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 4 \end{cases} \rightarrow (-1, 0), (4, 0)$$

044 ¿Cuál es el dominio de la función $y = x\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$?

(La Rioja. Junio 2005. Propuesta A. Ejercicio 2)

Se debe verificar que $\dfrac{x+1}{x-1} \geq 0$. Para ello puede ocurrir:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} x+1 \geq 0 \\ x-1 > 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x \geq -1 \\ x > 1 \end{array}\right\} \rightarrow x > 1 \\ \left.\begin{array}{l} x+1 \leq 0 \\ x-1 < 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x \leq -1 \\ x < 1 \end{array}\right\} \rightarrow x \leq -1 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Dom } f = (-\infty, -1] \cup (1, +\infty)$$

045 Si $f(x) = \dfrac{e^{3x} - e^{-3x}}{4x}$, indica de forma razonada en qué valor $x = a$ no está definida $f(x)$.

(Castilla-La Mancha. Junio 2007. Bloque 1. Pregunta A)

El numerador está definido para todos los números reales, por tratarse de una diferencia de dos funciones exponenciales cuyos exponentes son funciones polinómicas.

Así, la función no está definida para $x = 0$, ya que en este punto se anula el denominador.

046 Analiza si estas funciones son simétricas respecto del eje de ordenadas o respecto del origen.

a) $y = x^3 + x$

b) $y = x^4 - 2x^2 + 5$

c) $y = x^2 - x + 3$

d) $y = \dfrac{3x}{x^2 - 9}$

e) $y = \dfrac{\ln|x|}{x+4}$

f) $y = (2x^2 - 1)^2$

a) $f(-x) = (-x)^3 - x = -x^3 - x = -(x^3 + x) = -f(x)$
$\rightarrow$ Simétrica respecto del origen.

b) $f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 + 5 = x^4 - 2x^2 + 5 = f(x)$
$\rightarrow$ Simétrica respecto del eje Y.

c) $f(-x) = (-x)^2 - (-x) + 3 = x^2 + x + 3 \rightarrow$ No es simétrica.

d) $f(-x) = \dfrac{3(-x)}{(-x)^2 - 9} = \dfrac{-3x}{x^2 - 9} = -\dfrac{3x}{x^2 - 9} = -f(x)$
$\rightarrow$ Simétrica respecto del origen.

e) $f(-x) = \dfrac{\ln|-x|}{-x+4} = \dfrac{\ln|x|}{-x+4} \rightarrow$ No es simétrica.

f) $f(-x) = \left(2(-x)^2 - 1\right)^2 = (2x^2 - 1)^2 = f(x) \rightarrow$ Simétrica respecto del eje Y.

047 **Estudia si las siguientes funciones son periódicas y, en caso afirmativo, determina su período.**

a) $y = \cos 3x$

b) $y = \operatorname{sen}^2 x$

c) $y = \operatorname{sen} 4x$

d) $y = 3\cos x$

e) $y = \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

f) $y = x^2 - \operatorname{sen}^2 x$

a)

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$
$f(x)$	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1

La función es periódica de período $\frac{2\pi}{3}$.

b)

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(x)$	0	1	0	1	0

La función es periódica de período π.

c)

x	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{2\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{8}$
$f(x)$	0	1	0	-1	0	1

La función es periódica de período $\frac{2\pi}{4}$.

d)

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(x)$	3	0	-3	0	3

La función es periódica de período 2π.

e)

x	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{9\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{8}$
$f(x)$	0	1	0	-1	0	1

La función es periódica de período $\frac{9\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 2\pi$.

f) Esta función no es periódica.

048 **Halla el dominio de estas funciones y los puntos de corte con los ejes. Razona si son pares o impares, o si no son simétricas.**

a) $y = \frac{x-1}{x^2}$

b) $y = x^2e^{-x}$

c) $y = \sqrt{25 - x^2}$

d) $y = \sqrt{4 - x^2}$

e) $y = 7 - 2x^2$

f) $y = \sqrt{x^2 - 2x + 7}$

a) Dominio $= \mathbb{R} - \{0\}$

- Cortes con el eje X: $y = 0 \rightarrow \frac{x-1}{x^2} = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow (1, 0)$
- Corte con el eje Y: no tiene porque la función no está definida para $x = 0$.

$f(-x) = \frac{-x-1}{(-x)^2} = \frac{-x-1}{x^2} \rightarrow$ No es simétrica.

b) Dominio $= \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X: $y = 0 \rightarrow \frac{x^2}{e^x} = 0 \rightarrow x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$

$f(-x) = \frac{(-x)^2}{e^{-x}} = x^2e^x \rightarrow$ No es simétrica.

c) $25 - x^2 \geq 0 \rightarrow (5 - x)(5 + x) \geq 0 \rightarrow x \in [-5, 5] \rightarrow$ Dominio $= [-5, 5]$

- Cortes con el eje X: $y = 0 \rightarrow \sqrt{25 - x^2} = 0 \rightarrow x = \pm 5 \rightarrow (-5, 0), (5, 0)$
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = 5 \rightarrow (0, 5)$

$f(-x) = \sqrt{25 - (-x)^2} = \sqrt{25 - x^2} = f(x) \rightarrow$ Simétrica respecto del eje Y

d) $4 - x^2 \geq 0 \rightarrow (2 - x)(2 + x) \geq 0 \rightarrow x \in [-2, 2] \rightarrow$ Dominio $= [-2, 2]$

- Cortes con el eje X: $y = 0 \rightarrow \sqrt{4 - x^2} = 0 \rightarrow x = \pm 2 \rightarrow (-2, 0), (2, 0)$
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = 2 \rightarrow (0, 2)$

$f(-x) = \sqrt{4 - (-x)^2} = \sqrt{4 - x^2} = f(x) \rightarrow$ Simétrica respecto del eje Y

e) Dominio $= \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X: $y = 0 \rightarrow 7 - 2x^2 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{7}{2}} \rightarrow \left(-\sqrt{\frac{7}{2}}, 0\right), \left(\sqrt{\frac{7}{2}}, 0\right)$
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = 7 \rightarrow (0, 7)$

$f(-x) = 7 - 2(-x)^2 = 7 - 2x^2 = f(x) \rightarrow$ Simétrica respecto del eje Y

f) $x^2 - 2x + 7 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow$ Dominio $= \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X: $y = 0 \rightarrow \sqrt{x^2 - 2x + 7} = 0 \rightarrow x^2 - 2x + 7 = 0$
$\rightarrow$ No tiene soluciones para ningún x real $\rightarrow$ No corta con el eje X.
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = \sqrt{7} \rightarrow \left(0, \sqrt{7}\right)$

$f(-x) = \sqrt{(-x)^2 - 2(-x) + 7} = \sqrt{x^2 + 2x + 7} \rightarrow$ No es simétrica.

049 **Obtén las ramas parabólicas de estas funciones.**

a) $f(x) = 9x + 6x^2 - x^4$

b) $g(x) = x^3 + 6x^2 - x + 4$

c) $h(x) = -x^4 - 7x^2 + x$

a) $\lim_{x \to +\infty} (9x + 6x^2 - x^4) = -\infty$ $\qquad \lim_{x \to -\infty} (9x + 6x^2 - x^4) = -\infty$

b) $\lim_{x \to +\infty} (x^3 + 6x^2 - x + 4) = +\infty$ $\qquad \lim_{x \to -\infty} (x^3 + 6x^2 - x + 4) = -\infty$

c) $\lim_{x \to +\infty} (-x^4 - 7x^2 + x) = -\infty$ $\qquad \lim_{x \to -\infty} (-x^4 - 7x^2 + x) = -\infty$

050 **Determina las asíntotas y las ramas infinitas de las siguientes funciones.**

a) $f(x) = \dfrac{e^x}{e^{2x} - 1}$ c) $h(x) = \dfrac{3x^3}{x^2 - 4}$

b) $g(x) = \dfrac{x - 1}{x + 1}$ d) $v(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x}$

a) $e^{2x} - 1 = 0 \rightarrow e^{2x} = 1 \rightarrow 2x = \ln 1 = 0 \rightarrow x = 0$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x}{e^{2x} - 1} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical: $x = 0$

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x}{e^{2x} - 1} = 0 \rightarrow$ Asíntota horizontal: $y = 0$

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas, ya que tiene asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$.

b) $x + 1 = 0 \rightarrow x = -1$

$\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x - 1}{x + 1} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical: $x = -1$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x - 1}{x + 1} = 1 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x - 1}{x + 1} = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Asíntota horizontal: } y = 1$$

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas ya que tiene asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$.

c) $x^2 + 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{3x^3}{x^2 - 4} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical: $x = -2$

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x^3}{x^2 - 4} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical: $x = 2$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^3}{x^2 - 4} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^3}{x^2 - 4} = -\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{h(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^3}{x(x^2 - 4)} = 3 \rightarrow m = 3 \\ \lim\limits_{x \to \infty} \big(h(x) - mx\big) = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{3x^3}{x^2 - 4} - 3x\right) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{12x}{x^2 - 4} = 0 \rightarrow n = 0 \end{array}\right\}$$

$\rightarrow$ Asíntota oblicua: $y = 3x$

No tiene ramas parabólicas ya que tiene asíntota oblicua cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$.

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - 9}{x} = \infty \to$ Asíntota vertical: $x = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 9}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 - 9}{x} = -\infty \end{array}\right\} \to \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{v(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 - 9}{x^2} = 1 \to m = 1 \\ \lim\limits_{x \to \infty} \big(v(x) - mx\big) = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^2 - 9}{x} - x\right) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{-9}{x} = 0 \to n = 0 \end{array}\right\}$$

$\to$ Asíntota oblicua: $y = x$

No tiene ramas parabólicas ya que tiene asíntota oblicua cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$.

051 Calcular las asíntotas de la función $f(x) = \dfrac{(2x - 1)^2}{4x^2 + 1}$.

(Castilla y León. Junio 2008. Prueba B. Cuestión 1)

$4x^2 + 1 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R} \to$ No tiene asíntotas verticales.

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(2x - 1)^2}{4x^2 - 1} = 1 \to$ Asíntota horizontal: $y = 1$

No tiene asíntotas oblicuas ya que tiene asíntota horizontal cuando $x \to \infty$.

052 Se consideran las funciones reales:

$$f(x) = 12x^3 - 8x^2 + 9x - 5 \qquad g(x) = 6x^2 - 7x + 2$$

Determinar las ecuaciones de las asíntotas a la gráfica de la función $\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

(C. Valenciana. Junio 2007. Bloque 3. Problema 1)

$6x^2 - 7x + 2 = 0 \to x = \dfrac{1}{2}, x = \dfrac{2}{3}$

$\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{12x^3 - 8x^2 + 9x - 5}{6x^2 - 7x + 2} = \infty \to$ Asíntota vertical: $x = \dfrac{1}{2}$

$\lim\limits_{x \to \frac{2}{3}} \dfrac{12x^3 - 8x^2 + 9x - 5}{6x^2 - 7x + 2} = \infty \to$ Asíntota vertical: $x = \dfrac{2}{3}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{12x^3 - 8x^2 + 9x - 5}{6x^2 - 7x + 2} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{12x^3 - 8x^2 + 9x - 5}{6x^2 - 7x + 2} = -\infty \end{array}\right\} \to \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{12x^3 - 8x^2 + 9x - 5}{x(6x^2 - 7x + 2)} = 2 \to m = 2 \\ \lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{12x^3 - 8x^2 + 9x - 5}{6x^2 - 7x + 2} - 2x\right) = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{6x^2 + 5x - 5}{6x^2 - 7x + 2}\right) = 1 \to n = 1 \end{array}\right\}$$

$\to$ Asíntota oblicua: $y = 2x + 1$

053 Sea la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \frac{(x+2)^2}{x+1}$$

Analizar sus asíntotas verticales, horizontales y oblicuas y determinar las que existan.

(Aragón. Junio 2007. Opción B. Cuestión 2)

$$x + 1 = 0 \to x = -1$$

$$\lim_{x \to -1} \frac{(x+2)^2}{x+1} = \infty \to \text{Asíntota vertical: } x = -1$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(x+2)^2}{x+1} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{(x+2)^2}{x+1} = -\infty \end{array}\right\} \to \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(x+2)^2}{x(x+1)} = 1 \to m = 1 \\ \lim\limits_{x \to \infty} \big(f(x) - mx\big) = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{(x+2)^2}{x+1} - x\right) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x+4}{x+1} = 3 \to n = 3 \end{array}\right\}$$

$$\to \text{Asíntota oblicua: } y = x + 3$$

054 Dada la función:

$$f(x) = 1 - \frac{3x}{x^2 - 4}$$

se pide:

a) Asíntotas verticales (calculando los límites laterales).

b) Asíntotas horizontales y oblicuas.

(Murcia. Junio 2008. Bloque 3. Cuestión A)

a) $f(x) = 1 - \dfrac{3x}{x^2-4} = \dfrac{x^2-4-3x}{x^2-4}$ $\qquad x^2 - 4 = 0 \to \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{x^2-4-3x}{x^2-4} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{x^2-4-3x}{x^2-4} = +\infty \end{array}\right\} \to \text{Asíntota vertical: } x = -2$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x^2-4-3x}{x^2-4} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x^2-4-3x}{x^2-4} = +\infty \end{array}\right\} \to \text{Asíntota vertical: } x = 2$$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2-4-3x}{x^2-4} = 1 \to$ Asíntota horizontal: $y = 1$

No tiene asíntotas oblicuas ya que tiene asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$.

055 Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow \log \sqrt[x]{\frac{1+x}{1-x}}$$

Calcular las asíntotas de $f(x)$.

(Aragón. Junio 2008. Bloque 3. Opción A)

Descomponemos la función en otras más sencillas:

$$f(x) = \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} \cdot \log \frac{1+x}{1-x}$$

Se estudia el dominio de cada factor:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{x} \rightarrow x \neq 0 \\ \log \dfrac{1+x}{1-x} \rightarrow \dfrac{1+x}{1-x} > 0 \rightarrow x \in (-1, 1) \end{array}\right\} \rightarrow \text{Dom } f = (-1, 1) - \{0\}$$

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{1}{x} \cdot \log \frac{1+x}{1-x} = +\infty \rightarrow \text{Asíntota vertical: } x = -1$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x} \cdot \log \frac{1+x}{1-x} = +\infty \rightarrow \text{Asíntota vertical: } x = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \cdot \log \frac{1+x}{1-x} = \lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x) - \log(1-x)}{x} \rightarrow \frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{1}{(1+x)\ln 10} + \dfrac{1}{(1-x)\ln 10}}{x} \neq \infty$$

$\rightarrow$ No tiene asíntota vertical en $x = 0$.

No tiene asíntotas horizontales ni oblicuas por tener su dominio restringido.

056 Considera la función definida para $x \neq -2$ por: $f(x) = \dfrac{2x^2+2}{x+2}$

a) Halla las asíntotas de la gráfica de f.

b) Estudia la posición relativa de la gráfica de f respecto de sus asíntotas.

(Andalucía. Año 2003. Modelo 5. Opción B. Ejercicio 2)

a) $x + 2 = 0 \rightarrow x = -2$

$$\lim_{x \to -2} \frac{2x^2+2}{x+2} = \infty \rightarrow \text{Asíntota vertical: } x = -2$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2+2}{x+2} = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2+2}{x+2} = -\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2+2}{x(x+2)} = 2 \rightarrow m = 2 \\ \displaystyle\lim_{x \to \infty} \big(f(x) - mx\big) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{2x^2+2}{x+2} - 2x\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{-4x+2}{x+2} = -4 \rightarrow n = -4 \end{array}\right\}$$

$\rightarrow$ Asíntota oblicua: $y = 2x - 4$

b) – Situación de la gráfica con respecto de la asíntota vertical:

- Por la izquierda: $\lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{2x^2+2}{x+2} = -\infty$
- Por la derecha: $\lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{2x^2+2}{x+2} = +\infty$

– Situación de la gráfica con respecto a la asíntota oblicua:

- $x \to +\infty \to \dfrac{2x^2+2}{x+2} - (2x-4) = \dfrac{10}{x+2} > 0$
  $\to f(x)$ está por encima de la asíntota.
- $x \to -\infty \to \dfrac{2x^2+2}{x+2} - (2x-4) = \dfrac{10}{x+2} < 0$
  $\to f(x)$ está por debajo de la asíntota.

057 **Halla las asíntotas de la función $y = \dfrac{2x^2+x}{x-1}$.**

(Navarra. Septiembre 2007. Grupo 2. Opción D)

Dom $f = \mathbb{R} - \{1\}$ $\qquad \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x^2+x}{x-1} = \infty \to$ Asíntota vertical: $x = 1$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2+x}{x-1} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^2+x}{x-1} = -\infty \end{array}\right\} \to \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^2+x}{x(x-1)} = 2 \to m = 2 \\ \lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{2x^2+x}{x-1} - 2x\right) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x}{x-1} = 3 \to n = 3 \end{array}\right\} \to \text{Asíntota oblicua: } y = 2x+3$$

058 **Considera $f\colon (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = \dfrac{x(\mathrm{Ln}\, x)^2}{(x-1)^2}$, siendo Ln la función logaritmo neperiano.**

Estudia la existencia de asíntota horizontal para la gráfica de esta función.

(Andalucía. Año 2006. Modelo 5. Opción A. Ejercicio 1)

$$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x(\ln x)^2}{(x-1)^2} \to \frac{\infty}{\infty}$$

$$\xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^2 + x \cdot 2\ln x \cdot \dfrac{1}{x}}{2(x-1)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^2 + 2\ln x}{2(x-1)} \to \frac{\infty}{\infty}$$

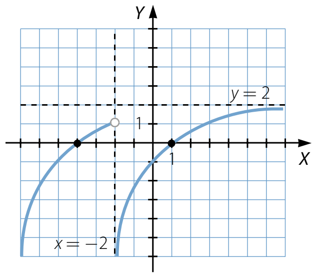
$$\xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\dfrac{2}{x}\ln x + \dfrac{2}{x}}{2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2\ln x + 2}{2x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x + 1}{x} \to \frac{\infty}{\infty}$$

$$\xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \to \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x(\ln x)^2}{(x-1)^2} = 0$$

$\to$ Asíntota horizontal: $y = 0$

059 Dibuja la gráfica de una función que tenga las siguientes características:

- El dominio es todos los números reales.
- Corta al eje X en los puntos $x = 1$ y $x = -4$.
- Tiene como asíntota vertical la recta $x = -2$.
- La recta $y = 2$ es una asíntota horizontal si $x \to +\infty$.
- Tiene una rama infinita cuando $x \to -\infty$.



060 De la función $f(x) = \dfrac{ax^2 + b}{a - x}$ con $a, b \in \mathbb{R}$, sabemos que pasa por el punto (1, 2), y que tiene una asíntota oblicua cuya pendiente es −6.

a) Determina los valores a y b de la función.

b) Determina, si existen, las asíntotas verticales de dicha función.

(Castilla-La Mancha. Septiembre 2007. Bloque 1. Pregunta B)

a) • Pasa por (1, 2) $\to f(1) = 2 \to \dfrac{a + b}{a - 1} = 2 \to a + b = 2a - 2 \to b = a - 2$

• Tiene una asíntota oblicua con pendiente −6:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{ax^2 + b}{x(a - x)} = -6 \to -a = -6 \to a = 6 \to b = 6 - 2 = 4$$

b) $f(x) = \dfrac{6x^2 + 4}{6 - x} \to 6 - x = 0 \to x = 6$

$\lim\limits_{x \to 6} f(x) = \infty \to$ Asíntota vertical: $x = 6$

061 Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de las siguientes funciones.

a) $y = x^3 + 6x^2 - 15x + 3$

b) $y = \dfrac{4x^2 + 1}{x}$

c) $y = \dfrac{1}{(x - 3)^2}$

d) $y = x^4 - 24x^3$

e) $y = \dfrac{3^x + 3^{-x}}{2}$

f) $y = \dfrac{x^4 + 2}{x}$

a) Dominio $= \mathbb{R}$

$y' = 3x^2 + 12x - 15 = 0 \to \begin{cases} x = -5 \\ x = 1 \end{cases}$

• En $(-\infty, -5) \cup (1, +\infty) \to y' > 0 \to$ Función creciente

• En $(-5, 1) \to y' < 0 \to$ Función decreciente

En $x = -5$ presenta un máximo y en $x = 1$, un mínimo

b) Dominio $= \mathbb{R} - \{0\}$

$y' = \dfrac{4x^2 - 1}{x^2} = 0 \rightarrow x^2 = \dfrac{1}{4} \rightarrow x = \pm\dfrac{1}{2}$

- En $\left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right) \cup \left(\dfrac{1}{2}, +\infty\right) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente
- En $\left(\dfrac{-1}{2}, 0\right) \cup \left(0, \dfrac{1}{2}\right) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente

En $x = \dfrac{-1}{2}$ presenta un máximo y en $x = \dfrac{1}{2}$, un mínimo.

c) Dominio $= \mathbb{R} - \{3\}$

$y' = \dfrac{-2}{(x-3)^3} \neq 0$ en todo el dominio $\rightarrow$ No tiene máximos ni mínimos.

- En $(-\infty, 3) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente
- En $(3, +\infty) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente

d) Dominio $= \mathbb{R}$

$y' = 4x^3 - 72x^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 18 \end{cases} \qquad y'' = 12x^2 - 144x$

En $x = 18 \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Presenta un mínimo.

Por tanto, en $(-\infty, 18)$ la función es decreciente y en $(18, +\infty)$, es creciente.

e) Dominio $= \mathbb{R}$

$y' = \dfrac{3^x \ln 3 - 3^{-x} \ln 3}{2} = 0 \rightarrow 3^x - \dfrac{1}{3^x} = 0 \rightarrow (3^x)^2 - 1 = 0 \rightarrow 3^x = \pm 1$

Solo es posible $3^x = 1 \rightarrow x = \log_3 1 \rightarrow x = 0$

- En $(-\infty, 0) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente
- En $(0, +\infty) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente

En $x = 0$ presenta un mínimo.

f) Dominio $= \mathbb{R} - \{0\}$

$y' = \dfrac{3x^4 - 2}{x^2} = 0 \rightarrow 3x^4 - 2 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt[4]{\dfrac{2}{3}}$

- En $\left(-\infty, -\sqrt[4]{\dfrac{2}{3}}\right) \cup \left(\sqrt[4]{\dfrac{2}{3}}, +\infty\right) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente
- En $\left(-\sqrt[4]{\dfrac{2}{3}}, 0\right) \cup \left(0, \sqrt[4]{\dfrac{2}{3}}\right) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente

En $x = -\sqrt[4]{\dfrac{2}{3}}$ presenta un máximo y en $x = \sqrt[4]{\dfrac{2}{3}}$, un mínimo.

062 Halla el crecimiento y decrecimiento, y los máximos y los mínimos de estas funciones.

a) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$ b) $y = \dfrac{\ln x}{x^2}$ c) $y = \dfrac{x+4}{x-4}$ d) $y = \dfrac{x^2}{3^x}$

a) $x^2 - 2x \geq 0 \rightarrow x(x-2) \geq 0 \rightarrow$ Dominio $= (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$

$y' = \dfrac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x}} = 0 \rightarrow x = 1$ que no está en el dominio.

- En $(-\infty, 0) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente
- En $(2, +\infty) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente

b) Dominio $= (0, +\infty)$

$y' = \dfrac{1 - 2\ln x}{x^3} = 0 \rightarrow 2\ln x = 1 \rightarrow \ln x = \dfrac{1}{2} \rightarrow x = \sqrt{e}$

- En $\left(0, \sqrt{e}\right) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente
- En $\left(\sqrt{e}, +\infty\right) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente

En $x = \sqrt{e}$ presenta un máximo.

c) Dominio $= \mathbb{R} - \{4\}$

$y' = \dfrac{-8}{(x-4)^2} < 0$ en $\mathbb{R} - \{4\} \rightarrow$ Función decreciente

d) Dominio $= \mathbb{R}$

$y' = \dfrac{2x - x^2 \ln 3}{3^x} = 0 \rightarrow x(2 - x\ln 3) = 0 \rightarrow x = 0,\ x = \dfrac{2}{\ln 3}$

- En $(-\infty, 0) \cup \left(\dfrac{2}{\ln 3}, +\infty\right) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente
- En $\left(0, \dfrac{2}{\ln 3}\right) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente

En $x = \dfrac{2}{\ln 3}$ presenta un máximo.

063 **Dada la función: $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x}{e^x}$**

a) Estudia el crecimiento y decrecimiento de la función *f*.

b) Calcula los máximos y mínimos de *f*.

(Canarias. Septiembre 2007. Opción A. Cuestión 2)

a) Dominio $f = \mathbb{R}$

$f'(x) = \dfrac{-2x^2 + 7x - 3}{e^x} = 0 \rightarrow -2x^2 + 7x - 3 = 0 \rightarrow x = 3,\ x = \dfrac{1}{2}$

- En $\left(-\infty, \dfrac{1}{2}\right) \cup (3, +\infty) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente
- En $\left(\dfrac{1}{2}, 3\right) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente

b) $x = \dfrac{1}{2} \rightarrow f\left(\dfrac{1}{2}\right) \rightarrow \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{-1}{\sqrt{e}}\right)$ Mínimo

$x = 3 \rightarrow f(3) = \dfrac{9}{e^3} \rightarrow \left(3, \dfrac{9}{e^3}\right)$ Máximo

064 Estudia el crecimiento y decrecimiento de la función

$$f(x) = \frac{x-2}{x^2-4x+7}$$

¿Tiene máximos o mínimos?

Dom $f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{-x^2+4x-1}{(x^2-4x+7)^2} = 0 \rightarrow -x^2+4x-1 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 2-\sqrt{3} = 0{,}27 \\ x = 2+\sqrt{3} = 3{,}73 \end{cases}$$

- En $\left(-\infty, 2-\sqrt{3}\right) \cup \left(2+\sqrt{3}, +\infty\right) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente
- En $\left(2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}\right) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente

En $x = 2-\sqrt{3}$, $f(x)$ presenta un mínimo y en $x = 2+\sqrt{3}$, un máximo.

065 Dada la función:

$$f(x) = 1 - \frac{3x}{x^2-4}$$

se pide sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus extremos.

(Murcia. Junio 2008. Bloque 3. Cuestión A)

$$f(x) = 1 - \frac{3x}{x^2-4} = \frac{x^2-4-3x}{x^2-4}$$

$x^2-4=0 \rightarrow x = \pm 2$

Dom $f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

$$f'(x) = \frac{3x^2+12}{(x^2-4)^2} > 0$$

Por tanto, $f(x)$ es creciente en $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$.

No presenta máximos ni mínimos.

066 Sea la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \frac{(x+2)^2}{x+1}$$

Analizar sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

(Aragón. Junio 2007. Opción B. Cuestión 2)

Dom $f = \mathbb{R} - \{-1\}$

$$f'(x) = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} = 0 \rightarrow x(x+2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

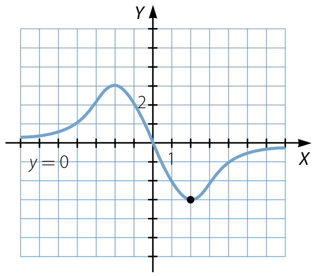
- En $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente
- En $(-2, -1) \cup (-1, 0) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente

$x = -2 \rightarrow f(-2) = 0 \rightarrow (-2, 0)$ Máximo

$x = 0 \rightarrow f(0) = 4 \rightarrow (0, 4)$ Mínimo

067 Dibuja la gráfica de una función que cumpla las siguientes propiedades:

- Está definida en toda la recta real.
- Es simétrica respecto del origen.
- El eje X es una asíntota horizontal.
- Tiene un mínimo en el punto $(2, -3)$.



068 Considera la siguiente función: $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$

Determina:

a) Su dominio.
b) Los puntos de corte con los ejes de coordenadas.
c) Si su gráfica es simétrica respecto del origen o respecto del eje Y.
d) Las asíntotas.
e) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
f) Los máximos y mínimos.

a) $x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = \pm 1 \rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

b) Cortes con el eje X: $f(x) = 0 \rightarrow \dfrac{x^2}{x^2 - 1} = 0 \rightarrow x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$

Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$

c) $f(-x) = \dfrac{(-x)^2}{(-x)^2 - 1} = \dfrac{x^2}{x^2 - 1} = f(x) \rightarrow$ Es simétrica respecto del eje Y.

d) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2}{x^2 - 1} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical: $x = -1$

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2}{x^2 - 1} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical: $x = 1$

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2}{x^2 - 1} = 1 \rightarrow$ Asíntota horizontal: $y = 1$

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas ya que tiene asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$.

e) $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2 - 1)^2} = 0 \rightarrow x = 0$

- En $(-\infty, -1) \cup (-1, 0) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente
- En $(0, 1) \cup (1, +\infty) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente

f) $x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$ Máximo

No presenta mínimos.

069 Considera la función: $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2}$

a) Estudia su dominio.
b) Halla los puntos en que la gráfica corta a los ejes de coordenadas.
c) Analiza si su gráfica es simétrica respecto del origen o respecto del eje Y.
d) Calcula las asíntotas.
e) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
f) Halla los máximos y mínimos.

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0\}$

b) Cortes con el eje X: $f(x) = 0 \rightarrow \dfrac{x+1}{x^2} = 0 \rightarrow x + 1 = 0 \rightarrow x = -1 \rightarrow (-1, 0)$

Corte con el eje Y: no tiene.

c) $f(-x) = \dfrac{-x+1}{(-x)^2} = \dfrac{-x+1}{x^2}$

$\rightarrow$ No es simétrica ya que $f(-x) \neq f(x)$ y $f(-x) \neq -f(x)$.

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x+1}{x^2} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical: $x = 0$

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x+1}{x^2} = 0 \rightarrow$ Asíntota horizontal: $y = 0$

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas ya que tiene asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$.

e) $f'(x) = \dfrac{-x-2}{x^3} = 0 \rightarrow x = -2$

- En $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente
- En $(-2, 0) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente

f) $x = -2 \rightarrow f(-2) = \dfrac{-1}{4} \rightarrow \left(-2, \dfrac{-1}{4}\right)$ Mínimo

No presenta máximos.

070 Calcular los valores de a y b para que la función $f(x) = \dfrac{bx}{x-a}$ tenga como asíntota vertical la recta $x = 2$ y como asíntota horizontal la recta $y = 3$.
Razonar si para $a = 2$ y $b = 3$ la función $f(x)$ tiene algún mínimo relativo.

(Aragón. Junio 2006. Opción A. Cuestión 2)

Asíntota vertical $x = 2 \rightarrow a = 2$

Asíntota horizontal $y = 3 \rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{bx}{x-2} = 3 \rightarrow b = 3$

Así, tenemos que: $f(x) = \dfrac{3x}{x-2}$

$f'(x) = \dfrac{-6}{(x-2)^2} < 0 \rightarrow f(x)$ creciente en $\mathbb{R} - \{2\} \rightarrow$ No puede tener mínimos.

071 **Determina los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión de las siguientes funciones.**

a) $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 6$

b) $y = \dfrac{x-2}{x+2}$

c) $y = x^4 - 8x^2 + 7$

d) $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

a) Dominio $= \mathbb{R}$

$y' = 3x^2 - 6x + 2$

$y'' = 6x - 6 = 0 \rightarrow x = 1$

- En $(-\infty, 1) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Función convexa
- En $(1, +\infty) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función cóncava

En $x = 1$ presenta un punto de inflexión.

b) Dominio $= \mathbb{R} - \{-2\}$

$$y' = \frac{4}{(x+2)^2}$$

$$y'' = \frac{-8}{(x+2)^3} \neq 0 \text{ en } \mathbb{R} - \{-2\}$$

No presenta puntos de inflexión.

- En $(-\infty, -2) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava
- En $(-2, +\infty) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa

c) Dominio $= \mathbb{R}$

$y' = 4x^3 - 16x$

$$y'' = 12x^2 - 16 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{16}{12}} = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$$

- En $\left(-\infty, -\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}, +\infty\right) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava
- En $\left(-\dfrac{2}{\sqrt{3}}, \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa

En $x = \pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ presenta puntos de inflexión.

d) Dominio $= \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$$y' = \frac{-4x}{(x^2-1)^2}$$

$$y'' = \frac{12x^2+4}{(x^2-1)^3} \neq 0 \text{ en } \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

No presenta puntos de inflexión.

- En $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava
- En $(-1, 1) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa

072 **Halla la concavidad y convexidad y los puntos de inflexión de estas funciones.**

a) $y = x^2e^x$ b) $y = \dfrac{x}{\ln x}$ c) $y = x - sen\ x$ d) $y = \sqrt{x^2 - 16}$

a) Dominio $= \mathbb{R}$

$y' = e^x(2x + x^2)$ $y'' = e^x(2 + 4x + x^2) = 0 \rightarrow x = -2 \pm \sqrt{2}$

- En $\left(-\infty, -2-\sqrt{2}\right) \cup \left(-2+\sqrt{2}, +\infty\right) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava
- En $\left(-2-\sqrt{2}, -2+\sqrt{2}\right) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa

En $x = -2 \pm \sqrt{2}$ presenta puntos de inflexión.

b) Dominio $= (0, +\infty) - \{1\}$

$$y' = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$$

$$y'' = \frac{2 - \ln x}{x(\ln x)^3} = 0 \rightarrow \ln x = 2 \rightarrow x = e^2$$

- En $(0, 1) \cup (e^2, +\infty) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa
- En $(1, e^2) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava

En $x = e^2$ presenta un punto de inflexión.

c) Dominio $= \mathbb{R}$

$y' = 1 - cos\ x$ $y'' = sen\ x = 0 \rightarrow x = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

- En $(2k', 2k' + 1)$ con $k' \in \mathbb{Z} \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava
- En $(2k' + 1, 2k')$ con $k' \in \mathbb{Z} \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa

En los puntos $x = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ presenta puntos de inflexión.

d) Dominio $= \mathbb{R} - \{-4, 4\}$

$$y' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 16}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 16}}$$

$$y'' = \frac{-16}{(x^2 - 16)\sqrt{x^2 - 16}} < 0 \text{ en } (-\infty, -4) \cup (4, +\infty) \rightarrow \text{Función convexa}$$

No presenta puntos de inflexión.

073 **Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los de concavidad y convexidad. Halla los máximos y mínimos, y los puntos de inflexión de la función $y = \ln(x^2 + 1)$.**

Dominio $= \mathbb{R}$ $y' = \dfrac{2x}{x^2 + 1} = 0 \rightarrow x = 0$

- En $(-\infty, 0) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente
- En $(0, +\infty) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente

En $x = 0$ presenta un mínimo.

$$y'' = \frac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2} = 0 \rightarrow x = \pm 1$$

- En $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa
- En $(-1, 1) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava

En $x = -1$ y en $x = 1$ presenta puntos de inflexión.

074 Para la función $f(x) = x^3 - 7x$, calcula:

a) Los puntos de corte con los ejes.

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos relativos.

c) Los intervalos de concavidad y convexidad, y los puntos de inflexión.

a) • Cortes con el eje X:

$$f(x) = 0 \rightarrow x^3 - 7x = 0 \rightarrow x(x^2 - 7) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{7} \end{cases}$$
$$\rightarrow \left(-\sqrt{7}, 0\right), (0, 0), \left(\sqrt{7}, 0\right)$$

• Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$

b) Dom $f = \mathbb{R}$ $\quad f'(x) = 3x^2 - 7 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{7}{3}}$

• En $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{7}{3}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{7}{3}}, +\infty\right) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente

• En $\left(-\sqrt{\frac{7}{3}}, \sqrt{\frac{7}{3}}\right) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente

En $x = -\sqrt{\frac{7}{3}}$ presenta un máximo y en $x = \sqrt{\frac{7}{3}}$ un mínimo.

c) $f''(x) = 6x = 0 \rightarrow x = 0$

• En $(-\infty, 0) \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ convexa

• En $(0, +\infty) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ cóncava

En $x = 0$ presenta un punto de inflexión.

075 Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos relativos, los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión de la función $y = x^3 - 3x^2 + x + 1$.

Dominio $= \mathbb{R}$ $\quad y' = 3x^2 - 6x + 1 = 0 \rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{6}}{3}$

• En $\left(-\infty, \frac{3-\sqrt{6}}{3}\right) \cup \left(\frac{3+\sqrt{6}}{3}, +\infty\right) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente

• En $\left(\frac{3-\sqrt{6}}{3}, \frac{3+\sqrt{6}}{3}\right) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente

En $x = \frac{3-\sqrt{6}}{3}$ presenta un máximo y en $x = \frac{3+\sqrt{6}}{3}$, un mínimo.

$y'' = 6x - 6 = 0 \rightarrow x = 1$

• En $(-\infty, 1) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa

• En $(1, +\infty) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava

En $x = 1$ presenta un punto de inflexión.

076 Estudia en qué intervalos la función $f(x) = 3x^3 + x^2 - 1$ es creciente o decreciente y en cuáles es cóncava o convexa.

¿Presenta algún máximo o mínimo? ¿Tiene puntos de inflexión? En caso afirmativo, determina las coordenadas de cada uno de ellos.

$\text{Dom } f = \mathbb{R}$

$f'(x) = 9x^2 + 2x = 0 \rightarrow x(9x + 2) = 0 \rightarrow x = 0,\ x = \dfrac{-2}{9}$

- En $\left(-\infty, \dfrac{-2}{9}\right) \cup (0, +\infty) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente
- En $\left(\dfrac{-2}{9}, 0\right) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente

$x = -\dfrac{2}{9} \rightarrow f\left(\dfrac{-2}{9}\right) = \dfrac{-239}{243} \rightarrow \left(\dfrac{-2}{9}, \dfrac{-239}{243}\right)$ Máximo

$x = 0 \rightarrow f(0) = -1 \rightarrow (0, -1)$ Mínimo

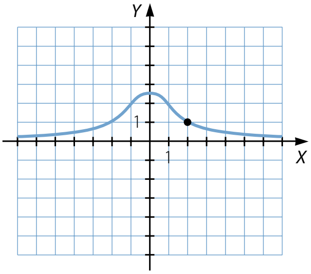
$f''(x) = 18x + 2 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-2}{18} = \dfrac{-1}{9}$

- En $\left(-\infty, \dfrac{-1}{9}\right) \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ convexa
- En $\left(\dfrac{-1}{9}, +\infty\right) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ cóncava

$x = \dfrac{-1}{9} \rightarrow f\left(\dfrac{-1}{9}\right) = \dfrac{-241}{243} \rightarrow \left(\dfrac{-1}{9}, \dfrac{-241}{243}\right)$ Punto de inflexión

077 Dibuja la gráfica de una función que cumpla que:

- Está definida en toda la recta real.
- Es simétrica respecto del eje de ordenadas.
- El eje X es una asíntota horizontal.
- Tiene un punto de inflexión en (2, 1).



078 Estudia el crecimiento y la concavidad de la función $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{Lx}{x}$. ($L =$ logaritmo neperiano)

(Castilla-La Mancha. Septiembre 2005. Bloque 1. Pregunta B)

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \to \ln x = 1 \to x = e$$

- En $(0, e) \to f'(x) > 0 \to f(x)$ creciente
- En $(e, +\infty) \to f'(x) < 0 \to f(x)$ decreciente

En $x = e$ presenta un máximo.

$$f''(x) = \frac{\frac{-1}{x}x^2 - (1 - \ln x)2x}{x^4} = \frac{-1 - (1 - \ln x)2}{x^3} = \frac{-3 + 2\ln x}{x^3} = 0$$

$$\to \ln x = \frac{3}{2} \to x = e^{\frac{3}{2}} \to x = \sqrt{e^3}$$

- En $\left(0, \sqrt{e^3}\right) \to f''(x) < 0 \to f(x)$ convexa
- En $\left(\sqrt{e^3}, +\infty\right) \to f''(x) > 0 \to f(x)$ cóncava

En $x = \sqrt{e^3}$ presenta un punto de inflexión.

079 **Dibuja la gráfica de las siguientes funciones polinómicas, analizando previamente sus características.**

a) $y = x^3 - 4x^2 - x + 4$

b) $y = x^3 - 6x^2 + 12x + 4$

c) $y = x^3 + 3x$

d) $y = x^4 - 8x^2 + 7$

a) Dominio $= \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X: $y = 0 \to \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = 4 \end{cases} \to (-1, 0), (1, 0), (4, 0)$
- Corte con el eje Y: $x = 0 \to y = 4 \to (0, 4)$

Como es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas.

$$\lim_{x \to -\infty} (x^3 - 4x^2 - x + 4) = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} (x^3 - 4x^2 - x + 4) = +\infty$$

$$y' = 3x^2 - 8x - 1 = 0 \to x = \frac{4 \pm \sqrt{19}}{3}$$

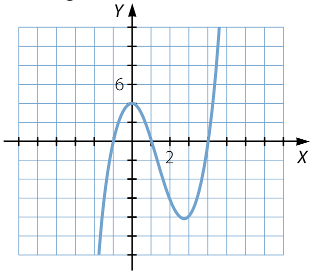
- En $\left(-\infty, \frac{4 - \sqrt{19}}{3}\right) \cup \left(\frac{4 + \sqrt{19}}{3}, +\infty\right) \to y' > 0 \to$ Función creciente
- En $\left(\frac{4 - \sqrt{19}}{3}, \frac{4 + \sqrt{19}}{3}\right) \to y' < 0 \to$ Función decreciente

En $x = \frac{4 - \sqrt{19}}{3}$ presenta un máximo y en $x = \frac{4 + \sqrt{19}}{3}$, un mínimo.

$$y'' = 6x - 8 = 0 \to x = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

- En $\left(-\infty, \frac{4}{3}\right) \to y'' < 0 \to$ Función convexa
- En $\left(\frac{4}{3}, +\infty\right) \to y'' > 0 \to$ Función cóncava

En $x = \frac{4}{3}$ presenta un punto de inflexión.



b) Dominio $= \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X: No podemos resolverse la ecuación por Ruffini, así que lo analizamos después.
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = 4 \rightarrow (0, 4)$

Como es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas.

$\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 - 6x^2 + 12x + 4) = -\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - 6x^2 + 12x + 4) = +\infty$

$y' = 3x^2 - 12x + 12 = 0 \rightarrow x = 2$

- En $(-\infty, 2) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente
- En $(2, +\infty) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente

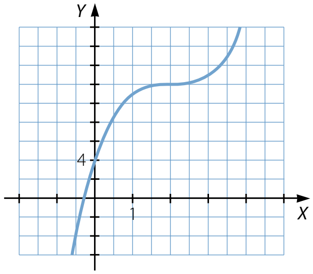
No presenta máximos ni mínimos.

$y'' = 6x - 12 = 0 \rightarrow x = 2$

- En $(-\infty, 2) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa
- En $(2, +\infty) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava

En $x = 2$ presenta un punto de inflexión.

Por último, como en $(-\infty, 2)$ la función es creciente, la imagen de 0 es positiva y $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 - 6x^2 + 12x + 4) = -\infty$, hay un punto de corte en $(-\infty, 0)$.



c) Dominio $= \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X: $x^3 + 3x = 0 \rightarrow x(x^2 + 3) = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$

Como es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas.

$\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 + 3x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 + 3x) = +\infty$

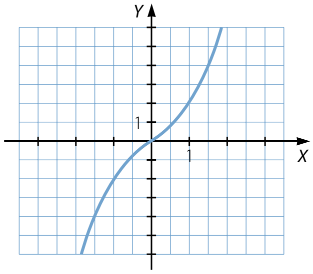
$y' = 3x^2 + 3 \neq 0 \rightarrow$ Función creciente

No presenta máximos ni mínimos.

$y'' = 6x = 0 \rightarrow x = 0$

- En $(-\infty, 0) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa
- En $(0, +\infty) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava

En $x = 0$ presenta un punto de inflexión.



d) Dominio $= \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X: $y = 0 \rightarrow x^4 - 8x^2 + 7 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = \pm\sqrt{7} \end{cases}$
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = 7 \rightarrow (0, 7)$

Como es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas.

$\lim\limits_{x \to -\infty} (x^4 - 8x^2 + 7) = +\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^4 - 8x^2 + 7) = +\infty$

$y' = 4x^3 - 16x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases}$

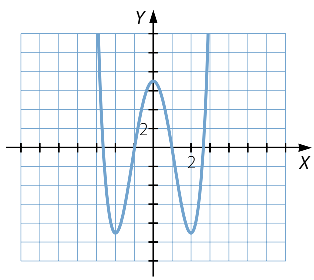
- En $(-\infty, -2) \cup (0, 2) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente
- En $(-2, 0) \cup (2, +\infty) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente

En $x = -2$ y en $x = 2$ presenta dos mínimos y en $x = 0$, un máximo.

$$y'' = 12x^2 - 16 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{16}{12}} = \pm\sqrt{\frac{4}{3}}$$

- En $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{4}{3}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{4}{3}}, +\infty\right) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava
- En $\left(-\sqrt{\frac{4}{3}}, \sqrt{\frac{4}{3}}\right) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa

En $x = \pm\sqrt{\frac{4}{3}}$ presenta puntos de inflexión.



080 a) **Dibujar razonadamente la gráfica de la función $g(x) = x^2 - 4$ cuando $-1 \leq x \leq 4$.**

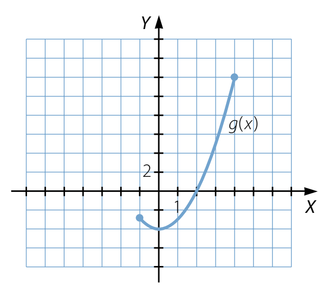
b) **Obtener razonadamente los valores máximo y mínimo absolutos de la función $f(x) = |x^2 - 4|$ en el intervalo $[-1, 4]$.**

(C. Valenciana. Junio 2006. Ejercicio A. Problema 3)

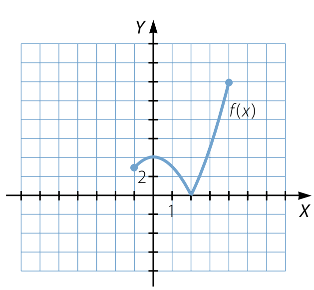
a) Se trata de una parábola de vértice $(0, -4)$ que corta al eje Y en ese mismo punto y que corta al eje X en los puntos $(-2, 0)$ y $(2, 0)$ de los cuales, solo este último está en el intervalo pedido.

$x = -1 \rightarrow y = -3 \rightarrow (-1, -3)$

$x = 4 \rightarrow y = 12 \rightarrow (4, 12)$



b) A partir de la representación anterior, la gráfica de $f(x)$ es la siguiente:



Así, en $(-1, 3)$ y en $(2, 0)$ se alcanzan dos mínimos relativos, siendo el mínimo absoluto el punto $(2, 0)$.

En $(0, 4)$ y en $(4, 12)$ se alcanzan dos máximos relativos, siendo el máximo absoluto el punto $(4, 12)$.

081 La curva de ecuación $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ pasa por los puntos (1, 0) y (0, −1) y tiene un mínimo para $x = 2$. Se pide:

a) Encontrar a, b y c.

b) Representación de forma aproximada de dicha curva.

(Murcia. Septiembre 2005. Bloque 3. Cuestión 1)

a) Pasa por el punto (1, 0) $\rightarrow 1 + a + b + c = 0$

Pasa por el punto (0, −1) $\rightarrow c = -1$

$1 + a + b - 1 = 0 \rightarrow a + b = 0 \rightarrow a = -b$

$y' = 3x^2 + 2ax + b$

Tiene un mínimo para $x = 2 \rightarrow y'(2) = 0 \rightarrow 12 + 4a + b = 0$

$12 + 4a - a = 0 \rightarrow 12 + 3a = 0 \rightarrow 3a = -12 \rightarrow a = -4 \rightarrow b = 4$

Por tanto, la función es: $y = x^3 - 4x^2 + 4x - 1$

b) Dominio $= \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X: $y = 0 \rightarrow x^3 - 4x^2 + 4x - 1 = 0 \rightarrow x = 1,\ x = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = -1 \rightarrow (0, -1)$

Como es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas.

$\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 - 4x^2 + 4x - 1) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - 4x^2 + 4x - 1) = +\infty$

$y' = 3x^2 - 8x + 4 = 0 \rightarrow x = 2,\ x = \dfrac{2}{3}$

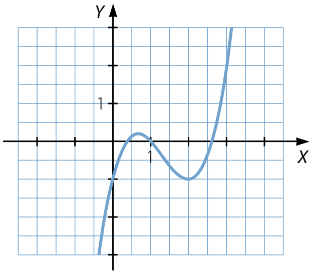
- En $\left(-\infty, \dfrac{2}{3}\right) \cup (2, +\infty) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente
- En $\left(\dfrac{2}{3}, 2\right) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente

En $x = \dfrac{2}{3}$ presenta un máximo y en $x = 2$, un mínimo.

$y'' = 6x - 8 = 0 \rightarrow x = \dfrac{8}{6} = \dfrac{4}{3}$

- En $\left(-\infty, \dfrac{4}{3}\right) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa
- En $\left(\dfrac{4}{3}, +\infty\right) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava

En $x = \dfrac{4}{3}$ presenta un punto de inflexión.



082 **Calcula razonadamente los valores de a y b para que la función:**

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

tenga un extremo relativo en $x = 2$, un punto de inflexión en $x = 0$ y pase por el punto $(1, -5)$.

Representa gráficamente esta función.

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ $\quad$ $f''(x) = 6x + 2a$

Tiene un extremo relativo en $x = 2$:

$f'(2) = 0 \rightarrow 12 + 4a + b = 0$

Tiene un punto de inflexión en $x = 0$:

$f''(0) = 0 \rightarrow 2a = 0 \rightarrow a = 0 \rightarrow b = -12$

Pasa por el punto $(1, -5)$:

$f(1) = -5 \rightarrow 1 + a + b + c = -5 \rightarrow 1 - 12 + c = -5 \rightarrow c = 6$

Por tanto, la función es:

$f(x) = x^3 - 12x + 6$

Para obtener su representación gráfica, analizamos sus características.

Dom $f = \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X:

  $f(x) = 0 \rightarrow x^3 - 12x + 6 = 0$

  No podemos resolver la ecuación por Ruffini, ya que no tiene como raíz ninguno de los divisores de 6.

- Corte con el eje Y:

  $x = 0 \rightarrow f(0) = 6 \rightarrow (0, 6)$

Como f es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas.

$\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 - 12x + 6) = -\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - 12x + 6) = +\infty$

$f'(x) = 3x^2 - 12 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$

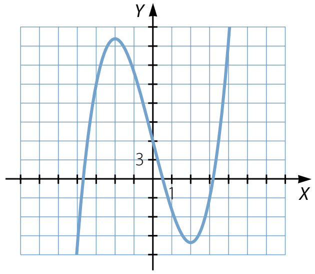
- En $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente
- En $(-2, 2) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente

En $x = -2$ presenta un máximo y en $x = 2$, un mínimo.

$f''(x) = 6x = 0 \rightarrow x = 0$

- En$(-\infty, 0) \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ convexa
- En $(0, +\infty) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ cóncava

En $x = 0$ presenta un punto de inflexión.



083 **Dibuja la gráfica de estas funciones racionales, analizando previamente sus características.**

a) $y = \dfrac{x-1}{x^2}$ b) $y = \dfrac{x-2}{x-3}$ c) $y = \dfrac{x^2}{x+1}$ d) $y = \dfrac{x}{x^2+1}$

a) $x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow$ Dominio $= \mathbb{R} - \{0\}$

- Cortes con el eje X: $y = 0 \rightarrow \dfrac{x-1}{x^2} = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow (1, 0)$
- Corte con el eje Y: no tiene porque no está definida para $x = 0$.

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x-1}{x^2} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical: $x = 0$

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x-1}{x^2} = 0 \rightarrow$ Asíntota horizontal: $y = 0$

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas ya que tiene asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$.

$y' = \dfrac{-x+2}{x^3} = 0 \rightarrow x = 2$

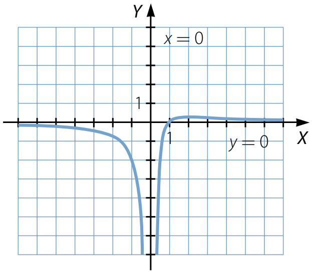
- En $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente
- En $(0, 2) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente

En $x = 2$ presenta un máximo.

$y'' = \dfrac{2x-6}{x^4} = 0 \rightarrow x = 3$

- En $(-\infty, 0) \cup (0, 3) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa
- En $(3, +\infty) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava

En $x = 3$ presenta un punto de inflexión.



b) $x - 3 = 0 \rightarrow x = 3 \rightarrow$ Dominio $= \mathbb{R} - \{3\}$

- Cortes con el eje X: $y = 0 \rightarrow \dfrac{x-2}{x-3} = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow (2, 0)$
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = \dfrac{2}{3} \rightarrow \left(0, \dfrac{2}{3}\right)$

$\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x-2}{x-3} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical: $x = 3$

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x-2}{x-3} = 1 \rightarrow$ Asíntota horizontal: $y = 1$

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas ya que tiene asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$.

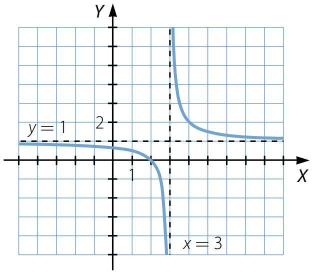
$y' = \dfrac{-1}{(x-3)^2} < 0 \to$ Función decreciente

No presenta máximos ni mínimos.

$y'' = \dfrac{2}{(x-3)^3} \neq 0$

No presenta puntos de inflexión.

- En $(-\infty, 3) \to y'' < 0 \to$ Función convexa
- En $(3, +\infty) \to y'' > 0 \to$ Función cóncava



c) $x + 1 = 0 \to x = -1 \to \text{Dominio} = \mathbb{R} - \{-1\}$

- Cortes con el eje X: $y = 0 \to \dfrac{x^2}{x+1} = 0 \to x = 0 \to (0, 0)$
- Corte con el eje Y: $x = 0 \to y = 0 \to (0, 0)$

$\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2}{x+1} = \infty \to$ Asíntota vertical: $x = -1$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{x+1} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x+1} = +\infty \end{array}\right\} \to \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2}{x(x+1)} = 1 \to m = 1 \\ \lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^2}{x+1} - x\right) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{-x}{x+1} = -1 \to n = -1 \end{array}\right\} \to \begin{array}{l}\text{Asíntota oblicua:} \\ y = x - 1\end{array}$$

No tiene ramas parabólicas ya que tiene asíntota oblicua cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$.

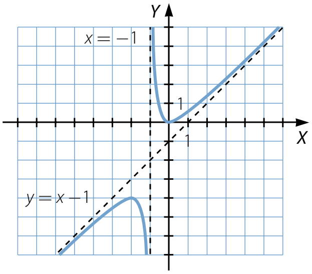
$y' = \dfrac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} = 0 \to \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$

- En $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty) \to y' > 0 \to$ Función creciente
- En $(-2, -1) \cup (-1, 0) \to y' < 0 \to$ Función decreciente

En $x = -2$ presenta un máximo y en $x = 0$ un mínimo.

$y'' = \dfrac{2}{(x+1)^3} \neq 0 \to$ No presenta puntos de inflexión.

- En $(-\infty, -1) \to y'' < 0 \to$ Función convexa
- En $(-1, +\infty) \to y'' > 0 \to$ Función cóncava



d) Dominio $= \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X: $y = 0 \to \dfrac{x}{x^2+1} = 0 \to x = 0 \to (0, 0)$
- Corte con el eje Y: $x = 0 \to y = 0 \to (0, 0)$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{x^2+1} = 0 \to \text{Asíntota horizontal: } y = 0$$

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas ya que tiene asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$.

$$y' = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} = 0 \to x = \pm 1$$

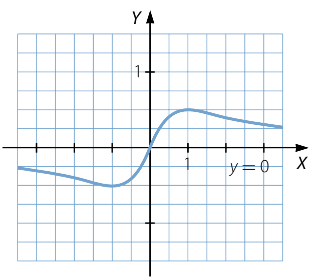
- En $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \to y' < 0 \to$ Función decreciente
- En $(-1, 1) \to y' > 0 \to$ Función creciente

En $x = 1$ presenta un máximo y en $x = -1$, un mínimo.

$$y'' = \frac{2x^3 - 6x}{(x^2+1)^3} = 0 \to x(2x^2 - 6) = 0 \to \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

- En $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(0, \sqrt{3}\right) \to y'' < 0 \to$ Función convexa
- En $\left(-\sqrt{3}, 0\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right) \to y'' > 0 \to$ Función cóncava

En $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$ y $x = \sqrt{3}$ presenta puntos de inflexión.



084 **Representa la función: $f(x) = \dfrac{3x^2 + x + 3}{x^2 + 1}$**

Dom $f = \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X: no tiene ya que $\dfrac{3x^2 + x + 3}{x^2+1} \neq 0$ en $\mathbb{R}$.
- Corte con el eje Y: $x = 0 \to y = 3 \to (0, 3)$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 + x + 3}{x^2+1} = 3 \to \text{Asíntota horizontal: } y = 3$$

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas ya que tiene asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$.

$$f'(x) = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} = 0 \to x = \pm 1$$

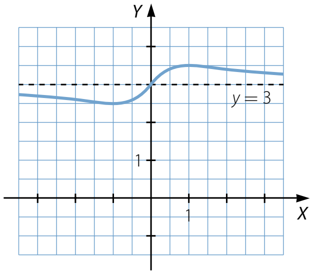
- En $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \to f'(x) < 0 \to f(x)$ decreciente
- En $(-1, 1) \to f'(x) > 0 \to f(x)$ creciente

En $x = 1$ presenta un máximo y en $x = -1$, un mínimo.

$$f''(x) = \frac{2x^3 - 6x}{(x^2+1)^2} = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

- En $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(0, \sqrt{3}\right) \rightarrow f''(x) < 0$
  $\rightarrow f(x)$ convexa
- En $\left(-\sqrt{3}, 0\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right) \rightarrow f''(x) > 0$
  $\rightarrow f(x)$ cóncava

En $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$ y $x = \sqrt{3}$ presenta puntos de inflexión.



085 **Dada la función: $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ se pide:**

a) Dominio de definición y cortes con los ejes.
b) Intervalos en los que es positiva y en los que es negativa.
c) Asíntotas.
d) Intervalos de crecimiento y de decrecimiento.
e) Representación aproximada.

(Murcia. Junio 2006. Bloque 3. Cuestión A)

a) $x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = \pm 1 \rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

- Cortes con el eje X: $f(x) = 0 \rightarrow \dfrac{x}{x^2-1} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow f(0) = 6 \rightarrow (0, 0)$

b) $\begin{cases} x^2 - 1 > 0 \rightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \\ x^2 - 1 < 0 \rightarrow x \in (-1, 1) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f(x) < 0 \text{ en } (-\infty, -1) \cup (0, 1) \\ f(x) > 0 \text{ en } (-1, 0) \cup (1, +\infty) \end{cases}$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x}{x^2 - 1} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical: $x = 1$

$\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x}{x^2 - 1} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical: $x = -1$

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{x^2 - 1} = 0 \rightarrow$ Asíntota horizontal: $y = 0$

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas ya que tiene asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$.

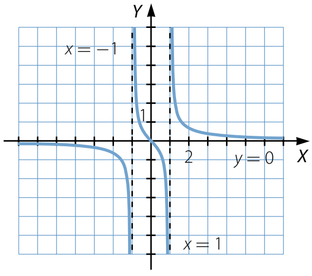
d) $f'(x) = \dfrac{-x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2} < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente

No presenta máximos ni mínimos.

e) $f''(x) = \dfrac{2x^3 + 6x}{(x^2 - 1)^3} = 0 \rightarrow x = 0$

- En $(-\infty, -1) \cup (0, 1) \rightarrow f''(x) < 0$
  $\rightarrow f(x)$ convexa
- En $(-1, 0) \cup (1, +\infty) \rightarrow f''(x) > 0$
  $\rightarrow f(x)$ cóncava

En $x = 0$ presenta un punto de inflexión.



086 Representar la función: $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$ estudiando previamente su dominio de definición y sus máximos y mínimos locales.

¿Tiene f asíntotas oblicuas? Razonar la contestación en caso negativo y calcular en caso afirmativo.

(País Vasco. Junio 2005. Bloque C. Cuestión C)

$x - 1 = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{1\}$

- Cortes con el eje X: $f(x) = 0 \rightarrow \dfrac{x^2}{x-1} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2}{x-1} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical: $x = 1$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{x-1} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x-1} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

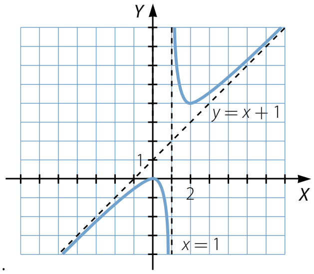
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2}{x(x-1)} = 1 \rightarrow m = 1 \\ \lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^2}{x-1} - x\right) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{x-1} = 1 \rightarrow n = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Asíntota oblicua: } y = x + 1$$

No tiene ramas parabólicas ya que tiene asíntota oblicua cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$.

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = 0 \rightarrow x^2 - 2x = 0 \rightarrow x(x-2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

- En $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente
- En $(0, 1) \cup (1, 2) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente

En $x = 0$ presenta un máximo y en $x = 2$, un mínimo.



087 Sea f la función definida por: $f(x) = \dfrac{x^4 + 3}{x}$, para $x \neq 0$

a) Halla, si existen, los puntos de corte con los ejes y las asíntotas de la gráfica de f.

b) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos de f.

c) Esboza la gráfica de f.

(Andalucía. Junio 2006. Opción B. Ejercicio 1)

a) • Cortes con el eje X: $f(x) = 0 \rightarrow \dfrac{x^4+3}{x} = 0 \rightarrow x^4 + 3 \neq 0$
$\rightarrow$ No tiene puntos de corte con este eje.

• Corte con el eje Y: no tiene porque $f(x)$ no está definida para $x = 0$.

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x^4+3}{x} = \infty \rightarrow \text{Asíntota vertical: } x = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^4+3}{x} = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^4+3}{x} = -\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

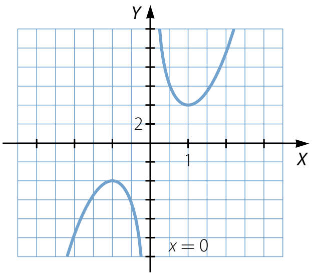
$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^4+3}{x^2} = \infty \rightarrow \text{No tiene asíntotas oblicuas.}$$

b) $f'(x) = \dfrac{3x^4-3}{x^2} = 0 \rightarrow x = \pm 1$

• En $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente

• En $(-1, 0) \cup (0, 1) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente

En $x = -1$ presenta un máximo y en $x = 1$, un mínimo.

c)


088 **Dibujar la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$ indicando su dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento y asíntotas.**

(Madrid. Junio 2006. Opción A. Ejercicio 3)

Dom $f = \mathbb{R} - \{-1\}$

• Cortes con el eje X: $f(x) = 0 \rightarrow \dfrac{2x}{x+1} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$

• Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$

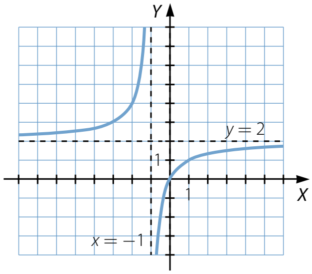
$$\lim_{x \to -1} \frac{2x}{x+1} = \infty \rightarrow \text{Asíntota vertical: } x = -1$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x}{x+1} = 2 \rightarrow \text{Asíntota horizontal: } y = 2$$

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas ya que tiene asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$.

$f'(x) = \dfrac{2}{(x+1)^2} > 0 \rightarrow f(x)$ creciente

No presenta máximos ni mínimos.



089 Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2(1-x)}{x^2-1}$ se pide:

a) Dominio y cortes con el eje X.
b) Puntos de discontinuidad, tipos de discontinuidad y asíntotas verticales (calculando los límites laterales).
c) Asíntotas horizontales y oblicuas.
d) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Extremos.
e) Representación gráfica aproximada teniendo en cuenta los resultados de los apartados anteriores.

(Murcia. Junio 2007. Bloque 3. Cuestión A)

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

- Cortes con el eje X:

$$f(x) = 0 \to \frac{x^2(1-x)}{x^2-1} = 0 \to \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

El único punto de corte con el eje X es $(0, 0)$ ya que en $x = 1$ la función no está definida.

- Corte con el eje Y: $x = 0 \to f(0) = 0 \to (0, 0)$

b) La función es continua en $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{x^2(1-x)}{x^2-1} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{x^2(1-x)}{x^2-1} = -\infty \end{array}\right\} \to \text{Discontinuidad de salto infinito en } x = -1$$

Tiene una asíntota vertical en $x = -1$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x^2(1-x)}{x^2-1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{-x^2}{x+1} = \dfrac{-1}{2} \\ \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x^2(1-x)}{x^2-1} = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{-x^2}{x+1} = \dfrac{-1}{2} \end{array}\right\} \to \text{Discontinuidad evitable en } x = 1$$

c)
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2(1-x)}{x^2-1} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2(1-x)}{x^2-1} = +\infty \end{array}\right\} \to \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2(1-x)}{x(x^2-1)} = -1 \to m = -1 \\ \lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^2-x^3}{x^2-1} + x\right) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2-x}{x^2-1} = 1 \to n = 1 \end{array}\right\} \to \text{Asíntota oblicua: } y = -x + 1$$

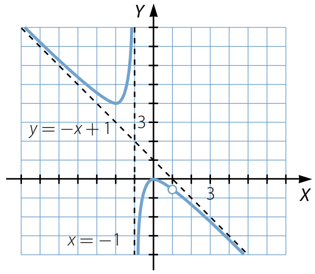
d) $f'(x) = \dfrac{x^2+2x}{x^2-1} = 0$

$$f'(x) = \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

- En $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty) \to f'(x) < 0 \to f(x)$ decreciente
- En $(-2, -1) \cup (-1, 0) \to f'(x) > 0 \to f(x)$ creciente

En $x = -2$ presenta un mínimo y en $x = 0$, un máximo.

e)



090 **Dibuja la gráfica de estas funciones con radicales, analizando previamente sus características.**

a) $y=\sqrt{2-x}$ b) $y=2\sqrt{1-\frac{1}{25}x^2}$ c) $y=\sqrt{x^2-9}$ d) $y=-\sqrt{x+3}$

a) $2-x\geq 0 \rightarrow x\leq 2 \rightarrow$ Dominio $=(-\infty, 2]$

- Cortes con el eje X: $\sqrt{2-x}=0 \rightarrow x=2 \rightarrow (2, 0)$
- Corte con el eje Y: $x=0 \rightarrow y=\sqrt{2} \rightarrow \left(0, \sqrt{2}\right)$

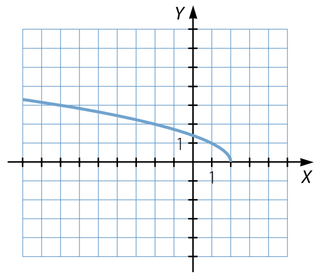
No tiene asíntotas verticales.

$\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{2-x}=+\infty \rightarrow$ No tiene asíntotas horizontales.

$\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{2-x}}{x}=0$
$\rightarrow$ No tiene asíntotas oblicuas.

$y'=\dfrac{-1}{2\sqrt{2-x}}<0 \rightarrow$ Función decreciente

$y''=\dfrac{-1}{2(2-x)\sqrt{2-x}}<0$
$\rightarrow$ Función convexa



b) $1-\dfrac{x^2}{25}\geq 0 \rightarrow x\in[-5, 5] \rightarrow$ Dominio $=[-5, 5]$

- Cortes con el eje X: $\sqrt{1-\dfrac{x^2}{25}}=0 \rightarrow 25-x^2=0 \rightarrow x=\pm 5 \rightarrow (-5, 0), (5, 0)$
- Corte con el eje Y: $x=0 \rightarrow y=2 \rightarrow (0, 2)$

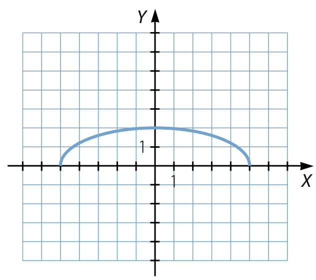
No tiene asíntotas.

$y'=\dfrac{-4x}{10\sqrt{25-x^2}}=0 \rightarrow x=0$

- En $(-5, 0) \rightarrow y'>0 \rightarrow$ Función creciente
- En $(0, 5) \rightarrow y'<0 \rightarrow$ Función decreciente

En $x=0$ presenta un máximo.

$y''=\dfrac{-100}{10(25-x^2)\sqrt{25-x^2}}<0$
$\rightarrow$ Función convexa



c) $x^2 - 9 \geq 0 \rightarrow x \in (-\infty, -3] \cup [3, +\infty) \rightarrow \text{Dominio} = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$

- Cortes con el eje X: $\sqrt{x^2 - 9} = 0 \rightarrow x = \pm 3 \rightarrow (-3, 0), (3, 0)$
- Corte con el eje Y: no tiene porque $f(x)$ no está definida para $x = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - 9} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 - 9} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 - 9}}{x} = 1 \rightarrow m = 1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 - 9} - x\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 9 - x^2}{\sqrt{x^2 - 9} + x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-9}{\sqrt{x^2 - 9} + x} = 0 \rightarrow n = 0 \end{array}\right\}$$
$\rightarrow$ Asíntota oblicua: $y = x$

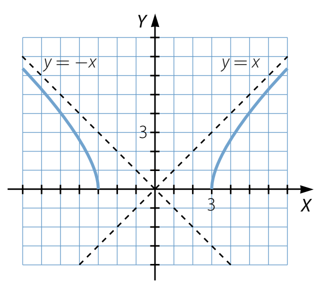
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 - 9}}{x} = 1 \rightarrow m = -1 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 - 9} + x\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 - 9 - x^2}{\sqrt{x^2 - 9} - x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-9}{\sqrt{x^2 - 9} + x} = 0 \rightarrow n = 0 \end{array}\right\}$$
$\rightarrow$ Asíntota oblicua: $y = -x$

$$y' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 9}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 9}} = 0 \rightarrow x = 0$$

- En $(-\infty, -3) \rightarrow y' < 0$ $\rightarrow$ Función decreciente
- En $(3, +\infty) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente

$$y'' = \frac{-9}{(x^2 - 9)\sqrt{x^2 - 9}} < 0$$
$\rightarrow$ Función convexa

No presenta puntos de inflexión.



d) $x + 3 \geq 0 \rightarrow x \geq -3 \rightarrow \text{Dominio} = [-3, +\infty)$

- Cortes con el eje X: $-\sqrt{x + 3} = 0 \rightarrow x = -3 \rightarrow (-3, 0)$
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = -\sqrt{3} \rightarrow \left(0, -\sqrt{3}\right)$

No tiene asíntotas verticales.

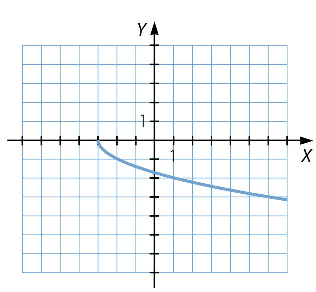
$$\lim_{x \to +\infty} -\sqrt{x + 3} = -\infty \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{-\sqrt{x + 3}}{x} = 0$$
$\rightarrow$ No tiene asíntotas oblicuas.

$$y' = \frac{-1}{2\sqrt{x + 3}} < 0 \rightarrow \text{Función decreciente.}$$

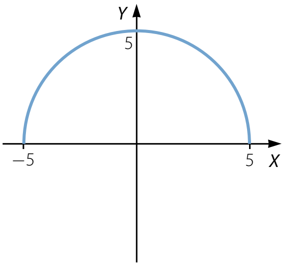
$$y'' = \frac{1}{4(x + 3)\sqrt{x + 3}} > 0$$
$\rightarrow$ Función cóncava.

No presenta puntos de inflexión.

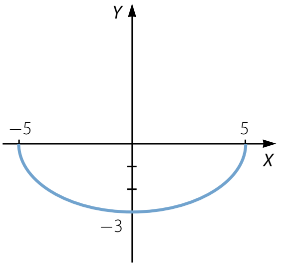


091 Escribe la función a la que corresponde cada una de las siguientes gráficas:

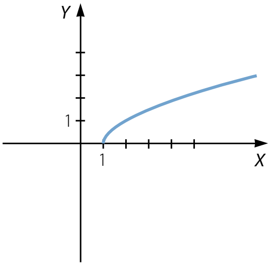
GRÁFICA 1



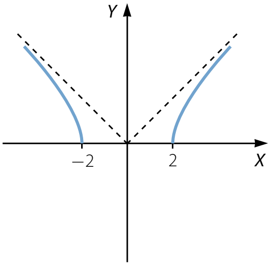
GRÁFICA 2



GRÁFICA 3



GRÁFICA 4



Gráfica 1: $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$

Gráfica 2: $g(x) = -3\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{25}}$

Gráfica 3: $h(x) = \sqrt{x - 1}$

Gráfica 4: $j(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

092 Dibuja la gráfica de estas funciones, analizando previamente sus características.

a) $y = xe^x$

b) $y = \dfrac{e^{-x} + e^x}{2}$

c) $y = 3x^2e^{-x}$

d) $y = \dfrac{x^2 - 1}{e^{x^2}}$

e) $y = \dfrac{(x+1)^2}{e^x}$

f) $y = e^{1-x^2}$

a) Dominio $= \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X: $xe^x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$

No tiene asíntotas verticales.

$\lim\limits_{x \to +\infty} xe^x = +\infty \rightarrow$ No tiene asíntota horizontal.

$$\lim_{x \to -\infty} xe^x \rightarrow \infty \cdot 0 \rightarrow \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{e^{-x}} \rightarrow \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = \lim_{x \to -\infty} -e^x = 0$$

$\rightarrow$ Asíntota horizontal: $y = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{xe^x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty \rightarrow$ No tiene asíntotas oblicuas.

$y' = e^x + xe^x = e^x(1 + x)$

$y' = 0 \rightarrow x = -1$

- En $(-\infty, -1) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente
- En $(-1, +\infty) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente

En $x = -1$ presenta un mínimo.

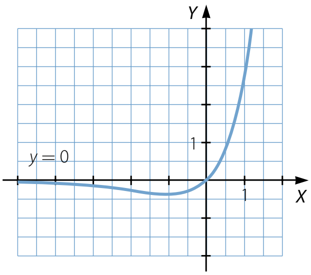
$y'' = e^x(1 + x) + e^x$

$y'' = 0 \rightarrow 1 + x + 1 = 0$

$\rightarrow x = -2$

- En $(-\infty, -2) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa
- En $(-2, +\infty) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava

En $x = -2$ presenta un punto de inflexión.



b) Dominio $= \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X: no tiene ya que $\dfrac{e^{-x} + e^x}{2} = 0 \rightarrow \dfrac{1}{e^x} + e^x \neq 0$.
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = \dfrac{1 + 1}{2} = 1 \rightarrow (0, 1)$

No tiene asíntotas verticales.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{-x} + e^x}{2} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{-x} + e^x}{2} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{-x} + e^x}{2x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{-x} + e^x}{2x} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas oblicuas.}$$

Tiene ramas parabólicas:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = +\infty$$

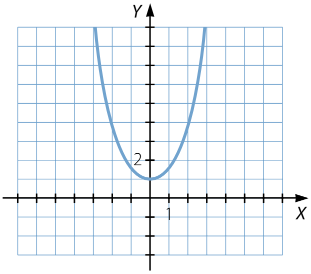
$$y' = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = 0 \to e^{x} = e^{-x} \to x = -x \to 2x = 0 \to x = 0$$

- En $(-\infty, 0) \to y' < 0$ $\to$ Función decreciente
- En $(0, +\infty) \to y' > 0 \to$ Función creciente

En $x = 0$ presenta un mínimo.

$$y'' = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} > 0 \to \text{Función cóncava}$$

No presenta puntos de inflexión.



c) Dominio $= \mathbb{R}$

- Cortes con el eje *X*: $3x^2e^{-x} = 0 \to x = 0 \to (0, 0)$
- Corte con el eje *Y*: $x = 0 \to y = 0 \to (0, 0)$

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2}{e^x} = 0 \to \text{Asíntota horizontal: } y = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} 3x^2e^{-x} = +\infty \to \text{No tiene asíntota horizontal cuando } x \to -\infty.$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x^2e^{-x}}{x} = \lim_{x \to -\infty} 3xe^{-x} = -\infty \to \text{No tiene asíntota oblicua.}$$

Tiene una rama parabólica: $\lim_{x \to -\infty} 3x^2e^{-x} = +\infty$

$$y' = e^{-x}(6x - 3x^2) = 0 \to x(6 - 3x) = 0 \to \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

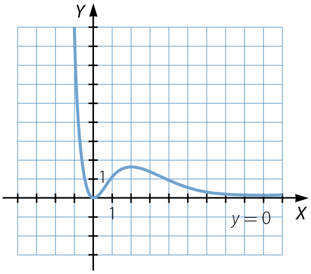
- En $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty) \to y' < 0 \to$ Función decreciente
- En $(0, 2) \to y' > 0 \to$ Función creciente

En $x = 0$ presenta un mínimo y en $x = 2$, un máximo.

$$y'' = e^{-x}(3x^2 - 12x + 6) = 0 \to x = 2 \pm \sqrt{2}$$

- En $\left(-\infty, 2 - \sqrt{2}\right) \cup \left(2 + \sqrt{2}, +\infty\right) \to y'' > 0 \to$ Función cóncava
- En $\left(2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}\right) \to y'' < 0 \to$ Función convexa

En $x = 2 \pm \sqrt{2}$ presenta dos puntos de inflexión.



d) Dominio $= \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X: $\dfrac{x^2-1}{e^{x^2}} = 0 \rightarrow x = \pm 1 \rightarrow (-1, 0), (1, 0)$
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = -1 \rightarrow (0, -1)$

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{h \to \infty} \frac{x^2-1}{e^{x^2}} = 0 \rightarrow \text{Asíntota horizontal: } y = 0$$

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas.

$$y' = \frac{2x - (x^2-1)2x}{e^{x^2}} = \frac{4x - 2x^3}{e^{x^2}} = 0 \rightarrow x(4 - 2x^2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

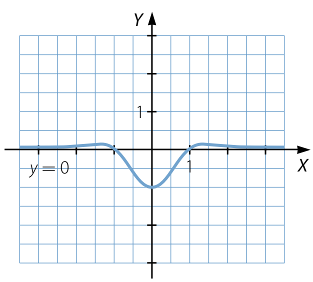
- En $\left(-\infty, -\sqrt{2}\right) \cup \left(0, \sqrt{2}\right) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente
- En $\left(-\sqrt{2}, 0\right) \cup \left(\sqrt{2}, +\infty\right) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente

En $x = \pm\sqrt{2}$ presenta dos máximos y en $x = 0$, un mínimo.

$$y'' = \frac{4x^4 - 14x^2 + 4}{e^{x^2}} = 0 \rightarrow \begin{cases} x = \pm 0,56 \\ x = 3,17 \end{cases}$$

- En $(-\infty; -3,17) \cup (-0,56; 0,56) \cup (3,17; +\infty) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava
- En $(-3,17; -0,56) \cup (0,56; 3,17) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa

En $x = -0,56$; $x = 0,56$ y $x = 3,17$ presenta puntos de inflexión.



e) Dominio $= \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X: $y = 0 \rightarrow \dfrac{(x+1)^2}{e^x} = 0 \rightarrow x = -1 \rightarrow (-1, 0)$
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = 1 \rightarrow (0, 1)$

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(x+1)^2}{e^x} = 0 \rightarrow \text{Asíntota horizontal: } y = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{(x+1)^2}{e^x} = +\infty \rightarrow \text{No tiene asíntota horizontal cuando } x \rightarrow -\infty.$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{(x+1)^2}{xe^x} = -\infty \rightarrow \text{No tiene asíntota oblicua.}$$

Tiene una rama parabólica: $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{(x+1)^2}{e^x} = +\infty$

$$y' = \frac{2x + 2 - (x+1)^2}{e^x} = \frac{-x^2 + 1}{e^x} = 0 \rightarrow x = \pm 1$$

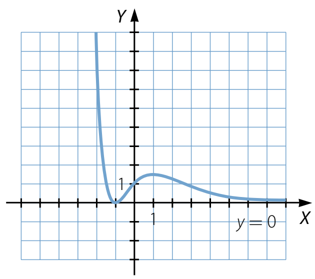
- En $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente
- En $(-1, 1) \rightarrow y' > 0 \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente

En $x = -1$ presenta un mínimo y en $x = 1$ un máximo.

$$y'' = \frac{-2x + x^2 - 1}{e^x} = 0 \rightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$$

- En $\left(-\infty, 1 - \sqrt{2}\right) \cup \left(1 + \sqrt{2}, +\infty\right) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava
- En $\left(1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}\right) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa

En $x = 1 \pm \sqrt{2}$ presenta puntos de inflexión.



f) Dominio $= \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X: no tiene.
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = e \rightarrow (0, e)$

No tiene asíntotas verticales.

$\lim\limits_{x \to \infty} e^{1-x^2} = 0 \rightarrow$ Asíntota horizontal: $y = 0$

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas.

$$y' = (-2x)e^{1-x^2} = 0 \rightarrow x = 0$$

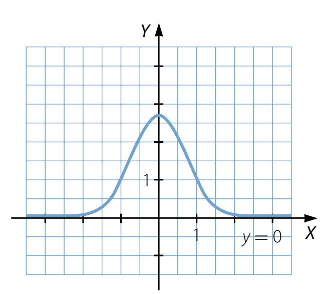
- En $(-\infty, 0) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente
- En $(0, +\infty) \rightarrow y' < 0 \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente

En $x = 0$ presenta un máximo.

$$y'' = -2e^{1-x^2} - 2x(-2x)e^{1-x^2} = 0 \rightarrow 4x^2 - 2 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$$

- En $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{1}{2}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{1}{2}}, +\infty\right) \rightarrow y'' > 0$
  $\rightarrow$ Función cóncava
- En $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right) \rightarrow y'' < 0$
  $\rightarrow$ Función convexa

En $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$ presenta puntos de inflexión.



093 Sea la función $f(x) = x + e^{-x}$.

Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos relativos, los intervalos de concavidad y convexidad y las asíntotas. Esbozar su gráfica.

(Castilla y León. Junio 2007. Prueba B. Problema 2)

Dom $f = \mathbb{R}$

$f'(x) = 1 - e^{-x} = 0 \to e^{-x} = 1 \to e^{-x} = e^0 \to x = 0$

- En $(-\infty, 0) \to f'(x) < 0 \to f(x)$ decreciente
- En $(0, +\infty) \to f'(x) > 0 \to f(x)$ creciente

En $x = 0$ presenta un mínimo.

$f''(x) = e^{-x} > 0 \to f(x)$ cóncava

No presenta puntos de inflexión.

No tiene asíntotas verticales.

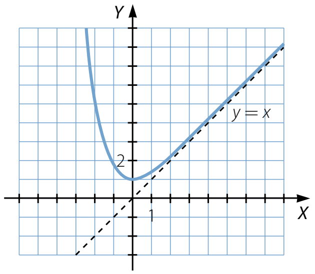
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to +\infty} (x + e^{-x}) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} (x + e^{-x}) = +\infty\end{array}\right\} \to \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x + e^{-x}}{x} = 1 \to m = 1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} (x + e^{-x} - x) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0 \to n = 0\end{array}\right\}$$
$$\to \text{Asíntota oblicua: } y = x$$

Cuando $x \to -\infty$ no existe el valor de n por lo que no tiene asíntota oblicua.

Tiene una rama parabólica:

$$\lim_{x \to -\infty} (x + e^{-x}) = +\infty$$



094 Sea la función $f(x) = x^2e^x$. **Calcula sus asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos, mínimos y puntos de inflexión. Represéntala gráficamente.**

(La Rioja. Junio 2007. Propuesta A. Ejercicio 5)

Dom $f = \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X: $x^2e^x = 0 \to x = 0 \to (0, 0)$
- Corte con el eje Y: $x = 0 \to y = 0 \to (0, 0)$

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \to +\infty} x^2e^x = +\infty \to \text{No tiene asíntota horizontal.}$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^2e^x \to \infty \cdot 0 \to \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{e^{-x}} \to \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{-e^{-x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$
$$\to \text{Asíntota horizontal: } y = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2e^x}{x} = \lim_{x \to +\infty} xe^x = +\infty \to \text{No tiene asíntota oblicua.}$$

Tiene una rama parabólica: $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2e^x = +\infty$

$$f'(x) = e^x(2x + x^2) = 0 \rightarrow x(2 + x) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

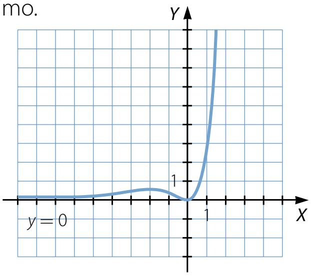
- En $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente
- En $(-2, 0) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente

En $x = -2$ presenta un máximo y en $x = 0$, un mínimo.

$$f''(x) = e^x(x^2 + 4x + 2) = 0 \rightarrow x = -2 \pm \sqrt{2}$$

- En $\left(-\infty, -2-\sqrt{2}\right) \cup \left(-2+\sqrt{2}, +\infty\right)$
  $\rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ cóncava
- En $\left(-2-\sqrt{2}, -2+\sqrt{2}\right) \rightarrow f''(x) < 0$
  $\rightarrow f(x)$ convexa

En $x = -2 \pm \sqrt{2}$ presenta puntos de inflexión.



095 **Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = (x - 1)^2 e^{-x}$.**

a) Halla las asíntotas de la gráfica de f.

b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y calcula, si existen, sus extremos relativos o locales y sus extremos absolutos o globales (puntos en los que se obtienen y valores que alcanza la función).

c) Esboza la gráfica de f.

(Andalucía. Septiembre 2005. Opción A. Ejercicio 2)

a) Dom $f = \mathbb{R}$

No hay asíntotas verticales.

$$\lim_{x \to +\infty} (x-1)^2 e^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(x-1)^2}{e^x} = 0 \rightarrow \text{Asíntota horizontal: } y = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} (x-1)^2 e^{-x} = +\infty \rightarrow \text{No tiene asíntota horizontal cuando } x \rightarrow -\infty.$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{(x-1)^2 e^{-x}}{x} = +\infty \rightarrow \text{No tiene asíntota oblicua.}$$

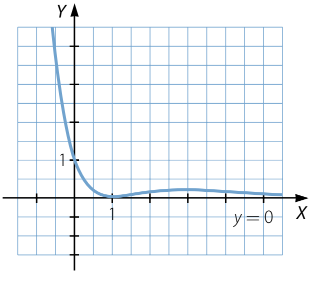
b) $y' = e^{-x}\left(2x - 2 - (x-1)^2\right) = e^{-x}(-x^2 + 4x - 3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$

- En $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente
- En $(1, 3) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente

En $x = 1$ presenta un mínimo y en $x = 3$, un máximo.

c) Para esbozar la gráfica nos faltan los puntos de corte:

- Con el eje X:
  $(x-1)^2 e^{-x} = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow (1, 0)$
- Con el eje Y:
  $x = 0 \rightarrow y = 1 \rightarrow (0, 1)$



096 **Dibuja la gráfica de estas funciones, analizando previamente sus características.**

a) $y = x \ln x$ b) $y = \log_2 (x^2 + 1)$ c) $y = \ln \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ d) $y = \dfrac{x}{\ln x}$

a) Dominio $= (0, +\infty)$

- Cortes con el eje X: $x \ln x = 0 \rightarrow x = 0$, como no está en el dominio, no tiene cortes con este eje.
- Corte con el eje Y: no tiene porque no está definida para $x = 0$.

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \rightarrow \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} (-x) = 0$$

$$\rightarrow \lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0 \rightarrow \text{No tiene asíntotas verticales.}$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln x = +\infty \rightarrow$ No tiene asíntotas horizontales.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x \ln x}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \ln x = +\infty \rightarrow$ No tiene asíntotas oblicuas.

Tiene una rama parabólica: $\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln x = +\infty$

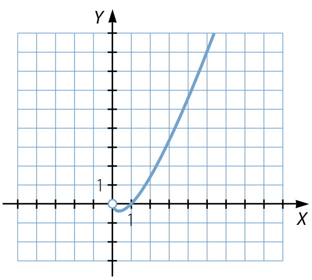
$y' = 1 + \ln x = 0 \rightarrow \ln x = -1 \rightarrow x = e^{-1} \rightarrow x = \dfrac{1}{e}$

- En $\left(0, \dfrac{1}{e}\right) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente
- En $\left(\dfrac{1}{e}, +\infty\right) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente

En $x = \dfrac{1}{e}$ presenta un mínimo.

$y'' = \dfrac{1}{x} > 0 \rightarrow$ Función cóncava

No presenta dos puntos de inflexión.



b) Dominio $= \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X: $\log_2 (x^2 + 1) = 0 \rightarrow x^2 + 1 = 1 \rightarrow x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = \log_2 1 = 0 \rightarrow (0, 0)$

No tiene asíntotas verticales.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \log_2(x^2 + 1) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \log_2(x^2 + 1) = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\log_2 (x^2 + 1)}{x} = 0 \rightarrow$ No tiene asíntotas oblicuas.

Tiene ramas parabólicas:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \log_2 (x^2 + 1) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \log_2 (x^2 + 1) = +\infty$

$$y' = \frac{2x}{\ln 2(x^2+1)} = 0 \rightarrow x = 0$$

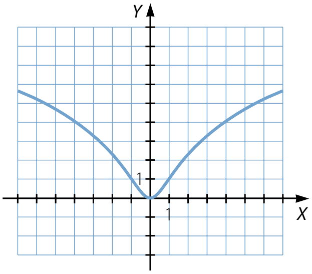
- En $(-\infty, 0) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente
- En $(0, +\infty) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente

En $x = 0$ presenta un mínimo.

$$y'' = \frac{2-2x^2}{\ln 2(x^2+1)^2} = 0 \rightarrow x = \pm 1$$

- En $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa
- En $(-1, 1) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava

En $x = \pm 1$ presenta dos puntos de inflexión.



c) Dominio $= \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X:

$$\ln \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 0 \rightarrow \frac{e^x + e^{-x}}{2} = e^0 = 1 \rightarrow e^x + e^{-x} = 2$$
$$\rightarrow e^{2x} - 2e^x + 1 = 0 \rightarrow e^x = 1 \rightarrow x = \ln 1 = 0 \rightarrow (0, 0)$$

- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = \ln \frac{1+1}{2} = \ln 1 = 0 \rightarrow (0, 0)$

No tiene asíntotas verticales.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \ln \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \ln \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}}{x} = 1 \rightarrow m = 1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\ln \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} - x\right) = -0,69 \rightarrow n = -0,69 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l}\text{Asíntota oblicua:} \\ y = x - 0,69\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\ln \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}}{x} = -1 \rightarrow m = -1 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\ln \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} + x\right) = -0,69 \rightarrow n = -0,69 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l}\text{Asíntota oblicua:} \\ y = -x - 0,69\end{array}$$

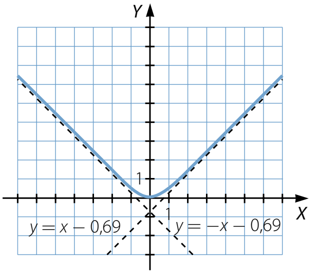
$$y' = \frac{2\left(\frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)\right)}{e^x + e^{-x}} = 0 \to e^x - \frac{1}{e^x} = 0 \to e^{2x} = 1 \to e^x = 1 \to x = \ln 1 = 0$$

- En $(-\infty, 0) \to y' < 0$
  $\to$ Función decreciente
- En $(0, +\infty) \to y' > 0$
  $\to$ Función creciente

En $x = 0$ presenta un mínimo.

$$y'' = \frac{4e^{-x}e^x}{e^{-2x} + 2e^{-x}e^x + e^{2x}} > 0$$
$\to$ Función cóncava

No presenta puntos de inflexión.



d) Dominio $= (0, +\infty) - \{1\}$

- Cortes con el eje X: $\dfrac{x}{\ln x} = 0 \to x = 0 \to (0, 0)$
- Corte con el eje Y: no tiene porque no está definida para $x = 0$.

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x}{\ln x} = \infty \to$ Asíntota vertical: $x = 1$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x}{\ln x} = 0 \to$ No tiene asíntota vertical.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\ln x} = +\infty \to$ No tiene asíntotas horizontales.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x \ln x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\ln x} = 0 \to$ No tiene asíntotas oblicuas.

Tiene una rama parabólica: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\ln x} = +\infty$

$$y' = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} = 0 \to \ln x = 1 \to x = e$$

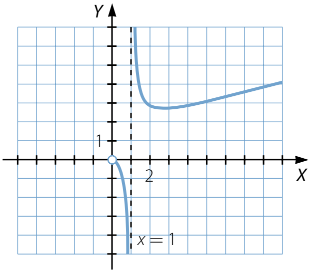
- En $(0, 1) \cup (1, e) \to y' < 0 \to$ Función decreciente
- En $(e, +\infty) \to y' > 0 \to$ Función creciente

En $x = e$ presenta un mínimo.

$$y'' = \frac{2 - \ln x}{x(\ln x)^3} = 0 \to \ln x = 2 \to x = e^2$$

- En $(0, 1) \cup (e^2, +\infty) \to y'' < 0$
  $\to$ Función convexa
- En $(1, e^2) \to y'' > 0 \to$ Función cóncava

En $x = e^2$ presenta un punto de inflexión.



097 Sea $f(x) = 1 + \dfrac{\ln x}{x^2}$ con $x \in (0, +\infty)$. Se pide:

Calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos relativos y las asíntotas. Esbozar su gráfica.

Dom $f = (0, +\infty)$

$$\lim_{x \to 0^+} \left(1 + \frac{\ln x}{x^2}\right) = -\infty \rightarrow \text{Asíntota vertical: } x = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{\ln x}{x^2}\right) = 1 \rightarrow \text{Asíntotas horizontales: } y = 1$$

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas.

$$f'(x) = \frac{1 - 2\ln x}{x^3} = 0 \rightarrow 1 = 2\ln x \rightarrow x = \sqrt{e}$$

- En $\left(0, \sqrt{e}\right) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente
- En $\left(\sqrt{e}, +\infty\right) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente

En $x = \sqrt{e}$ presenta un máximo.

$$f''(x) = \frac{6\ln x - 5}{x^4} = 0 \rightarrow x = \sqrt[6]{e^5}$$

- En $\left(0, \sqrt[6]{e^5}\right) \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ convexa
- En $\left(\sqrt[6]{e^5}, +\infty\right) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ cóncava

En $x = \sqrt[6]{e^5}$ presenta un punto de inflexión.

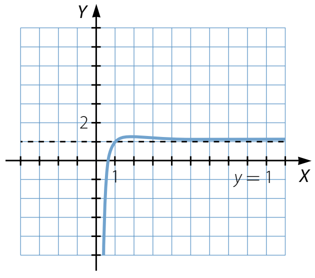
- Cortes con el eje X:

  $f(x) = 0 \rightarrow 1 + \dfrac{\ln x}{x^2} = 0 \rightarrow x^2 + \ln x = 0$

  $$\left.\begin{array}{l} f(0{,}1) < 0 \\ f(1) > 0 \\ f(x) \text{ continua } [0{,}1;\, 1] \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{T. Bolzano}} \text{Existe una raíz en ese intervalo.}$$

  Esta raíz es única porque $f(x)$ es creciente en $\left(0, \sqrt{e}\right)$ y decreciente en $\left(\sqrt{e}, +\infty\right)$, y tiene una asíntota horizontal en $y = 1$.

- Corte con el eje Y: no tiene porque no está definida para $x = 0$.



098 Sea $f(x) = 2 - x + \ln x$, con $x \in (0, +\infty)$. Se pide:

Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos relativos, los intervalos de concavidad y convexidad y las asíntotas de *f*. Esbozar la gráfica de *f*.

(Castilla y León. Septiembre 2008. Prueba B. Problema 2)

$$f'(x) = -1 + \frac{1}{x} = \frac{-x+1}{x} = 0 \rightarrow -x + 1 = 0 \rightarrow x = 1$$

- En $(-\infty, 1) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente
- En $(1, +\infty) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente

En $x = 1$ presenta un máximo.

$$f''(x) = \frac{-1}{x^2} < 0 \rightarrow f(x) \text{ convexa.}$$

No presenta puntos de inflexión.

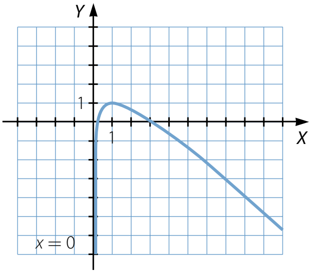
$$\lim_{x \to 0^+} (2 - x + \ln x) = -\infty \rightarrow \text{Asíntota vertical: } x = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} (2 - x + \ln x) = -\infty \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2 - x + \ln x}{x} = -1 \rightarrow m = -1 \\ \displaystyle\lim_{x \to +\infty} \big(f(x) - mx\big) = \lim_{x \to +\infty} (2 - x + \ln x + x) = \lim_{x \to +\infty} (2 + \ln x) = +\infty \end{array}\right\}$$

$\rightarrow$ No tiene asíntotas oblicuas.

Tiene una rama parabólica: $\lim_{x \to +\infty} (2 - x + \ln x) = -\infty$



099 **Estudia las características de esta función definida a trozos y dibuja su gráfica.**

$$f(x) = \begin{cases} x + 4 & \text{si } x \le 1 \\ x^2 - 6x + 8 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

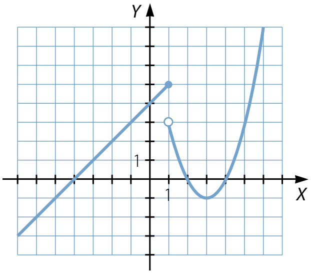
Dom $f = \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to 1^+} (x^2 - 6x + 8) = 3 \\ \displaystyle\lim_{x \to 1^-} (x + 4) = 5 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Discontinuidad de salto finito en } x = 1$$

- En $(-\infty, 1] \rightarrow$ Recta que pasa por $(-4, 0)$ y $(1, 5)$
- En $(1, +\infty) \rightarrow$ Parábola de vértice $(3, -1)$

Cortes con eje X: $x^2 - 6x + 8 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 4 \end{cases}$

En $x = 1 \rightarrow f(1) = 3$



100 **Dibuja la gráfica de la función:**

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{25 - x^2} & \text{si } -5 \le x < 4 \\ x^2 - 2x - 5 & \text{si } x \ge 4 \end{cases}$$

- En $(-\infty, -5)$ la función no está definida.

$$\left.\begin{array}{l} f(4) = 16 - 8 - 5 = 3 \\ \lim\limits_{x \to 4^+} (x^2 - 2x - 5) = 16 - 8 - 5 = 3 \\ \lim\limits_{x \to 4^-} \sqrt{25 - x^2} = \sqrt{25 - 16} = 3 \end{array}\right\} \rightarrow f(x) \text{ continua en } x = 4$$

- En $[-5, 4) \rightarrow f(x) = \sqrt{25 - x^2}$:

  $x = -5 \rightarrow y = 0 \rightarrow (-5, 0)$

  $x = 4 \rightarrow y = 3 \rightarrow (4, 3)$

  No tiene asíntotas en el intervalo en el que está definida.

  $$y' = \frac{-x}{\sqrt{25 - x^2}} = 0 \rightarrow x = 0$$

  En $[-5, 0) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente

  En $(0, 4) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente

  En $x = 0$ presenta un máximo.

  $$y'' = \frac{-25}{\sqrt{25 - x^2}} < 0 \rightarrow \text{Función convexa}$$

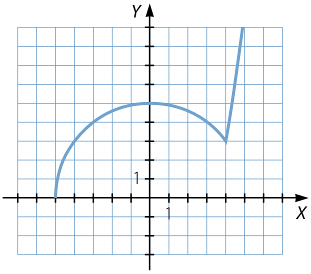
- En $[4, +\infty) \rightarrow f(x) = x^2 - 2x - 5$

  Parábola de vértice $(1, -6)$.

  No tiene cortes con los ejes en el intervalo en el que está definida.

  $x = 4 \rightarrow y = 3 \rightarrow (4, 3)$

  $$\lim_{x \to +\infty} (x^2 - 2x - 5) = +\infty$$



101 Se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & \text{si } x < 2 \\ x^2 - 3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

a) Determine el dominio de definición, estudie su continuidad y halle sus asíntotas.
b) Esboce una gráfica de la función.

(Asturias. Junio 2008. Bloque 5)

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{1\}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{1}{x-1} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1}{x-1} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{Discontinuidad de salto infinito en } x = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} f(2) = 4 - 3 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} (x^2 - 3) = 1 \\ \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{1}{x-1} = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Continua en } x = 2$$

Así, $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{1\}$.

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{x-1} = \infty \rightarrow \text{Asíntota vertical: } x = 1$$

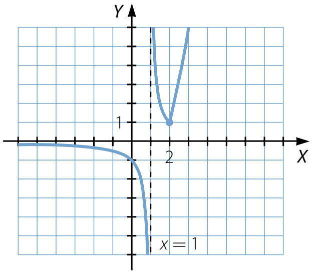
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x-1} = 0 \rightarrow \text{Asíntota horizontal: } y = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} (x^2 - 3) = +\infty \rightarrow \text{Rama parabólica por ser función polinómica.}$$

b) $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{(x-1)^2} & \text{si } x < 2 \\ 2x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

- En $(-\infty, 1) \cup (1, 2) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente
- En $(2, +\infty) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente

$$x = 2 \rightarrow \left\{\begin{array}{l} f'(2^-) = \dfrac{-1}{(2-1)^2} = -1 \\ f'(2^+) = 2 \cdot 2 = 4 \end{array}\right. \rightarrow \text{No derivable}$$



102 Se considera la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < -4 \\ x+2 & \text{si } -4 \le x < 2 \\ \dfrac{8}{x} & \text{si } 2 \le x \end{cases}$$

Representar gráficamente la función.

(La Rioja. Junio 2004. Opción A. Ejercicio 5)

Dom $f = \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -4^-} (-1) = -1 \\ \lim\limits_{x \to -4^+} (x+2) = -2 \end{array}\right\} \to \text{Discontinuidad de salto finito en } x = -4$$

$$\left.\begin{array}{l} f(2) = \dfrac{8}{2} = 4 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{8}{x} = 4 \\ \lim\limits_{x \to 2^-} (x+2) = 4 \end{array}\right\} \to \text{Continua en } x = 2$$

Así, $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{-4\}$.

- En $(-\infty, -4) \to f(x) = -1 \to$ Función constante
- En $[-4, 2) \to f(x) = x + 2 \to$ Recta que pasa por $(-4, -2)$ y $(2, 4)$
- En $[2, +\infty) \to f(x) = \dfrac{8}{x} \to$ Definida en todo el intervalo

  No corta a ninguno de los dos ejes.

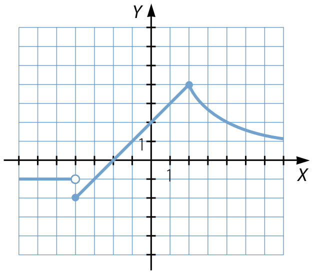
  No tiene asíntotas verticales.

  $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{8}{x} = 0 \to$ Asíntota horizontal: $y = 0$

  No tiene asíntotas oblicuas.

  $f'(x) = \dfrac{-8}{x^2} < 0 \to$ Función decreciente

  $f''(x) = \dfrac{16}{x^3} > 0 \to$ Función cóncava



103 Estudia si la función $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq -1 \\ 1 - x^2 & \text{si } -1 < x \leq 2 \\ -3 & \text{si } 2 < x \end{cases}$ es continua en los puntos $x = -1$ y $x = 2$.

Representa gráficamente dicha función.

(Castilla-La Mancha. Junio 2005. Bloque 1. Pregunta A)

Dom $f = \mathbb{R}$

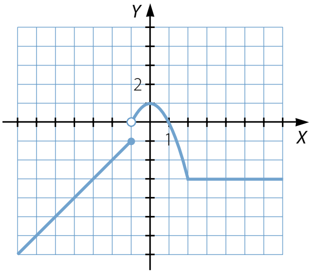
$$\left. \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} x = -1 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} 1 - x^2 = 0 \end{array} \right\} \to \text{Discontinuidad de salto finito en } x = -1$$

$$\left. \begin{array}{l} f(-2) = 1 - 4 = -3 \\ \lim\limits_{x \to 2^-} 1 - x^2 = -3 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} -3 = -3 \end{array} \right\} \to \text{Continua en } x = 2$$

Así, $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{-1\}$.

- En $(-\infty, -1] \to f(x) = x \to$ Recta que pasa por $(-1, -1)$ y $(-2, -2)$
- En $(-1, 2] \to f(x) = 1 - x^2 \to$ Parábola de vértice $(0, 1)$

  Cortes con el eje X: $1 - x^2 = 0 \to \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \end{cases}$
- En $(2, +\infty) \to f(x) = -3 \to$ Función constante



104 Considera la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} sen\ x & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + bx & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Para $b = -2$ y el intervalo $[-2\pi, 3]$, determina los puntos de corte con los ejes, los extremos relativos (máximos y mínimos), la curvatura y dibuja la gráfica de la función f.

(Cantabria. Junio 2007. Bloque 2. Opción A)

Dom $f = [-2\pi, 3]$

- Cortes con el eje X: $\begin{cases} sen\ x = 0 \to x = 0,\ x = -\pi,\ x = -2\pi \\ x^2 - 2x = 0 \to x(x - 2) = 0 \to x = 2 \end{cases}$
- Corte con el eje Y: $x = 0 \to y = sen\ 0 = 0$

En $[-2\pi, 0]$: $f'(x) = cos\ x = 0 \rightarrow x = \dfrac{-\pi}{2}, x = \dfrac{-3\pi}{2}$

- En $\left(-2\pi, \dfrac{-3\pi}{2}\right) \cup \left(\dfrac{-\pi}{2}, 0\right) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente
- En $\left(\dfrac{-3\pi}{2}, \dfrac{-\pi}{2}\right) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente

En $x = \dfrac{-\pi}{2}$ presenta un mínimo y en $x = \dfrac{-3\pi}{2}$, un máximo.

En $(0, 3]$: $f'(x) = 2x - 2 = 0 \rightarrow x = 1$

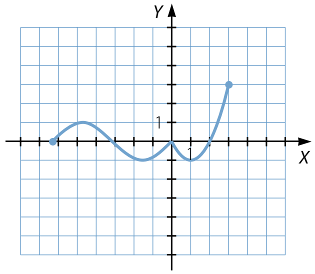
- En $(0, 1) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente
- En $(1, 3) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente

En $x = 1$ presenta un mínimo.

$f''(x) = -sen\ x$

- En $(-2\pi, -\pi) \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ convexa
- En $(-\pi, 0) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ cóncava
- En $(0, 3) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ cóncava

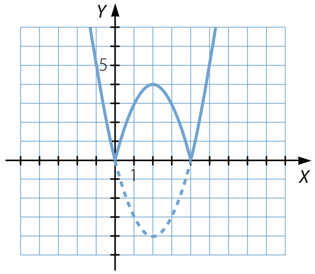
En $x = -\pi$ presenta un punto de inflexión.



105 **Estudia y representa gráficamente la siguiente función: $g(x) = \left|-x^2 + 4x\right|$**

La función $y = -x^2 + 4x$ tiene como gráfica una parábola de vértice $(2, 4)$ que corta al eje Y en el punto $(0, 0)$, y al eje X en los puntos $(0, 0)$ y en $(4, 0)$.

La función toma valores negativos en $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$ por lo que haciendo una simetría respecto del eje X se obtiene la gráfica pedida.



106 Sea f la función dada por $f(x) = x^2 - 3|x| + 2$, $x \in \mathbb{R}$.

a) Estúdiese la derivabilidad de f en $x = 0$ mediante la definición de derivada.

b) Determínense los intervalos de monotonía de f y sus extremos relativos.

c) Esbócese la gráfica de f.

(Castilla y León. Septiembre 2004. Prueba A. Problema 2)

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 & \text{si } x \le 0 \\ x^2 + 3x + 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{h^2 + 3h + 2 - 2}{h} = \lim\limits_{h \to 0^-} (h+3) = 3 \\ \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{h^2 - 3h + 2 - 2}{h} = \lim\limits_{h \to 0^+} (h-3) = -3 \end{array}\right\}$$

$\rightarrow$ No es derivable en $x = 0$.

b) En $(-\infty, 0) \rightarrow f'(x) = 2x + 3 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-3}{2}$

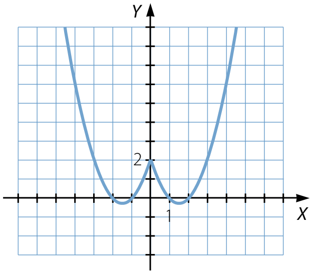
- En $\left(-\infty, -\dfrac{3}{2}\right) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente
- En $\left(\dfrac{-3}{2}, 0\right) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente

En $[0, +\infty) \rightarrow f'(x) = 2x - 3 = 0 \rightarrow x = \dfrac{3}{2}$

- En $\left(0, \dfrac{3}{2}\right) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente
- En $\left(\dfrac{3}{2}, +\infty\right) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente

En $x = \pm\dfrac{3}{2}$ presenta dos mínimos y en $x = 0$, un máximo.

c)



107 Estudia y representa las siguientes funciones.

a) $y = -x^4 + 6x^2 - 5$

b) $y = \dfrac{4x^2 + 1}{2x}$

c) $y = \sqrt{16 - x^2}$

d) $y = 8x^2 - x^4$

e) $y = \dfrac{1}{(x-2)^2}$

f) $y = \sqrt{x^3 - 4x}$

a) Dominio $= \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X: $f(x) = 0 \rightarrow -x^4 + 6x^2 - 5 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = \pm\sqrt{5} \end{cases}$
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = -5 \rightarrow (0, -5)$

Como es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas.

$\lim\limits_{x \to -\infty} (-x^4 + 6x^2 - 5) = -\infty \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} (-x^4 + 6x^2 - 5) = -\infty$

$f'(x) = -4x^3 + 12x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$

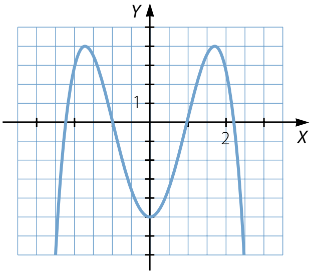
- En $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(0, \sqrt{3}\right) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente
- En $\left(-\sqrt{3}, 0\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente

En $x = -\sqrt{3}$ y $x = \sqrt{3}$ presenta dos máximos y en $x = 0$, un mínimo.

$f''(x) = -12x^2 + 12 = 0 \rightarrow x = \pm 1$

- En $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ convexa
- En $(-1, 1) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ cóncava

En $x = -1$ y $x = 1$ presenta puntos de inflexión.



b) Dominio $= \mathbb{R} - \{0\}$

- Cortes con el eje X: $y = 0 \rightarrow \dfrac{4x^2 + 1}{2x} = 0 \rightarrow 4x^2 + 1 \neq 0$
  $\rightarrow$ No tiene puntos de corte con este eje.
- Corte con el eje Y: no tiene porque no está definida para $x = 0$.

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4x^2 + 1}{2x} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical: $x = 0$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x^2 + 1}{2x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4x^2 + 1}{2x} = -\infty \end{array}\right\} \rightarrow$ No tiene asíntotas horizontales.

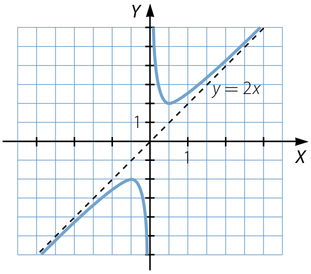
$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4x^2 + 1}{2x^2} = 2 \rightarrow m = 2 \\ \lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{4x^2 + 1}{2x} - 2x\right) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{2x} = 0 \rightarrow n = 0 \end{array}\right\} \rightarrow$ Asíntota oblicua: $y = 2x$

$$y' = \frac{8x^2 - 2}{4x^2} = \frac{4x^2 - 1}{2x^2} = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} \rightarrow x = \pm\frac{1}{2}$$

- En $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente
- En $\left(-\frac{1}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente

En $x = -\frac{1}{2}$ presenta un máximo

y en $x = \frac{1}{2}$, un mínimo.



$$y'' = \frac{x}{x^4} = \frac{1}{x^3}$$

- En $(-\infty, 0) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa
- En $(0, +\infty) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava

No hay puntos de inflexión.

c) $16 - x^2 \geq 0 \rightarrow (4 - x)(4 + x) \geq 0 \rightarrow x \in [-4, 4] \rightarrow$ Dominio $= [-4, 4]$

- Cortes con el eje X: $\sqrt{16 - x^2} = 0 \rightarrow 16 - x^2 = 0 \rightarrow x = \pm 4$
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = 4 \rightarrow (0, 4)$

No tiene asíntotas.

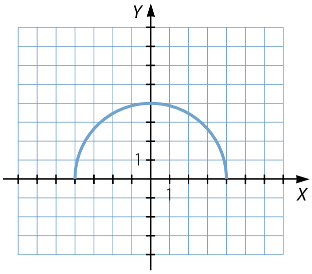
$$y' = \frac{-2x}{2\sqrt{16 - x^2}} = 0 \rightarrow x = 0$$

- En $(-4, 0) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente
- En $(0, 4) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente

En $x = 0$ presenta un máximo.

$$y'' = \frac{-16}{(16 - x^2)\sqrt{16 - x^2}} = \frac{16}{(x^2 - 16)\sqrt{16 - x^2}} < 0 \rightarrow \text{Función convexa}$$

No presenta puntos de inflexión.



d) Dominio $= \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X: $8x^2 - x^4 = 0 \rightarrow x^2(8 - x^2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{8} \end{cases}$
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$

Solo tiene ramas parabólicas:

$$\lim_{x \to +\infty} (8x^2 - x^4) = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} (8x^2 - x^4) = -\infty$$

$$y' = 16x - 4x^3 = 0 \rightarrow x(16 - 4x^2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases}$$

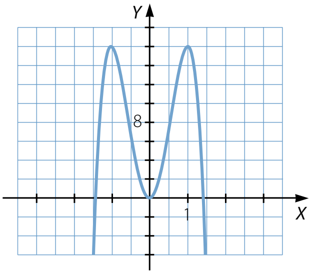
- En $(-\infty, -2) \cup (0, 2) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente
- En $(-2, 0) \cup (2, +\infty) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente

En $x = -2$ y $x = 2$ presenta dos máximos y en $x = 0$, un mínimo.

$$y'' = 16 - 12x^2 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{16}{12} = \frac{8}{6} \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{8}{6}}$$

- En $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{8}{6}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{8}{6}}, +\infty\right) \rightarrow y'' < 0$
  $\rightarrow$ Función convexa
- En $\left(-\sqrt{\frac{8}{6}}, \sqrt{\frac{8}{6}}\right) \rightarrow y'' > 0$
  $\rightarrow$ Función cóncava

En $x = -\sqrt{\frac{8}{6}}$ y $x = \sqrt{\frac{8}{6}}$ presenta dos puntos de inflexión.



e) Dominio $= \mathbb{R} - \{2\}$

- Cortes con el eje X: no tiene.
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = \frac{1}{4} \rightarrow \left(0, \frac{1}{4}\right)$

$$\lim_{x \to 2} \frac{1}{(x-2)^2} = \infty \rightarrow \text{Asíntota vertical: } x = 2$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{(x-2)^2} = 0 \rightarrow \text{Asíntota horizontal: } y = 0$$

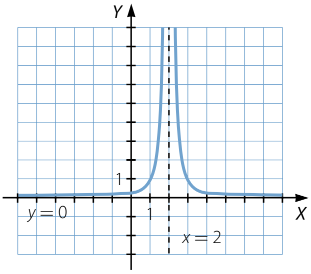
No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas.

$$y' = \frac{-2}{(x-2)^3} \neq 0$$

- En $(-\infty, 2) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente
- En $(2, +\infty) \rightarrow y' < 0$
  $\rightarrow$ Función decreciente

$$y'' = \frac{6}{(x-3)^4} > 0 \rightarrow \text{Función cóncava}$$

No presenta puntos de inflexión.



f) $x^3 - 4x \geq 0 \rightarrow x(x-2)(x+2) \geq 0 \rightarrow x \in [-2, 0] \cup [2, +\infty)$

$\rightarrow \text{Dominio} = [-2, 0] \cup [2, +\infty)$

- Cortes con el eje X: $\sqrt{x^3 - 4x} = 0 \rightarrow x = 0,\ x = \pm 2$
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$

No tiene asíntotas verticales.

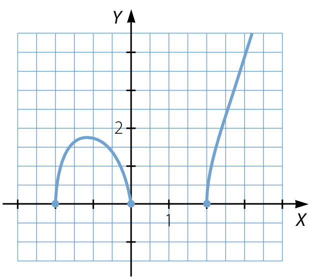
$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^3 - 4x} = +\infty \rightarrow$ No tiene asíntotas horizontales.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^3 - 4x}}{x} = +\infty \rightarrow$ No tiene asíntotas oblicuas.

$y' = \dfrac{3x^2 - 4}{2\sqrt{x^3 - 4x}} = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{4}{3}}$

- En $\left(-2, -\sqrt{\dfrac{4}{3}}\right) \cup \left(2, +\infty\right) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente
- En $\left(-\sqrt{\dfrac{4}{3}}, 0\right) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente

En $x = -\sqrt{\dfrac{4}{3}}$ presenta un máximo.



$y'' = \dfrac{3x^4 - 24x^2 - 16}{4(x^3 - 4x)\sqrt{x^3 - 4x}} < 0$

$\rightarrow$ Función convexa

No presenta puntos de inflexión.

108 **Estudia y representa estas funciones.**

a) $y = \dfrac{8}{x^2 - 4}$

b) $y = e^{(x^2 + 17x^4)}$

c) $y = x + \dfrac{1}{x}$

d) $y = \ln(16 - x^2 - x^4)$

a) Dominio $= \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

- Cortes con el eje X: no tiene.
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow f(0) = \dfrac{8}{-4} = -2 \rightarrow (0, -2)$

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{8}{x^2 - 4} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical: $x = 2$

$\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{8}{x^2 - 4} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical: $x = -2$

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{8}{x^2 - 4} = 0 \rightarrow$ Asíntota horizontal: $y = 0$

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas.

$$y' = \frac{-16x}{(x^2-4)^2} = 0 \rightarrow x = 0$$

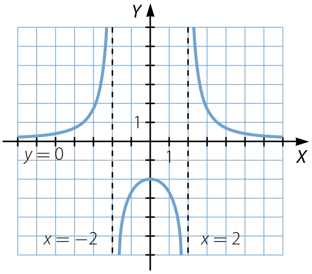
- En $(-\infty, -2) \cup (-2, 0) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente
- En $(0, 2) \cup (2, +\infty) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente

En $x = 0$ presenta un máximo.

$$y'' = \frac{48x^2 + 64}{(x^2-4)^3}$$

- En $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty) \rightarrow y'' > 0$
  $\rightarrow$ Función cóncava
- En $(-2, 2) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa

No presenta puntos de inflexión.



b) Dominio $= \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X: no tiene.
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = e^0 = 1 \rightarrow (0, 1)$

No tiene asíntotas verticales.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} e^{x^2+17x^4} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} e^{x^2+17x^4} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x^2+17x^4}}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{x^2+17x^4}}{x} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas oblicuas.}$$

Tiene ramas parabólicas:

$$\lim_{x \to +\infty} e^{x^2+17x^4} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} e^{x^2+17x^4} = +\infty$$

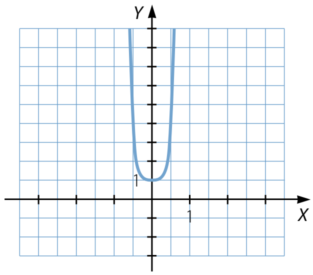
$$y' = (2x + 68x^3)e^{x^2+17x^4} = 0 \rightarrow 2x + 68x^3 = 0 \rightarrow x(2 + 68x^2) = 0 \rightarrow x = 0$$

- En $(-\infty, 0) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente
- En $(0, +\infty) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente

En $x = 0$ presenta un mínimo.

$$y'' = e^{x^2+17x^4}\left(2 + 204x^2 + (2x + 68x^3)^2\right) > 0 \rightarrow \text{Función cóncava}$$

No presenta puntos de inflexión.



c) Dominio $= \mathbb{R} - \{0\}$

- Cortes con el eje X:

$f(x) = 0 \rightarrow x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{x^2+1}{x} \neq 0 \rightarrow$ No tiene puntos de corte con este eje.

- Corte con el eje Y: no tiene porque no está definida para $x = 0$.

$\lim\limits_{x \to 0} \left(x + \dfrac{1}{x}\right) = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical: $x = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \left(x + \dfrac{1}{x}\right) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \left(x + \dfrac{1}{x}\right) = -\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right) = 1 \rightarrow m = 1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \left(x + \dfrac{1}{x} - x\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0 \rightarrow n = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Asíntota oblicua: } y = x$$

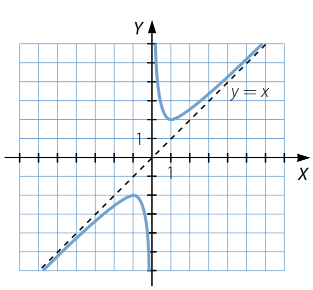
$y' = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2-1}{x^2} = 0 \rightarrow x = \pm 1$

- En $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente
- En $(-1, 0) \cup (0, 1) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente

En $x = -1$ presenta un máximo y en $x = 1$, un mínimo.

$y'' = \dfrac{2}{x^3}$

- En $(-\infty, 0) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Función convexa
- En $(0, +\infty) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función cóncava



d) $16 - x^2 - x^4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x^2 = 3,53 \\ x^2 = -4,53 \end{cases} \rightarrow x = \pm\sqrt{3,53} = \pm 1,88$

$16 - x^2 - x^4 > 0 \rightarrow x \in (-1,88;\ 1,88) \rightarrow$ Dominio $= (-1,88;\ 1,88)$

- Cortes con el eje X:

$\ln(16 - x^2 - x^4) = 0 \rightarrow 16 - x^2 - x^4 = 1 \rightarrow x^4 + x^2 - 15 = 0$

$\rightarrow \begin{cases} x^2 = -4,41 \\ x^2 = 3,41 \end{cases} \rightarrow x = \pm\sqrt{3,41} \rightarrow x = \pm 1,85$

- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = \ln 106 = 2,77$

$\lim\limits_{x \to -1,88} \ln(16 - x^2 - x^4) = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical: $x = -1,88$

$\lim\limits_{x \to 1,88} \ln(16 - x^2 - x^4) = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical: $x = 1,88$

No tiene asíntotas horizontales ni oblicuas.

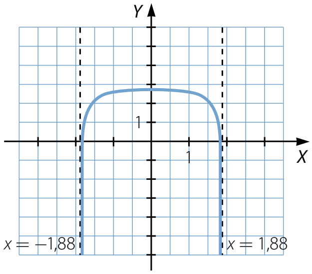
$$y' = \frac{-2x - 4x^3}{16 - x^2 - x^4} = 0 \rightarrow -2x - 4x^3 = 0 \rightarrow x(-2 - 4x^2) = 0 \rightarrow x = 0$$

- En $(-1,88;\ 0) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente
- En $(0;\ 1,88) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente

En $x = 0$ presenta un máximo.

$$y'' = \frac{-4x^6 - 2x^4 - 194x^2 - 32}{(16 - x^2 - x^4)^2} < 0 \rightarrow \text{Función convexa}$$

No presenta puntos de inflexión.



109 Representa gráficamente la función $f(x) = x^3 - 3x$.

(Navarra. Junio 2006. Opción D. Pregunta 1)

Dom $f = \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X:

$f(x) = 0 \rightarrow x^3 - 3x = 0 \rightarrow x(x^2 - 3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$

$\rightarrow \left(-\sqrt{3},\ 0\right), (0,\ 0), \left(\sqrt{3},\ 0\right)$

- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0,\ 0)$

Tiene ramas parabólicas: $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - 3x) = +\infty \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 - 3x) = -\infty$

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \rightarrow x = \pm 1$

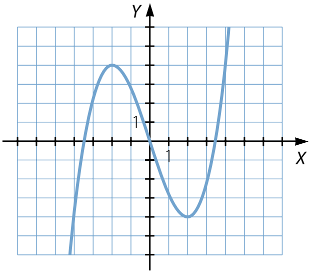
- En $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente
- En $(-1, 1) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente

En $x = -1$ presenta un máximo y en $x = 1$, un mínimo.

$f''(x) = 6x = 0 \rightarrow x = 0$

- En $(-\infty, 0) \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ convexa
- En $(0, +\infty) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ cóncava

En $x = 0$ presenta un punto de inflexión.



110 **Dada la función $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$, determínense los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los de concavidad y convexidad, los puntos de inflexión y las asíntotas. Esbócese su gráfica.**

(Castilla y León. Junio 2006. Prueba B. Problema 2)

$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1\}$

- Cortes con el eje X: $f(x) = 0 \rightarrow \dfrac{x-1}{x+1} = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow (1, 0)$
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = -1 \rightarrow (0, -1)$

$\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x-1}{x+1} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical: $x = -1$

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x-1}{x+1} = 1 \rightarrow$ Asíntota horizontal: $y = 1$

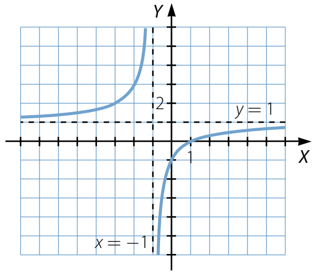
No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas.

$f'(x) = \dfrac{2}{(x+1)^2} > 0 \rightarrow f(x)$ creciente

No presenta máximos ni mínimos.

$f''(x) = \dfrac{-4}{(x+1)^3} \neq 0 \rightarrow$ No presenta puntos de inflexión

- En $(-\infty, -1) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ cóncava
- En $(-1, +\infty) \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ convexa



111 Se considera la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.

a) Halle sus asíntotas, máximos y mínimos.

b) Represente gráficamente la función.

(Asturias. Junio 2008. Bloque 6)

a) Dom $f = \mathbb{R}$

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0 \to \text{Asíntota horizontal: } y = 0$$

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas.ç

$$f'(x) = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} = 0 \to x = \pm 1$$

- En $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \to f'(x) < 0 \to f(x)$ decreciente
- En $(-1, 1) \to f'(x) > 0 \to f(x)$ creciente

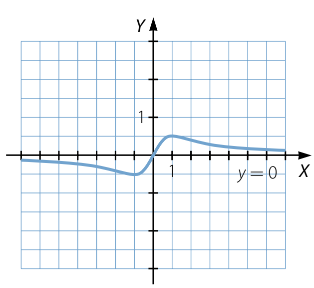
En $x = -1$ presenta un mínimo y en $x = 1$, un máximo.

b) La función corta a los ejes en el punto (0, 0).

$$f''(x) = \frac{2x^3-6x}{(x+1)^3} = 0 \to 2x^3 - 6x = 0 \to \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

- En $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(0, \sqrt{3}\right) \to f''(x) < 0 \to f(x)$ convexa
- En $\left(-\sqrt{3}, 0\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right) \to f''(x) > 0 \to f(x)$ cóncava

En $x = 0$, $x = -\sqrt{3}$ y $x = \sqrt{3}$ presenta puntos de inflexión.



112 Estudia (dominio, crecimiento, máximos y mínimos, asíntotas) y representa gráficamente la función:

$$f(x) = \frac{2x-1}{x-x^2}$$

(La Rioja. Junio 2006. Propuesta B. Ejercicio 4)

$$x - x^2 = 0 \rightarrow x(1-x) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0, 1\}$$

- Cortes con el eje X: $f(x) = 0 \rightarrow \dfrac{2x-1}{x-x^2} = 0 \rightarrow 2x-1 = 0 \rightarrow x = \dfrac{1}{2} \rightarrow \left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$
- Corte con el eje Y: no tiene.

$$\lim_{x \to 0} \frac{2x-1}{x-x^2} = \infty \rightarrow \text{Asíntota vertical: } x = 0$$

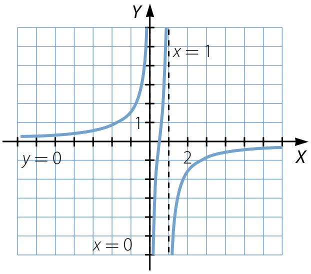
$$\lim_{x \to 1} \frac{2x-1}{x-x^2} = \infty \rightarrow \text{Asíntota vertical: } x = 1$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x-1}{x-x^2} = 0 \rightarrow \text{Asíntota horizontal: } y = 0$$

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas.

$$f'(x) = \frac{2x^2-2x+1}{(x-x^2)^2} > 0 \rightarrow f(x) \text{ creciente}$$

No presenta máximos ni mínimos.



113 Dada la función $f(x) = \dfrac{x^3}{1-x^2}$, se pide:

a) Dominio y cortes con el eje X.

b) Puntos de discontinuidad, tipos de discontinuidad y asíntotas verticales (calculando los límites laterales).

c) Asíntotas horizontales y oblicuas.

d) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Extremos.

e) Representación gráfica aproximada teniendo en cuenta los resultados de los apartados anteriores.

(Murcia. Septiembre 2007. Bloque 3. Cuestión A)

a) Dom $f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

- Cortes con el eje X: $f(x) = 0 \rightarrow \dfrac{x^3}{1-x^2} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$

b) f es continua en $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3}{1 - x^2} = \infty \to \text{Asíntota vertical: } x = 1$$

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^3}{1 - x^2} = \infty \to \text{Asíntota vertical: } x = -1$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x^3}{1 - x^2} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x^3}{1 - x^2} = +\infty \end{array}\right\} \to \text{Discontinuidad de salto infinito en } x = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{x^3}{1 - x^2} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{x^3}{1 - x^2} = +\infty \end{array}\right\} \to \text{Discontinuidad de salto infinito en } x = -1$$

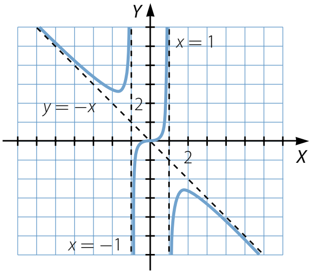
c) $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{1 - x^2} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3}{1 - x^2} = +\infty \end{array}\right\} \to \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^3}{x(1 - x^2)} = -1 \to m = -1 \\ \lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^3}{1 - x^2} + x\right) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{1 - x^2} = 0 \to n = 0 \end{array}\right\} \to \text{Asíntota oblicua: } y = -x$$

d) $$f'(x) = \frac{-x^4 + 3x^2}{(1 - x^2)^2} = 0 \to x^2(3 - x^2) = 0 \to \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

- En $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right) \to f'(x) < 0 \to f(x)$ decreciente
- En $\left(-\sqrt{3}, -1\right) \cup (-1, 1) \cup \left(1, \sqrt{3}\right) \to f'(x) > 0 \to f(x)$ creciente

En $x = -\sqrt{3}$ presenta un mínimo y en $x = \sqrt{3}$, un máximo.

e) 

114 Estudia (dominio, crecimiento, máximos y mínimos, asíntotas) y representa gráficamente la función $y = \dfrac{\ln x}{x}$.

(La Rioja. Septiembre 2006. Propuesta A. Ejercicio 5)

Dominio $= (0, +\infty)$

$$y' = \frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \to \ln x = 1 \to x = e$$

- En $(0, e) \to y' > 0 \to$ Función creciente
- En $(e, +\infty) \to y' < 0 \to$ Función decreciente

En $x = e$ presenta un máximo.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{x} = \infty \to \text{Asíntota vertical: } x = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \to \text{Asíntota horizontal: } y = 0$$

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas.

Antes de representar la función, estudiamos los puntos de corte, y la concavidad y la convexidad:

- Cortes con el eje X: $\frac{\ln x}{x} = 0 \to \ln x = 0 \to x = e^0 = 1 \to (1, 0)$
- Corte con el eje Y: no tiene.

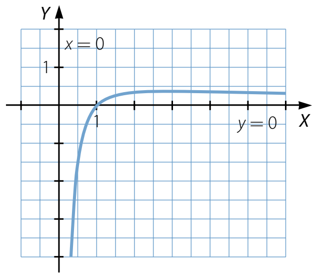
$$y'' = \frac{\frac{-1}{x}x^2 - (1 - \ln x)2x}{x^4} =$$

$$= \frac{-1 - (1 - \ln x)2}{x^3} = \frac{-3 + 2\ln x}{x^3} = 0$$

$$\to \ln x = \frac{3}{2} \to x = e^{\frac{3}{2}} \to x = \sqrt{e^3}$$

- En $\left(0, \sqrt{e^3}\right) \to y'' < 0 \to$ Función convexa
- En $\left(\sqrt{e^3}, +\infty\right) \to y'' > 0 \to$ Función cóncava

En $x = \sqrt{e^3}$ presenta un punto de inflexión.



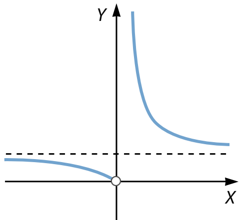
115 **Considera las tres funciones cuyas expresiones respectivas vienen dadas, para $x \neq 0$, por:**

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x} \qquad g(x) = e^{\frac{1}{x}} \qquad h(x) = \text{Ln}\,|x|$$

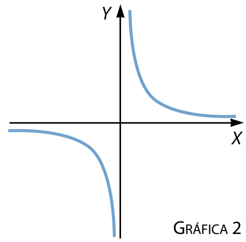
siendo Ln la función logaritmo neperiano.

a) Halla las ecuaciones de las asíntotas de las gráficas de f, g y h.

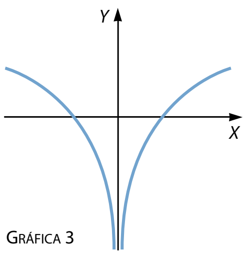
b) Identifica, entre las que siguen, la gráfica de cada función, justificando la respuesta.



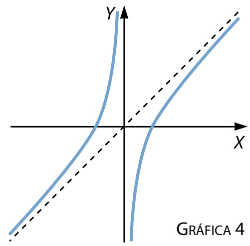
GRÁFICA 1



GRÁFICA 2



GRÁFICA 3



GRÁFICA 4

(Andalucía. Año 2005. Modelo 3. Opción B. Ejercicio 1)

a) • Asíntotas de $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - 1}{x} = \infty \rightarrow \text{Asíntota vertical: } x = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 1}{x} = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 1}{x} = -\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2} = 1 \rightarrow m = 1 \\ \displaystyle\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x} - x\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{-1}{x} = 0 \rightarrow n = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Asíntota oblicua: } y = x$$

• Asíntotas de $g(x) = e^{\frac{1}{x}}$

$$\lim_{x \to 0} e^{\frac{1}{x}} = \infty \rightarrow \text{Asíntota vertical: } x = 0$$

$$\lim_{x \to \infty} e^{\frac{1}{x}} = 1 \rightarrow \text{Asíntota horizontal: } y = 1$$

No tiene asíntotas oblicuas.

• Asíntotas de $h(x) = \ln |x|$

$$\lim_{x \to 0} \ln |x| = \infty \rightarrow \text{Asíntota vertical: } x = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to +\infty} \ln |x| = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x \to -\infty} \ln |x| = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln|x|}{x} = 0 \to \text{No tiene asíntotas oblicuas.}$$

b) Por lo estudiado en el apartado anterior, f corresponde a la gráfica 4, g corresponde a la gráfica 1 y h corresponde a la gráfica 3.

116 **Considera la función $y = \frac{(x+1)^2}{e^x}$. Halla los extremos locales y los puntos de inflexión. Haz una gráfica aproximada de esta función.**

(Baleares. Septiembre 2007. Opción A. Cuestión 3)

Dominio $= \mathbb{R}$

$$y' = \frac{2(x+1)e^x - (x+1)^2 e^x}{e^{2x}} = \frac{2x + 2 - x^2 - 1 - 2x}{e^x} = \frac{1 - x^2}{e^x} = 0 \to x = \pm 1$$

- En $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \to y' < 0 \to$ Función decreciente
- En $(-1, 1) \to y' > 0 \to$ Función creciente

En $x = -1$ presenta un mínimo y en $x = 1$, un máximo.

$$y'' = \frac{-2xe^x - (1 - x^2)e^x}{e^{2x}} = \frac{-2x - 1 + x^2}{e^x} = 0 \to x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$\to x = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

- En $\left(-\infty, 1 - \sqrt{2}\right) \cup \left(1 + \sqrt{2}, +\infty\right) \to y'' > 0 \to$ Función cóncava
- En $\left(1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}\right) \to y'' < 0 \to$ Función convexa

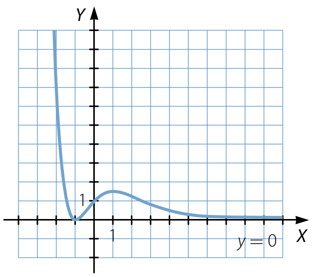
En $x = 1 \pm \sqrt{2}$ presenta dos puntos de inflexión.

Para representar la gráfica, estudiamos sus asíntotas y ramas parabólicas.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(x+1)^2}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x+2}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{e^x} = 0 \to \text{Asíntota horizontal: } y = 0$$

No tiene asíntotas oblicuas.

Tiene una rama parabólica: $\lim_{x \to -\infty} \frac{(x+1)^2}{e^x} = +\infty$



117 **Sea la función $f(x) = x^2 e^{-x}$.**

a) Comprueba que la recta $y = 0$ es asíntota horizontal en $+\infty$.

b) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

c) Con los datos anteriores, haz una representación aproximada de la gráfica de la función.

(Extremadura. Septiembre 2007. Repertorio B. Ejercicio 2)

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{e^x} \to \dfrac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x}{e^x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{e^x} = 0$

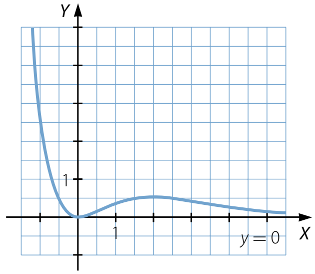
$\to$ Asíntota horizontal: $y = 0$

b) $f'(x) = \dfrac{2xe^x - x^2e^x}{e^{2x}} = \dfrac{2x - x^2}{e^x} = 0 \to x(2-x) = 0 \to \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

- En $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty) \to f'(x) < 0 \to f(x)$ decreciente
- En $(0, 2) \to f'(x) > 0 \to f(x)$ creciente

En $x = 0$ presenta un mínimo y en $x = 2$, un máximo.

c) Para dibujar la gráfica necesitamos saber que: $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{e^x} = +\infty$



118 **Calcula las asíntotas y determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = (1 + x^2)^{-1}x$. A partir de los resultados obtenidos, dibuja la gráfica de la función $f(x)$.**

(Extremadura. Septiembre 2006. Repertorio B. Ejercicio 3)

Dom $f = \mathbb{R}$

No tiene asíntotas verticales.

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{1 + x^2} = 0 \to$ Asíntota horizontal: $y = 0$

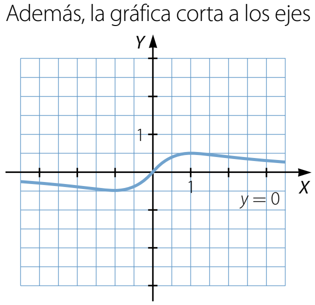
No tiene asíntotas oblicuas.

$f'(x) = \dfrac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2} = 0 \to x = \pm 1$

- En $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \to f'(x) < 0$
  $\to f(x)$ decreciente
- En $(-1, 1) \to f'(x) > 0 \to f(x)$ creciente

En $x = -1$ presenta un mínimo y en $x = 1$, un máximo.

Además, la gráfica corta a los ejes en el punto $(0, 0)$.



119 Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, determina las constantes a, b, c y d de manera que simultáneamente:

- Su gráfica pase por el origen de coordenadas y por el punto (2, 2).
- La función posea un punto de inflexión en $x = 0$.
- La función posea un mínimo en $x = 1$.

(Asturias. Septiembre 2007. Bloque 4)

Pasa por el origen de coordenadas:

$f(0) = 0 \rightarrow d = 0$

Pasa por el punto (2, 2):

$f(2) = 2 \rightarrow 8a + 4b + 2c = 2 \rightarrow 4a + 2b + c = 1$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \qquad f''(x) = 6ax + 2b$

Tiene un punto de inflexión en $x = 0$:

$f''(0) = 0 \rightarrow 2b = 0 \rightarrow b = 0$

Presenta un mínimo en $x = 1$:

$f'(1) = 1 \rightarrow 3a + 2b + c = 1 \rightarrow 3a + c = 1$

Por tanto, resulta que: $\left.\begin{array}{l} d = 0 \\ 4a + 2b + c = 1 \\ b = 0 \\ 3a + c = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 4a + c = 1 \\ 3a + c = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 1 \\ c = -3 \end{array}\right.$

La función que buscamos es: $f(x) = x^3 - 3x$

PREPARA TU SELECTIVIDAD

1 Dada la función: $f(x) = e^{-x^2+2x}$

a) Encuentre su dominio y las posibles intersecciones con los ejes.
b) Encuentre los intervalos donde crece y decrece y los extremos relativos.
c) Encuentre sus posibles asíntotas.
d) Haga la representación gráfica aproximada de la función.

(Cataluña. Año 2006. Serie 3. Problema 5)

a) Dom $f = \mathbb{R}$
- Cortes con el eje X: no tiene.
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow f(0) = e^0 = 1 \rightarrow (0, 1)$

b) $f'(x) = e^{-x^2+2x}(-2x + 2) = 0 \rightarrow -2x + 2 = 0 \rightarrow x = 1$
- En $(-\infty, 1) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente
- En $(1, +\infty) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente

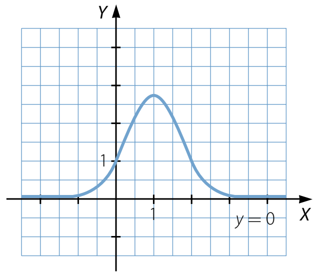
En $x = 1$ presenta un máximo.

c) No tiene asíntotas verticales.

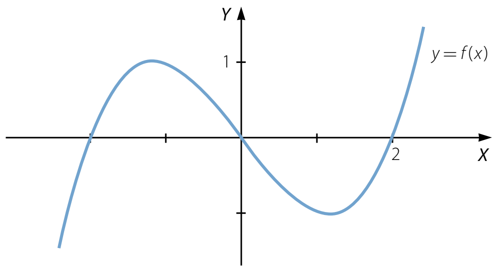
$\lim\limits_{x \to \infty} e^{-x^2+2x} = 0 \rightarrow$ Asíntota horizontal: $y = 0$

No tiene asíntotas oblicuas.

d)



2 Si la gráfica de una función $f(x)$ es:



representar aproximadamente la gráfica de la derivada de $f'(x)$.

(Extremadura. Junio 2004. Repertorio B. Ejercicio 4)

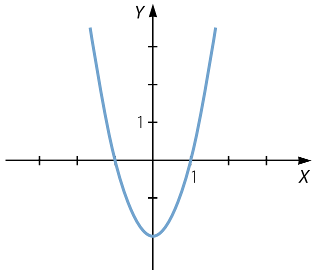
- En $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \rightarrow f(x)$ creciente $\rightarrow f'(x) > 0$
- En $(-1, 1) \rightarrow f(x)$ decreciente $\rightarrow f'(x) < 0$

En $x = -1$ presenta un máximo $\rightarrow f'(-1) = 0$

En $x = 1$ presenta un mínimo $\rightarrow f'(1) = 0$

En $x = 0$ presenta un punto de inflexión $\rightarrow f''(0) = 0 \rightarrow$ Presenta un extremo relativo.

Una gráfica que cumple estas condiciones es, por ejemplo:



3 Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2}{4 - x}$, se pide:

a) Dominio y cortes con el eje X.

b) Asíntotas verticales (calculando los límites laterales).

c) Asíntotas horizontales y oblicuas.

d) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Extremos.

e) Representación gráfica aproximada.

(Murcia. Septiembre 2008. Bloque 3. Cuestión A)

a) Dom $f = \mathbb{R} - \{4\}$

- Cortes con el eje X: $f(x) = 0 \rightarrow \dfrac{x^2}{4-x} = 0 \rightarrow x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$

b) $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 4^+} \dfrac{x^2}{4-x} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 4^-} \dfrac{x^2}{4-x} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{Asíntota vertical: } x = 4$$

c) $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{4-x} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{4-x} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2}{x\left(4-x\right)} = -1 \rightarrow m = -1 \\ \lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^2}{4-x} + x\right) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4x}{4-x} = -4 \rightarrow n = -4 \end{array}\right\}$$

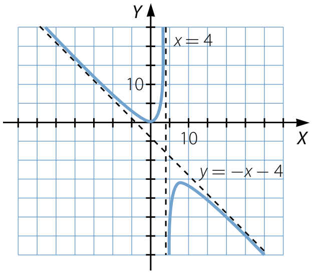
$$\rightarrow \text{Asíntota oblicua: } y = -x - 4$$

d) $f'(x) = \dfrac{-x^2 + 8x}{(4-x)^2} = 0 \rightarrow -x^2 + 8x = 0 \rightarrow x(-x+8) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 8 \end{cases}$

- En $(-\infty, 0) \cup (8, +\infty) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente
- En $(0, 4) \cup (4, 8) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente

En $x = 8$ presenta un máximo y en $x = 0$, un mínimo.

e)



4 Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 6x + 8 & \text{si } x \le -2 \\ 2x + 4 & \text{si } -2 < x \le 0 \\ 4\cos x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Haz un dibujo aproximado de su gráfica.

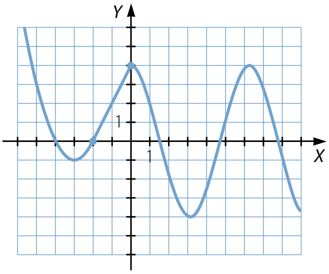
$$\left.\begin{array}{l} f(-2) = 0 \\ \lim\limits_{x \to -2^-} (x^2 + 6x + 8) = 4 - 12 + 8 = 0 \\ \lim\limits_{x \to -2^+} (2x + 4) = 0 \end{array}\right\} \to \text{Continua en } x = -2$$

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 4 \\ \lim\limits_{x \to 0^-} (2x + 4) = 4 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} 4\cos x = 4 \end{array}\right\} \to \text{Continua en } x = 0$$

Por tanto, la función es continua en $\mathbb{R}$.

- En $(-\infty, -2] \to$ Parábola de vértice $(-3, -1)$ y cortes con el eje X los puntos $(-2, 0)$ y $(-4, 0)$.
- En el intervalo $(-2, 0] \to$ Recta que pasa por los puntos $(-2, 0)$ y $(-4, 0)$.
- En $(0, +\infty) \to$ Función $y = \cos x$ multiplicada por 4.

La gráfica es:



5 **Considera las funciones $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = e^{x-1}$ y $g(x) = e^{1-x}$. Esboza las gráficas de f y g y determina su punto de corte.**

(Andalucía. Año 2007. Modelo 3. Opción A. Ejercicio 2)

$f(x) = e^{x-1}$

Dom $f = \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X: no tiene.
- Corte con el eje Y: $x = 0 \to f(0) = \dfrac{1}{e} \to \left(0, \dfrac{1}{e}\right)$

No tiene asíntotas verticales.

Asíntota horizontal:

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x-1} = +\infty \to$ No tiene asíntota horizontal.

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x-1} = 0 \to$ Asíntota horizontal: $y = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x-1}}{x} = +\infty \to$ No tiene asíntota oblicua.

$f'(x) = e^{x-1} > 0 \rightarrow$ Función creciente

No tiene máximos ni mínimos.

$f''(x) = e^{x+1} > 0 \rightarrow$ Función cóncava

No presenta puntos de inflexión.

$g(x) = e^{1-x}$

Dom $g = \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X: no tiene.
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow g(0) = e \rightarrow (0, e)$

No tiene asíntotas verticales.

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^{1-x} = 0 \rightarrow$ Asíntota horizontal: $y = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^{1-x} = +\infty \rightarrow$ No tiene asíntota horizontal.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{1-x}}{x} = +\infty \rightarrow$ No tiene asíntota oblicua.

$g'(x) = -e^{1-x} < 0 \rightarrow$ Función decreciente

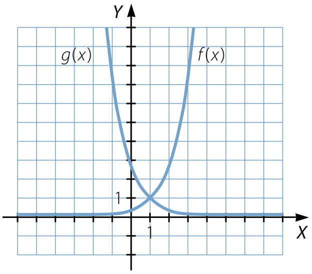
No presenta máximos ni mínimos.

$g''(x) = e^{x+1} > 0 \rightarrow$ Función cóncava

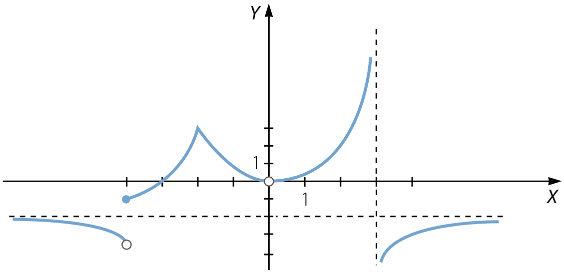
No presenta puntos de inflexión.

Puntos de corte de las dos gráficas:

$e^{x-1} = e^{1-x} \rightarrow x - 1 = 1 - x \rightarrow 2x = 2 \rightarrow x = 1 \rightarrow (1, 1)$



6 **Determinar el dominio, recorrido, puntos de cortes con los ejes coordenados, asíntotas, máximos y mínimos, puntos de inflexión e intervalos de crecimiento, decrecimiento, concavidad y convexidad de la siguiente función:**



(Canarias. Junio 2007. Opción B. Cuestión 2)

Dominio $= \mathbb{R} - \{0, 3\}$

Recorrido $= \mathbb{R}$

- Cortes con el eje *X*: $(-3, 0)$
- Corte con el eje *Y*: no tiene.

$\lim_{x \to 3} f(x) = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical: $x = 3$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = -2 \rightarrow$ Asíntota horizontal: $y = -2$

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas.

- Crecimiento: $(-4, -2) \cup (0, 3) \cup (3, +\infty)$
- Decrecimiento: $(-\infty, -4) \cup (-2, 0)$

Presenta un máximo en $(-2, 3)$ y un mínimo en $(-4, -1)$.

- Concavidad: $(-4, -2) \cup (-2, 0) \cup (0, 3)$
- Convexidad: $(-\infty, -4) \cup (3, +\infty)$

No presenta puntos de inflexión.