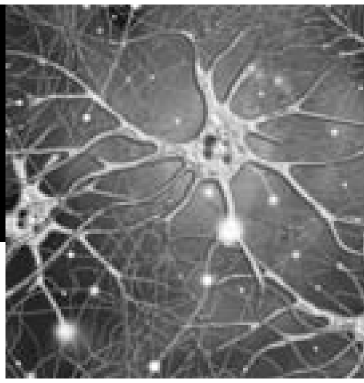
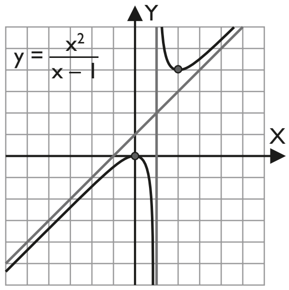
11 Aplicaciones de las derivadas



1. Máximos, mínimos y monotonía

Piensa y calcula

Dada la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$ representada en el margen, halla los máximos y los mínimos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.



Solución:

Máximo relativo: O(0, 0)

Mínimo relativo: B(2, 4)

Creciente (↗): $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

Decreciente (↘): $(0, 1) \cup (1, 2)$

Aplica la teoría

1. Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de las siguientes funciones:

a) $y = x^3 - 3x^2 + 3$ b) $y = 3x^4 - 4x^3$

Solución:

a) $y' = 3x^2 - 6x$

$y' = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$

Máximo relativo: A(0, 3)

Mínimo relativo: B(2, –1)

Creciente (↗): $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

Decreciente (↘): $(0, 2)$

b) $y' = 12x^3 - 12x^2$

$y' = 0 \Rightarrow x = 0, x = 1$

Máximo relativo: no tiene.

Mínimo relativo: A(1, –1)

Creciente (↗): $(1, +\infty)$

Decreciente (↘): $(-\infty, 1)$

2. Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de las siguientes funciones:

a) $y = \dfrac{x^2 + 1}{x}$ b) $y = \dfrac{3}{x^2 + 1}$

Solución:

a) $y' = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$

$y' = 0 \Rightarrow x = -1, x = 1$

Máximo relativo: A(–1, –2)

Mínimo relativo: B(1, 2)

Creciente (↗): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

Decreciente (↘): $(-1, 0) \cup (0, 1)$

b) $y' = -\dfrac{6x}{(x^2 + 1)^2}$

$y' = 0 \Rightarrow x = 0$

Máximo relativo: A(0, 3)

Mínimo relativo: no tiene.

Creciente (↗): $(-\infty, 0)$

Decreciente (↘): $(0, +\infty)$

3. Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la siguiente función: $y = \sqrt{x^2 + 4}$

Solución:

$y' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$ $y' = 0 \Rightarrow x = 0$

Máximo relativo: no tiene.

Mínimo relativo: A(0, 2)

Creciente (↗): $(0, +\infty)$

Decreciente (↘): $(-\infty, 0)$

4. Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la siguiente función: $y = (2 - x)e^x$

Solución:

$y' = (1 - x)e^x$ $\quad y' = 0 \Rightarrow x = 1$

Máximo relativo: A(1, e)

Mínimo relativo: no tiene.

Creciente (↗): $(-\infty, 1)$

Decreciente (↘): $(1, +\infty)$

5. Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la siguiente función en $(0, 2\pi)$:

$$y = \frac{x}{2} - \text{sen } x$$

Solución:

$y' = 1/2 - \cos x$

$y' = 0 \Rightarrow x = \pi/3, x = 5\pi/3$

Máximo relativo: $A\left(\frac{5\pi}{3}, \frac{5\pi + 3\sqrt{3}}{6}\right)$

Mínimo relativo: $B\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi - 3\sqrt{3}}{6}\right)$

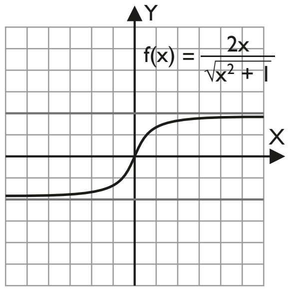
Creciente (↗): $(\pi/3, 5\pi/3)$

Decreciente (↘): $(0, \pi/3) \cup (5\pi/3, 2\pi)$

2. Puntos de inflexión y curvatura

Piensa y calcula

Dada $y = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ representada en el margen, halla los puntos de inflexión y los intervalos de concavidad y convexidad.



Solución:

Punto de inflexión: O(0, 0)

Convexa (∪): $(-\infty, 0)$

Cóncava (∩): $(0, +\infty)$

Aplica la teoría

6. Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de las siguientes funciones:

a) $y = x^3 - 9x^2 + 27x - 26$ $\quad$ b) $y = -x^3 + 3x^2 - 2$

Solución:

a) $y' = 3x^2 - 18x + 27$

$y'' = 6x - 18$

$y'' = 0 \Rightarrow x = 3$

$y''' = 6$

$y'''(3) = 6 \neq 0$

Punto de inflexión: A(3, 1)

Convexa (∪): $(3, +\infty)$

Cóncava (∩): $(-\infty, 3)$

b) $y' = -3x^2 + 6x$

$y'' = -6x + 6$

$y'' = 0 \Rightarrow x = 1$

$y''' = -6$

$y'''(1) = -6 \neq 0$

Punto de inflexión: A(1, 0)

Convexa (∪): $(-\infty, 1)$

Cóncava (∩): $(1, +\infty)$

7. Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de las siguientes funciones:

a) $y = \frac{x}{x^2 - 1}$ $\quad$ b) $y = \frac{3x}{x^2 + 1}$

Solución:

a) $y' = -\frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2}$

$y'' = \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3}$

$y'' = 0 \Rightarrow x = 0$

$y''' = -\frac{6(x^4 + 6x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^4}$

$y'''(0) = -6 \neq 0$

Punto de inflexión: O(0, 0)

Convexa (∪): $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$

Cóncava (∩): $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$

b) $y' = \frac{3(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2}$

$y'' = \frac{6x(x^2 - 3)}{(x^2 + 1)^3}$

$y'' = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{3}, x = 0, x = \sqrt{3}$

$$y''' = -\frac{18(x^4 - 6x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^4}$$

$y'''(-\sqrt{3}) = 9/16 \neq 0$

$y'''(0) = -18 \neq 0$

$y'''(\sqrt{3}) = 9/16 \neq 0$

Punto de inflexión:

$A(-\sqrt{3}, -3\sqrt{3}/4), O(0, 0), B(\sqrt{3}, 3\sqrt{3}/4)$

Convexa ($\cup$): $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$

Cóncava ($\cap$): $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$

8. Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función $y = xe^x$

Solución:

$y' = (x + 1)e^x$

$y'' = (x + 2)e^x$

$y'' = 0 \Rightarrow x = -2$

$y''' = (x + 3)e^x$

$y'''(-2) = 1/e^2 \neq 0$

Punto de inflexión: $A(-2, -2/e^2)$

Convexa ($\cup$): $(-2, +\infty)$

Cóncava ($\cap$): $(-\infty, -2)$

9. Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función $y = L\,(x^2 + 4)$

Solución:

$$y' = \frac{2x}{x^2 + 4}$$

$$y'' = -\frac{2(x^2 - 4)}{(x^2 + 4)^2}$$

$y'' = 0 \Rightarrow x = -2, x = 2$

$$y''' = \frac{4x(x^2 - 12)}{(x^2 + 4)^3}$$

$y'''(-2) = 1/8 \neq 0$

$y'''(2) = -1/8 \neq 0$

Punto de inflexión: $A(-2, 3\,L\,2), B(2, 3\,L\,2)$

Convexa ($\cup$): $(-2, 2)$

Cóncava ($\cap$): $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

10. Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función $y = \text{sen } x \cos x$ en $(0, 2\pi)$

Solución:

$y' = -1 + 2\cos^2 x$

$y'' = -4 \text{ sen } x \cos x$

$y'' = 0 \Rightarrow x = \pi/2, x = \pi, x = 3\pi/2$

$y''' = 4(1 - 2\cos^2 x)$

$y'''(\pi/2) = 4 \neq 0$

$y'''(\pi) = -4 \neq 0$

$y'''(3\pi/2) = 4 \neq 0$

Punto de inflexión: $A(\pi/2, 0), B(\pi, 0), C(3\pi/2, 0)$

Convexa ($\cup$): $(\pi/2, \pi) \cup (3\pi/2, 2\pi)$

Cóncava ($\cap$): $(0, \pi/2) \cup (\pi, 3\pi/2)$

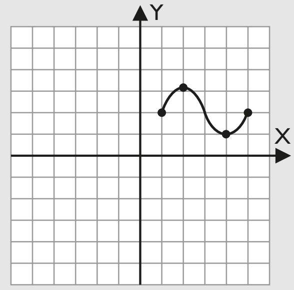
3. Teorema de Rolle y el teorema del Valor Medio

Piensa y calcula

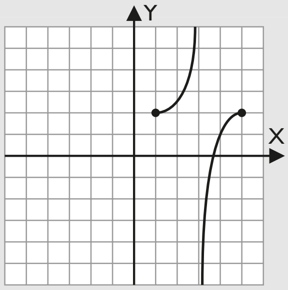
Representa en unos ejes coordenados los puntos $A(1, 2)$ y $B(5, 2)$ y dibuja una función que comience en $A(1, 2)$ y finalice en $B(5, 2)$. ¿Hay algún punto en el que la derivada es cero? ¿Sería posible evitar que haya un punto así?

Solución:

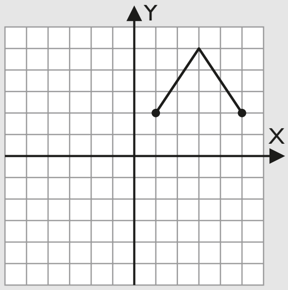
Puede haber varios puntos en los que la derivada es cero. Por ejemplo:



Se puede evitar si la función no es continua. Por ejemplo:



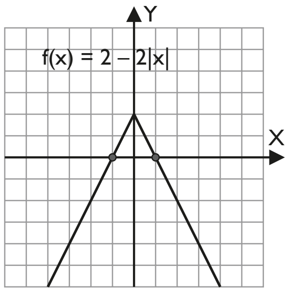
Y si es continua, que tenga un pico. Por ejemplo:



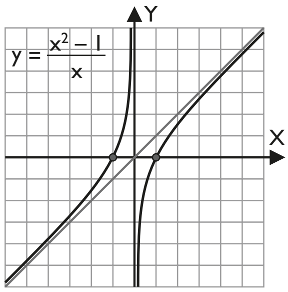
Aplica la teoría

11. Explica por qué el teorema de Rolle no es aplicable a las siguientes funciones en el intervalo $[-1, 1]$ a pesar de ser $f(-1) = f(1) = 0$

a)



b)



Solución:

a) $f(x)$ no es derivable en $(-1, 1)$; no existe la derivada en $x = 0$

b) $f(x)$ no es continua en $[-1, 1]$; tiene una discontinuidad de salto infinito en $x = 0$

12. Discute si es aplicable el teorema de Rolle a las siguientes funciones en los intervalos que se dan:

a) $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $[0, 2\pi]$

b) $f(x) = 1 + \sqrt[3]{x^2}$ en $[-1, 1]$

c) $f(x) = x - \sqrt{x}$ en $[0, 1]$

Solución:

a) El dominio de $f(x)$ es $\mathbb{R}$ y $[0, 2\pi] \subset \mathbb{R}$

- $f(x)$ es continua en $[0, 2\pi]$ porque las funciones trigonométricas son continuas en $\mathbb{R}$
- $f(x)$ es derivable en $(0, 2\pi)$ porque las funciones trigonométricas son derivables en su dominio.
- $f(0) = f(2\pi) = 0$

Luego se puede aplicar el teorema de Rolle.

b) El dominio de $f(x)$ es $\mathbb{R}$ y $[-1, 1] \subset \mathbb{R}$

- $f(x)$ es continua en $[-1, 1]$ por ser una función irracional.
- $f'(x) = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$, que en $x = 0$ no está definida. Luego no es derivable en $(-1, 1)$

No se puede aplicar el teorema de Rolle.

c) El dominio de $f(x)$ es $[0, +\infty)$ y $[0, 1] \subset [0, +\infty)$

- $f(x)$ es continua en $[0, 1]$ por ser la diferencia de una función polinómica y una irracional.
- $f(x)$ es derivable en $(0, 1)$ por ser la diferencia de una función polinómica y una irracional.
- $f(0) = f(1) = 0$

Luego se puede aplicar el teorema de Rolle.

13. Discute si es aplicable el teorema del Valor Medio a las siguientes funciones en los intervalos $[a, b]$ que se dan y en caso afirmativo calcula los valores de $c \in (a, b)$ tales que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

a) $f(x) = \sqrt{2 - x}$ en $[-2, 1]$ b) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ en $[0, 1]$

c) $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$ en $[1, 2]$

Solución:

a) El dominio de $f(x)$ es $(-\infty, 2]$ y $[-2, 1] \subset (-\infty, 2]$

- $f(x)$ es continua en $[-2, 1]$ porque las funciones irracionales son continuas en su dominio.
- $f(x)$ es derivable en $(-2, 1)$ porque las funciones irracionales son derivables en su dominio.

Se puede aplicar el teorema del valor medio.

$$\frac{f(1)-f(-2)}{1-(-2)} = \frac{1-2}{3} = -\frac{1}{3}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{2-x}} \Rightarrow -\frac{1}{2\sqrt{2-x}} = -\frac{1}{3} \Rightarrow x = -\frac{1}{4}$$

b) El dominio de f(x) es $\mathbb{R}$ y $[0, 1] \subset \mathbb{R}$

- f(x) es continua en [0,1] porque las funciones irracionales son continuas en su dominio.
- f(x) es derivable en (0, 1) porque el único valor donde no es derivable es x = 0, pero sí lo es por la derecha.

Se puede aplicar el teorema del valor medio.

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0} = \frac{1-0}{1-0} = 1$$

$$f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \Rightarrow \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} = 1 \Rightarrow x = 8/27$$

c) El dominio de f(x) es $\mathbb{R} - \{0\}$ y $[1, 2] \subset \mathbb{R} - \{0\}$

- f(x) es continua en [1, 2] porque las funciones racionales son continuas en su dominio.
- f(x) es derivable en (1, 2) porque las funciones racionales son derivables en su dominio.

Se puede aplicar el teorema del valor medio.

$$\frac{f(2)-f(1)}{2-1} = -\frac{1}{2}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow -\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

$x = -\sqrt{2}, x = \sqrt{2}$

Solo vale el valor $x = \sqrt{2} \in (1, 2)$

4. Regla de L'Hôpital

Piensa y calcula

Calcula mentalmente los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x^2+1}{\sqrt{x}}$ c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x}$

Solución:

a) 2 b) $+\infty$ c) 0

Aplica la teoría

14. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x}$

Solución:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

15. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{e^x}$

Solución:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2e^x\sqrt{x+1}} = 0$$

16. $\lim\limits_{x \to 0^+} x \, Lx$

Solución:

$$\lim_{x \to 0^+} x \, L\, x = [0 \cdot (-\infty)] = \lim_{x \to 0^+} \frac{L\, x}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{-\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} (-x) = 0$$

17. $\lim\limits_{x \to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

Solución:

$$\lim_{x \to 1} x^{\frac{1}{1-x}} = [1^\infty] = e^{\lim\limits_{x \to 1}\left(\frac{1}{1-x} L x\right)} = e^{\lim\limits_{x \to 1}\left(\frac{1/x}{1-x}\right)} = e^{-1} = 1/e$$

18. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - \text{sen } x}{x^3}$

Solución:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \text{sen } x}{x^3} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{6x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{6} = 1/6$$

19. $\lim\limits_{x\to 0} (\text{cotg } x)^{\text{sen } x}$

Solución:

$$\lim_{x\to 0} (\text{cotg } x)^{\text{sen } x} = [\infty^0] = e^{\lim\limits_{x\to 0} (\text{sen } x \text{ L cotg } x)} =$$
$$= e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{L cotg } x}{1/\text{sen } x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{-\text{cosec}^2 x/\text{cotg } x}{-\cos x/\,\text{sen}^2 x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{sen } x}{\cos^2 x}} =$$
$$= e^0 = 1$$

20. $\lim\limits_{x\to 0} x^{\text{sen } x}$

Solución:

$$\lim_{x\to 0} x^{\text{sen } x} = [0^0] = e^{\lim\limits_{x\to 0} (\text{sen } x \text{ L } x)} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{L } x}{1/\text{sen } x}} =$$
$$= e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{1/x}{-\cos x/\text{sen}^2 x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{-\text{sen}^2 x}{x \cos x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{-2 \text{ sen } x \cos x}{\cos x - x \text{ sen } x}} =$$
$$= e^0 = 1$$

21. $\lim\limits_{x\to 1^+} \left(\dfrac{3}{\text{L } x} - \dfrac{2}{x-1}\right)$

Solución:

$$\lim_{x\to 1^+} \left(\frac{3}{\text{L } x} - \frac{2}{x-1}\right) = [\infty - \infty] = \lim_{x\to 1^+} \frac{3x - 3 - 2\text{L } x}{(x-1)\text{L } x} =$$
$$= \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1^+} \frac{3 - \dfrac{2}{x}}{\text{L } x + \dfrac{x-1}{x}} = +\infty$$

22. $\lim\limits_{x\to 0} x^x$

Solución:

$$\lim_{x\to 0} x^x = [0^0] = e^{\lim\limits_{x\to 0} x \text{ L } x} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{L } x}{1/x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{1/x}{-1/x^2}} =$$
$$= e^{\lim\limits_{x\to 0} (-x)} = e^0 = 1$$

23. $\lim\limits_{x\to 0^+} (\text{sen } x)^x$

Solución:

$$\lim_{x\to 0^+} (\text{sen } x)^x = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} [x \text{ L sen } x]} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\text{L sen } x}{1/x}} =$$
$$= e^{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\cos x/\text{sen } x}{-1/x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x^2 \cos x}{\text{sen } x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{2x \cos x - x^2 \text{ sen } x}{\cos x}} =$$
$$= e^{\frac{0}{1}} = e^0 = 1$$

24. $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{-x} \sqrt{x}$

Solución:

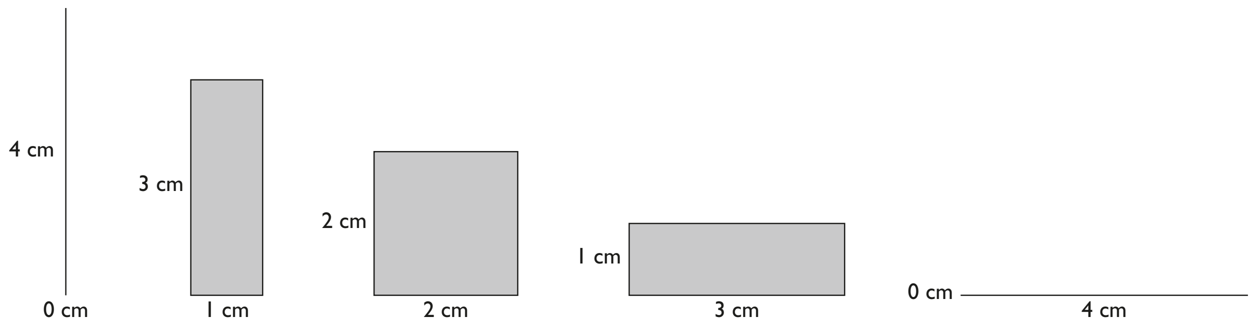
$$\lim_{x\to +\infty} e^{-x} \sqrt{x} = [0 \cdot \infty] = \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$
$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{2e^x\sqrt{x}} = 0$$

5. Problemas de optimización

Piensa y calcula

Un rectángulo tiene 8 cm de perímetro; por tanto, la base más la altura mide 4 cm. Completa la siguiente tabla y calcula las dimensiones del rectángulo que tiene mayor superficie.

Largo = x	0	1	2	3	4
Alto = y	4				
Superficie					



Solución:

Largo = x	0	1	2	3	4
Alto = y	4	3	2	1	0
Superficie	0	3	4	3	0

Un cuadrado de 2 cm de lado.

Aplica la teoría

25. Calcula dos números cuya suma sea 100 y de forma que su producto sea máximo.

Solución:

a) Incógnitas y datos.

x = primer número.

y = segundo número.

$x + y = 100$

b) Función que hay que maximizar.

$f(x, y) = xy$

Sujeto a: $x + y = 100 \Rightarrow y = 100 - x$

c) Se escribe la función con una sola variable.

$f(x) = x(100 - x)$

$f(x) = 100x - x^2$

d) Se calculan los máximos y mínimos relativos.

$f'(x) = 100 - 2x$

$100 - 2x = 0 \Rightarrow x = 50$

Si $x = 50 \Rightarrow y = 50$

e) Se comprueba en la segunda derivada.

$f''(x) = -2 < 0\ (-) \Rightarrow$ máximo relativo.

f) El primer número es $x = 50$; el segundo, $y = 50$

26. Calcula las dimensiones de un rectángulo cuyo perímetro mida 64 m y su área sea máxima.

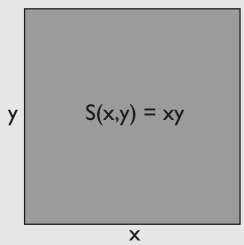
Solución:

a) Incógnitas, datos y dibujo.

x = longitud de la base.

y = altura.

Perímetro = 64 m



b) Función que hay que maximizar.

$S(x, y) = xy$

Sujeta a las condiciones:

Perímetro = 64 m $\Rightarrow x + y = 32$

c) Se escribe la ecuación con una sola variable.

$x + y = 32 \Rightarrow y = 32 - x$

$S(x) = x(32 - x)$

$S(x) = 32x - x^2$

d) Se calculan los máximos y mínimos relativos derivando.

$S'(x) = 32 - 2x$

$32 - 2x = 0 \Rightarrow x = 16$

Si $x = 16 \Rightarrow y = 16$

e) Se comprueba en la segunda derivada.

$S''(x) = -2 < 0\ (-) \Rightarrow$ máximo relativo.

f) El recinto mide 16 m por 16 m

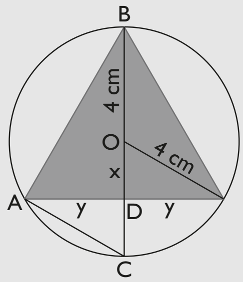
27. Calcula el área del mayor triángulo isósceles inscrito en un círculo de radio 4 cm

Solución:

a) Incógnitas, datos y dibujo.

$2y$ = base del triángulo.

h = altura del triángulo = BD



Sea $x = OD$

El triángulo ABC es rectángulo en A

Por el teorema de la altura:

$y^2 = BD \cdot DC = (4 + x) \cdot (4 - x) = 16 - x^2$

b) Función que hay que minimizar.

$A(y, h) = \frac{1}{2} 2yh$

Sujeta a las condiciones:

$y^2 = 16 - x^2 \Rightarrow y = \sqrt{16 - x^2}$

$h = 4 + x$

c) Se escribe la ecuación con una sola variable.

$A(x) = \sqrt{16 - x^2}\,(4 + x)$

$A(x) = (4 + x)\sqrt{16 - x^2}$

d) Se calculan los máximos y mínimos relativos derivando.

$$A'(x) = \sqrt{16 - x^2} - (4 + x)\frac{x}{\sqrt{16 - x^2}}$$

$$A'(x) = \sqrt{16 - x^2} - \frac{4x + x^2}{\sqrt{16 - x^2}}$$

$$\sqrt{16 - x^2} - \frac{4x + x^2}{\sqrt{16 - x^2}} = 0 \Rightarrow x = -4, x = 2$$

Si $x = -4$, no tiene sentido en el problema.

Si $x = 2$ cm $\Rightarrow y = \sqrt{12}$ cm ; $h = 6$ cm

e) Se comprueba en la segunda derivada.

$$A''(x) = -\frac{x}{\sqrt{16-x^2}} + \frac{x^3-32x-64}{(16-x^2)\sqrt{16-x^2}}$$

$A''(2) = -2\sqrt{3} < 0\ (-) \Rightarrow$ máximo relativo.

f) El triángulo tiene un área de

$$\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{12}\cdot 6 = 6\sqrt{12} = 12\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

28. Calcula la altura y el radio que debe tener un bote cilíndrico cuya área total, incluyendo las dos tapas, es de 150 cm^2 para que su volumen sea máximo.

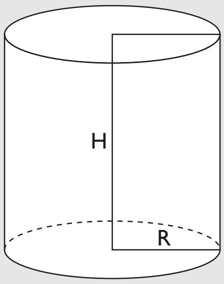
Solución:

a) Incógnitas, datos y dibujo.

R = radio del cilindro.

H = altura del cilindro.

Superficie = 150 cm^2



b) Función que hay que maximizar.

$V(R, H) = \pi R^2 H$

Sujeta a las condiciones:

Superficie = 150 cm$^2 \Rightarrow 2\pi R^2 + 2\pi RH = 150$

c) Se escribe la ecuación con una sola variable.

$$2\pi R^2 + 2\pi RH = 150 \Rightarrow y = \frac{150-2\pi R^2}{2\pi R} = \frac{75}{\pi R} - R$$

$$V(R) = \pi R^2\left(\frac{75}{\pi R} - R\right)$$

$V(R) = 75R - \pi R^3$

d) Se calculan los máximos y mínimos relativos derivando.

$V'(R) = 75 - 3\pi R^2$

$$75 - 3\pi R^2 = 0 \Rightarrow R = \frac{5}{\sqrt{\pi}} = \frac{5\sqrt{\pi}}{\pi}$$

$$\text{Si } R = \frac{5\sqrt{\pi}}{\pi} \Rightarrow H = \frac{10\sqrt{\pi}}{\pi}$$

e) Se comprueba en la segunda derivada.

$$V''(R) = -6\pi R \Rightarrow V''\left(\frac{5\sqrt{\pi}}{\pi}\right) < 0\ (-) \Rightarrow \text{máximo relativo.}$$

f) El cilindro mide $\frac{5\sqrt{\pi}}{\pi}$ cm de radio y $\frac{10\sqrt{\pi}}{\pi}$ cm de altura.

29. Dada la función $f(x) = x^2$, encuentra el punto de su gráfica que está más cerca del punto A(0, 2)

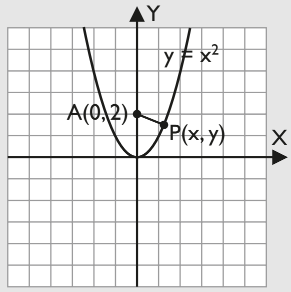
Solución:

a) Incógnitas, datos y dibujo.

Punto incógnita: P(x, y)

Punto fijo: A(0, 2)

Parábola: $y = x^2$



b) Función que hay que minimizar.

$d(A, P) = d(x, y) = \sqrt{x^2 + (y-2)^2}$

Sujeta a las condiciones:

$y = x^2$

c) Se escribe la función con una sola variable.

$d(y) = \sqrt{y + (y-2)^2}$

$d(y) = \sqrt{y^2 - 3y + 4}$

d) Se calculan los máximos y mínimos derivando.

$$d'(y) = \frac{2y-3}{2\sqrt{y^2-3y+4}}$$

$$\frac{2y-3}{2\sqrt{y^2-3y+4}} = 0 \Rightarrow y = 3/2$$

$$\text{Si } y = 3/2 \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{6}}{2}$$

e) Se comprueba en la segunda derivada.

$$d''(y) = \frac{7}{4(y^2-3y+4)\sqrt{y^2-3y+4}}$$

$$d''(3/2) = \frac{2\sqrt{7}}{7} > 0\ (+) \Rightarrow \text{mínimo relativo.}$$

f) Los puntos son: $P\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, 3/2\right)$ y $Q\left(\frac{\sqrt{6}}{2}, 3/2\right)$

6. Problemas de derivadas

Piensa y calcula

La función $f(x) = x^2 + ax + b$ pasa por el punto A(0, 4) y tiene un mínimo en el punto B(2, 0). Calcula mentalmente el valor de **a** y **b**

Solución:

$f(x) = x^2 - 4x + 4$

Aplica la teoría

30. Halla la ecuación de la recta tangente y de la normal a la curva de ecuación $y = x^3 - 3x$ en el punto de abscisa $x = 0$

Solución:

$y' = 3x^2 - 3$

$y'(0) = -3$

$y(0) = 0$

Recta tangente:

$y - 0 = -3(x - 0) \Rightarrow y = -3x$

Recta normal:

$y - 0 = \frac{1}{3}(x - 0) \Rightarrow y = x/3$

31. Halla el máximo y el mínimo absolutos de la siguiente función en el intervalo [0, 2]

$$f(x) = \frac{3x}{x^2 + 1}$$

Solución:

a) Extremos relativos:

$f'(x) = -\frac{3(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1, x = 1$

Solo se toma el valor $x = 1$

Si $x = 1 \Rightarrow f(1) = 3/2$

$f''(x) = \frac{6x(x^2 - 3)}{(x^2 + 1)^3}$

$f''(1) = -3/2 < 0\ (-) \Rightarrow$ máximo relativo.

Máximo relativo: A(1, 3/2)

b) Valores en los extremos:

$f(0) = 0$

$f(2) = 6/5$

El máximo absoluto lo alcanza en el máximo relativo: A(1, 3/2)

El mínimo absoluto lo alcanza en O(0, 0)

32. Demuestra que la ecuación siguiente tiene una única solución real.

$$x^7 + 3x + 3 = 0$$

Solución:

Se toma la función:

$f(x) = x^7 + 3x + 3$

Existencia de la raíz:

f(x) es continua porque es una función polinómica.

$f(-1) = -1$

$f(0) = 3$

Por el teorema de Bolzano, existe un valor $c \in (-1, 0)$ tal que $f(c) = 0$

Unicidad:

$f'(x) = 7x^6 + 3$

$f'(x) > 0$ para todo **x;** luego la función f(x) es estrictamente creciente.

Solo puede cortar una única vez al eje X

33. Obtén los valores de los parámetros **a, b** y **c** para que la función $f(x) = ax^3 + bx + c$ pase por el punto O(0, 0) y tenga un mínimo local en A(1, –1)

Solución:

a) Pasa por O(0,0)

$f(0) = 0 \Rightarrow c = 0$

b) Pasa por A(1, –1)

$f(1) = -1 \Rightarrow a + b + c = -1$

c) Tiene un mínimo local en A(1, –1)

$f'(x) = 3ax^2 + b$

$f'(1) = 0 \Rightarrow 3a + b = 0$

Se resuelve el sistema:

$$\left.\begin{aligned} c &= 0 \\ 3a + b &= 0 \\ a + b + c &= -1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow a = 1/2, b = -3/2, c = 0$$

La función es $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$

Preguntas tipo test

Contesta en tu cuaderno:

1 Dada la curva $y = xe^{-x^2}$, el valor de la abscisa en el punto en el que la pendiente de la recta tangente es máxima, es:

☐ $x = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$

☐ $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

☒ $x = 0$

☐ No existe ningún valor.

2 El $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}^2 (2x)}{x^3 + x^2}$ es:

☐ -4 ☒ 4
☐ 8 ☐ 2

3 La monotonía de la función $f(x) = \dfrac{3x + 1}{\sqrt{x}}$ es:

☐ creciente: $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
decreciente: $\varnothing$

☒ creciente: $(1/3, +\infty)$
decreciente: $(0, 1/3)$

☐ creciente: $(0, 1/3)$
decreciente: $(1/3, +\infty)$

☐ ninguna de las anteriores es correcta

4 La función $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x}{e^x}$ tiene:

☐ máximo relativo: $O(0, 0)$

☒ máximo relativo: $A\left(3, \dfrac{9}{e^3}\right)$
mínimo relativo: $B\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\sqrt{e}}{e}\right)$

☐ máximo relativo: $A\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{5\sqrt{e}}{e}\right)$
mínimo relativo: $B\left(3, \dfrac{9}{e^3}\right)$

☐ No tiene máximos ni mínimos relativos.

5 El $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{\ln (1 + x)} - \dfrac{1}{x}\right)$ es:

☐ $-1/2$

☐ 1

☐ 0

☒ $1/2$

6 El $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x \text{ sen } x - x}{2x^2 + x^4}$ es:

☐ $-1/2$ ☒ $1/2$
☐ 2 ☐ -2

7 Unos altos hornos producen al día **x** toneladas de acero de baja calidad y $\dfrac{40 - 5x}{10 - x}$ toneladas de acero de alta calidad, siendo 8 toneladas la producción máxima diaria de acero de baja calidad. Si el precio de una tonelada de acero de baja calidad es 100 euros y el precio de una tonelada de acero de alta calidad es 250 euros, el número de toneladas que se deben producir por día de acero de baja calidad para que el valor de venta de la producción diaria sea máximo es:

☐ 2 ☐ 8
☐ 15 ☒ 5

8 Los valores de **a** y **b** para que la función

$$f(x) = (x^2 - a)\,e^x + bx$$

tenga un punto de inflexión en $x = 0$ y un mínimo relativo en $x = 1$ son:

☐ $a = -2; b = e$ ☒ $a = 2; b = -e$
☐ $a = 2; b = -1$ ☐ $a = -2; b = 1$

9 Se considera la función $f(x) = \ln (x^2 - 4)$. Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función son:

☐ creciente: $(-\infty, +\infty)$
decreciente: $\varnothing$

☐ creciente: $(0, +\infty)$
decreciente: $(-\infty, 0)$

☐ creciente: $(-2, 2)$
decreciente: $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

☒ creciente: $(-\infty, -2)$
decreciente: $(2, +\infty)$

10 Sea la función con dominio los números reales no nulos $f(x) = \dfrac{4}{x}$

Los puntos M y N de la gráfica de f(x) para los que las rectas tangentes a la gráfica en M y N se cortan en el punto $(4, -8)$ son:

☒ $M(1, 4); N(-2, -2)$

☐ $M(-1, -4); N(2, 2)$

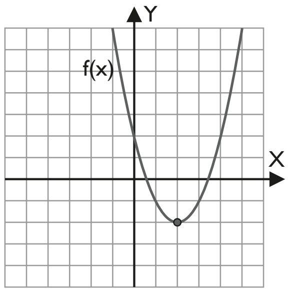
☐ $M(1, -4); N(-2, 2)$

☐ No hay solución porque $(4, -8)$ no pertenece a la gráfica de f(x)

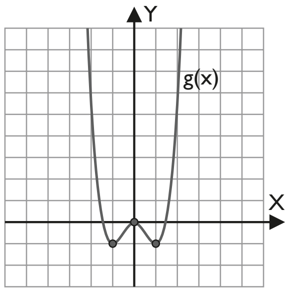
1. Máximos, mínimos y monotonía

34. Identifica en las siguientes gráficas los máximos y los mínimos relativos y los intervalos donde la función es creciente y decreciente:

a)



b)



Solución:

a) Máximo relativo: no tiene.
Mínimo relativo: $A(2, -2)$
Creciente ($\nearrow$): $(2, +\infty)$
Decreciente ($\searrow$): $(-\infty, 2)$

b) Máximo relativo: $O(0, 0)$
Mínimo relativo: $A(-1, -1), B(1, -1)$
Creciente ($\nearrow$): $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$
Decreciente ($\searrow$): $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$

35. Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de las siguientes funciones:

a) $y = \dfrac{1}{5}x^5 - x$ b) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x$

Solución:

a) $y' = x^4 - 1$
$y' = 0 \Rightarrow x = -1, x = 1$
Máximo relativo: $A(-1, 4/5)$
Mínimo relativo: $B(1, -4/5)$
Creciente ($\nearrow$): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
Decreciente ($\searrow$): $(-1, 1)$

b) $y' = 6x^2 + 6x - 12$
$y' = 0 \Rightarrow x = -2, x = 1$
Máximo relativo: $A(-2, 20)$
Mínimo relativo: $B(1, -7)$
Creciente ($\nearrow$): $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$
Decreciente ($\searrow$): $(-2, 1)$

36. Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de las siguientes funciones:

a) $y = \dfrac{x^4 + 1}{x^2}$ b) $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 9}$

Solución:

a) $y' = \dfrac{2(x^4 - 1)}{x^3}$
$y' = 0 \Rightarrow x = -1, x = 1$
Máximo relativo: no tiene.
Mínimo relativo: $A(-1, 2), B(1, 2)$
Creciente ($\nearrow$): $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$
Decreciente ($\searrow$): $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$

b) $y' = -\dfrac{18x}{(x^2 - 9)^2}$
$y' = 0 \Rightarrow x = 0$
Máximo relativo: $O(0, 0)$
Mínimo relativo: no tiene.
Creciente ($\nearrow$): $(-\infty, -3) \cup (-3, 0)$
Decreciente ($\searrow$): $(0, 3) \cup (3, +\infty)$

37. Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la siguiente función:

$$y = \sqrt[3]{(x^2 - 4)^2}$$

Solución:

$y' = \dfrac{4x}{3\sqrt{x^2 - 4}}$
$y' = 0 \Rightarrow x = 0$
Máximo relativo: $A(0, 2\sqrt[3]{2})$
$y'(x)$ no existe en los valores $x = -2, x = 2$
Mínimo relativo: $B(-2, 0), C(2, 0)$
Creciente ($\nearrow$): $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$
Decreciente ($\searrow$): $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$

38. Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la siguiente función:

$$y = \frac{e^x}{x}$$

Solución:

$y' = \dfrac{e^x(x - 1)}{x^2}$
$y' = 0 \Rightarrow x = 1$
Máximo relativo: no tiene.
Mínimo relativo: $A(1, e)$

Creciente (↗): $(1, +\infty)$
Decreciente (↘): $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$

39. Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la siguiente función:

$$y = L\,(x^2 + 1)$$

Solución:

$y' = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$

$y' = 0 \Rightarrow x = 0$

Máximo relativo: no tiene.

Mínimo relativo: $O(0, 0)$

Creciente (↗): $(0, +\infty)$

Decreciente (↘): $(-\infty, 0)$

40. Calcula los máximos y los mínimos relativos, y determina la monotonía de la siguiente función en $(0, 2\pi)$:

$$y = \frac{1}{2}x + \cos x$$

Solución:

$y' = 1/2 - \operatorname{sen} x$

$y' = 0 \Rightarrow x = \pi/6, x = 5\pi/6$

Máximo relativo: $A\left(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi + 6\sqrt{3}}{12}\right)$

Mínimo relativo: $B\left(\dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{5\pi - 6\sqrt{3}}{12}\right)$

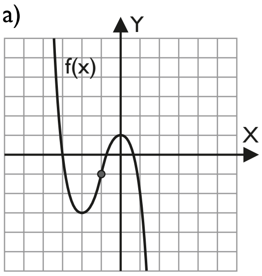
Creciente (↗): $(0, \pi/6) \cup (5\pi/6, 2\pi)$

Decreciente (↘): $(\pi/6, 5\pi/6)$

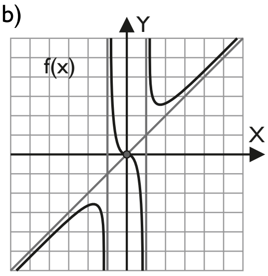
2. Puntos de inflexión y curvatura

41. Identifica en las siguientes gráficas los puntos de inflexión y los intervalos de concavidad y convexidad:

a)



b)



Solución:

a) Punto de inflexión: $A(1, -1)$

Convexa (∪): $(-\infty, -1)$

Cóncava (∩): $(-1, +\infty)$

b) Punto de inflexión: $O(0, 0)$

Convexa (∪): $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$

Cóncava (∩): $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$

42. Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de las siguientes funciones:

a) $y = 3x^5 - 5x^3$ b) $y = \dfrac{1}{4}x^4 - x^3 - 2$

Solución:

a) $y' = 15x^4 - 15x^2$

$y'' = 60x^3 - 30x$

$y'' = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{2}/2, x = 0, x = \sqrt{2}/2$

$y''' = 180x^2 - 30$

$y'''(-\sqrt{2}/2) = 60 \neq 0$

$y'''(0) = -30 \neq 0$

$y'''(\sqrt{2}/2) = 60 \neq 0$

Punto de inflexión:

$A(-\sqrt{2}/2, 7\sqrt{2}/8), O(0, 0), B(\sqrt{2}/2, -7\sqrt{2}/8)$

Convexa (∪): $(-\sqrt{2}/2, 0) \cup (\sqrt{2}/2, +\infty)$

Cóncava (∩): $(-\infty, -\sqrt{2}/2) \cup (0, \sqrt{2}/2)$

b) $y' = x^3 - 3x^2$

$y'' = 3x^2 - 6x$

$y'' = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$

$y''' = 6x - 6$

$y'''(0) = -6 \neq 0$

$y'''(2) = 6 \neq 0$

Punto de inflexión: $A(0, -2), B(2, -6)$

Convexa (∪): $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

Cóncava (∩): $(0, 2)$

43. Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de las siguientes funciones:

a) $y = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$ b) $y = \dfrac{x^2 - 2}{x^2 - 1}$

Solución:

a) $y' = \dfrac{2x}{(x^2 + 1)^2}$

$y'' = -\dfrac{2(3x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^3}$

$y'' = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{3}/3, x = \sqrt{3}/3$

$y''' = \dfrac{24x(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^4}$

$y'''(-\sqrt{3}/3) = 27\sqrt{3}/16 \neq 0$

$y'''(\sqrt{3}/3) = -27\sqrt{3}/16 \neq 0$

Punto de inflexión:

$A(-\sqrt{3}/3, 1/4), B(\sqrt{3}/3, 1/4)$

Convexa (∪): $(-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)$

Cóncava (∩): $(-\infty, -\sqrt{3}/3) \cup (\sqrt{3}/3, +\infty)$

b) $y' = \frac{2x}{(x^2-1)^2}$

$y'' = -\frac{2(3x^2+1)}{(x^2-1)^3}$

$y'' \neq 0$

Puntos de inflexión: no tiene.

Convexa (∪): $(-1, 1)$

Cóncava (∩): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

44. Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la siguiente función:

$$y = \sqrt{4-x^2}$$

Solución:

$y' = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

$y'' = -\frac{4}{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}}$

$y'' \neq 0$

Puntos de inflexión: no tiene.

Convexa (∪): $\varnothing$

Cóncava (∩): $(-2, 2)$

45. Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la siguiente función:

$$y = e^{-x^2}$$

Solución:

$y' = -2x\, e^{-x^2}$

$y'' = (4x^2-2)e^{-x^2}$

$y'' = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{2}/2, x = \sqrt{2}/2$

$y''' = 4x(3-2x^2)e^{-x^2}$

$y'''(-\sqrt{2}/2) = 4\sqrt{2}/\sqrt{e} \neq 0$

$y'''(\sqrt{2}/2) = -4\sqrt{2}/\sqrt{e} \neq 0$

Punto de inflexión: $A(-\sqrt{2}/2, 1/\sqrt{e}), B(\sqrt{2}/2, 1/\sqrt{e})$

Convexa (∪): $(-\infty, -\sqrt{2}/2) \cup (\sqrt{2}/2, +\infty)$

Cóncava (∩): $(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$

46. Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la siguiente función:

$$y = \frac{x}{L\,x}$$

Solución:

$y' = \frac{-1 + L\,x}{L^2\,x}$

$y'' = \frac{2 - L\,x}{x\,L^3\,x}$

$y'' = 0 \Rightarrow x = e^2$

$y''' = \frac{-6 + L^2\,x}{x^2\,L^4\,x}$

$y'''(e^2) = -\frac{1}{8e^4} \neq 0$

Puntos de inflexión: $A(e^2, e^2/2)$

Convexa (∪): $(1, e^2)$

Cóncava (∩): $(0, 1) \cup (e^2, +\infty)$

47. Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la siguiente función en $[0, 2\pi]$:

$$y = x + 2\cos x$$

Solución:

$y' = 1 - 2\,\text{sen}\,x$

$y'' = -2\cos x$

$y'' = 0 \Rightarrow x = \pi/2, x = 3\pi/2$

$y''' = 2\,\text{sen}\,x$

$y'''(\pi/2) = 2 \neq 0$

$y'''(3\pi/2) = -2 \neq 0$

Punto de inflexión: $A(\pi/2, \pi/2), B(3\pi/2, 3\pi/2)$

Convexa (∪): $(\pi/2, 3\pi/2)$

Cóncava (∩): $(0, \pi/2) \cup (3\pi/2, 2\pi)$

3. Teorema de Rolle y del Valor Medio

48. Sea la función $f(x) = \text{tg}\,x$, definida en el intervalo $[0, \pi]$. Deduce, de forma razonada, si son ciertas estas afirmaciones:

a) $f(0) = f(\pi) = 0$

b) La función $f(x)$ es continua en $[0, \pi]$ y derivable en $(0, \pi)$

c) Por lo tanto, por el teorema de Rolle, existe un $c \in (0, \pi)$ tal que $f'(c) = 0$

Solución:

a) Cierto: $f(0) = f(\pi) = 0$

b) Falso: $f(x) = \text{tg}\,x$ es discontinua en $x = \pi/2$ y no es derivable en $x = \pi/2$

c) No se puede aplicar el teorema de Rolle.

49. Dada la función siguiente: $f(x) = 5 - \frac{4}{x}$

halla todos los valores $c \in (1, 4)$ tales que:

$$f'(c) = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1}$$

Solución:

El dominio de $f(x)$ es $\mathbb{R} - \{0\}$ y $[1, 4] \subset \mathbb{R} - \{0\}$

- $f(x)$ es continua en $[1, 4]$ porque las funciones racionales son continuas en su dominio.
- $f(x)$ es derivable $(1, 4)$ porque las funciones racionales son derivables en su dominio.

Se puede aplicar el teorema del valor medio.

$$\frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{4 - 1}{3} = 1$$

$$f'(x) = \frac{4}{x^2} \Rightarrow \frac{4}{x^2} = 1 \Rightarrow x = -2, x = 2$$

En el intervalo dado solo es válido $x = 2$

50. Dada la función siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } -2 \le x < -1 \\ \dfrac{x^2 - 3}{2} & \text{si } -1 \le x \le 0 \end{cases}$$

comprueba que la función cumple las hipótesis del teorema del Valor Medio y calcula el valor intermedio vaticinado por el teorema. Si hay varios valores, calcula todos ellos.

Solución:

El dominio de $f(x)$ es $[-2, 0]$

La función está definida por dos funciones continuas y derivables en sus dominios. Hay que estudiar el punto de enlace.

En $x = -1$

$$f(-1) = -1 \text{ y } \lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^+} f(x) = -1 \Rightarrow$$

f es continua en $x = -1$

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x^2} & \text{si } -2 < x < -1 \\ x & \text{si } -1 < x < 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to -1^-} \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = -1 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} x = -1 \end{cases}$$

f es derivable en $x = -1$

Luego:

- $f(x)$ es continua en $[-2, 0]$ y es derivable en $(2, 0)$

Se puede aplicar el teorema del valor medio.

$$\frac{f(0) - f(-2)}{0 - (-2)} = \frac{-3/2 + 1/2}{2} = -1$$

$$f'(x) = -1 \Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{x^2} = -1 & \text{si } -2 < x < -1 \\ x = -1 & \text{si } -1 < x < 0 \end{cases}$$

$x = -1, x = 1$

51. Comprueba si se puede aplicar el teorema del valor medio a la función siguiente:

$$f(x) = x^3 - x^2 - 2x$$

en el intervalo $[-1, 1]$. En caso afirmativo, encuentra el valor $c \in (-1, 1)$ en el que $f'(c)$ coincide con la pendiente de la recta secante a la gráfica de $f(x)$ que pasa por $(-1, f(-1))$ y $(1, f(1))$

Solución:

$f(x)$ es continua en $[-1, 1]$ y derivable en $(-1, 1)$ por ser una función polinómica.

$$\frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \frac{-2 - 0}{2} = -1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 2$$

$$3x^2 - 2x - 2 = -1 \Rightarrow x = -1/3, x = 1$$

Es válido el valor $x = -1/3 \in (-1, 1)$

4. Regla de L'Hôpital

Calcula los siguientes límites:

52. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{(e^x - 1)^2}$

Solución:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{(e^x - 1)^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{2(e^x - 1)e^x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{4e^{2x} - 2e^x} = -\frac{1}{2}$$

53. $\lim\limits_{x \to 0} x^{\frac{3}{4 + L\,x}}$

Solución:

$$\lim_{x \to 0} x^{\frac{3}{4 + L\,x}} = [0^0] = e^{\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{3}{4 + L\,x} L\,x\right)} = e^{\lim\limits_{x \to 0} \frac{3\,L\,x}{4 + L\,x}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x \to 0} \frac{3/x}{1/x}} = e^3$$

54. $\lim\limits_{x \to 0} (1 - \cos x) \cot g\, x$

Solución:

$$\lim_{x \to 0} (1 - \cos x) \cot g\, x = [0 \cdot \infty] = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\text{tg } x} =$$

$$= \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{\sec^2 x} = 0$$

55. $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{3/x}$

Solución:

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{3/x} = [1^\infty] = e^{\lim\limits_{x \to 0} \frac{3\,L(1 + x)}{x}} = e^{\lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{3}{1 + x}}{1}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x \to 0} \frac{3}{1 + x}} = e^3$$

56. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(2 - x)e^x - (2 + x)}{x^2}$

Solución:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(2-x)e^x-(2+x)}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-e^x+(2-x)e^x-1}{2x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-e^x-e^x+(2-x)e^x}{2}=0$$

57. $\lim\limits_{x\to 1} L\,x\,L\,(x-1)$

Solución:

$$\lim_{x\to 1} L\,x\,L\,(x-1)=[0\cdot(-\infty)]=\lim_{x\to 1}\frac{L(x-1)}{\dfrac{1}{L\,x}}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{1}{x-1}}{\dfrac{-1}{x\,L^2\,x}}=\lim_{x\to 1}\frac{x\,L^2\,x}{-x+1}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 1}(-L^2\,x-2\,L\,x)=0$$

58. $\lim\limits_{x\to \pi/2}(\text{sen }x)^{\text{tg }x}$

Solución:

$$\lim_{x\to \pi/2}(\text{sen }x)^{\text{tg }x}=[1^{\infty}]=e^{\lim\limits_{x\to\pi/2}\text{tg }x\,L\text{ sen }x}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\pi/2}\frac{L\text{ sen }x}{1/\text{tg }x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}(-\cos x\text{ sen }x)}=1$$

59. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{L\,(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$

Solución:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{L(1+x)}-\frac{1}{x}\right)=[\infty-\infty]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x-L(1+x)}{x\,L(1+x)}\right)=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{(x+1)\,L(1+x)+x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{L(1+x)+2}=\frac{1}{2}$$

60. $\lim\limits_{x\to +\infty}(e^x+x^3)^{\frac{1}{x}}$

Solución:

$$\lim_{x\to+\infty}(e^x+x^3)^{\frac{1}{x}}=[\infty^0]=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}L(e^x+x^3)}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{L(e^x+x^3)}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x+3x^2}{e^x+x^3}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x+6x}{e^x+3x^2}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x+6}{e^x+6x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+6}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x}}=e$$

5. Problemas de optimización

61. Expresa el número 60 como suma de tres enteros positivos, de forma que el segundo sea el doble del primero y su producto sea máximo. Determina el valor de dicho producto.

Solución:

a) Incógnitas y datos.

x = primer número

y = segundo número

z = tercer número

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=60\\ y&=2x\end{aligned}\right\}\Rightarrow z=60-3x$$

b) Función que hay que maximizar.

$f(x, y, z) = xyz$

Sujeto a:

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=60\\ y&=2x\end{aligned}\right\}$$

c) Se escribe la función con una sola variable.

$f(x) = x\cdot 2x\cdot(60-3x)$

$f(x) = 120x^2 - 6x^3$

d) Se calculan los máximos y mínimos relativos.

$f'(x) = 240x - 18x^2$

$240x - 18x^2 = 0 \Rightarrow x = 0, x = 40/3$

Si $x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow z = 60$

Si $x = 40/3 \Rightarrow y = 80/3 \Rightarrow z = 20$

e) Se comprueba en la segunda derivada.

$f''(x) = 240 - 36x$

$f''(0) = 240 > 0\ (+) \Rightarrow$ mínimo relativo.

$f''(40/3) = -240 < 0\ (-) \Rightarrow$ máximo relativo.

f) El máximo se alcanza en $x = 40/3$, pero el enunciado del problemas pide que los números sean enteros positivos. Como $40/3 \in [13, 14]$, se debe buscar la solución en los extremos del intervalo cerrado:

$f(x) = 120x^2 - 6x^3$

$f(13) = 120\cdot 13^2 - 6\cdot 13^3 = 7\,098$

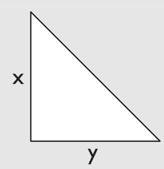
$f(14) = 120\cdot 14^2 - 6\cdot 14^3 = 7\,056$

La solución entonces es $x = 13, y = 26, z = 21$

62. Calcula el área máxima que puede tener un triángulo rectángulo tal que la suma de las longitudes de sus catetos valga 4 cm

Solución:

a) Incógnitas, datos y dibujo.



x = longitud de un cateto.

y = longitud de otro cateto.

$x + y = 4$

b) Función que hay que maximizar.

$f(x, y) = \frac{xy}{2}$

Sujeto a:

$x + y = 4 \Rightarrow y = 4 - x$

c) Se escribe la función con una sola variable.

$f(x) = \frac{x(4-x)}{2} = 2x - \frac{x^2}{2}$

d) Se calculan los máximos y mínimos relativos.

$f'(x) = 2 - x$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 2$

Si $x = 2 \Rightarrow y = 2$

e) Se comprueba en la segunda derivada.

$f''(x) = -1$

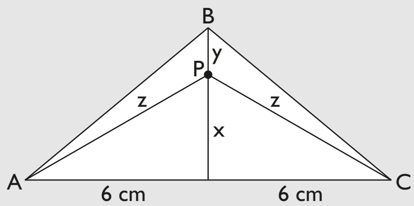
$f''(2) = -1 < 0\ (-) \Rightarrow$ máximo relativo.

f) El máximo se alcanza en x = 2, y = 2, que es un triángulo rectángulo isósceles cuya área es 2 cm^2

63. Un triángulo isósceles tiene el lado desigual de 12 cm, y la altura relativa a este lado, de 5 cm. Encuentra un punto sobre la altura, tal que la suma de las distancias a los tres vértices sea mínima.

Solución:

a) Incógnitas, datos y dibujo.



x = distancia de P al lado desigual.

$d(P, B) = y = 5 - x$

$d(P, C) = z = \sqrt{x^2 + 6^2}$

$d(P, A) = z = \sqrt{x^2 + 6^2}$

b) Función que hay que minimizar.

$f(x) = y + 2z$

c) Se escribe la función con una sola variable.

$f(x) = 5 - x + 2\sqrt{x^2 + 6^2}$

d) Se calculan los máximos y mínimos relativos.

$f'(x) = -1 + \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 36}}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 2\sqrt{3}$

e) Se comprueba en la segunda derivada.

$f''(x) = \frac{72}{(x^2 + 36)\sqrt{x^2 + 36}}$

$f''(2\sqrt{3}) = \sqrt{3}/8 > 0\ (+) \Rightarrow$ mínimo relativo.

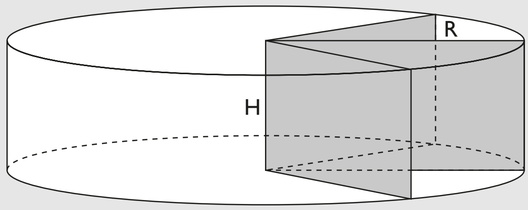
f) El mínimo se alcanza tomando el punto x a una distancia de $2\sqrt{3}$ cm

La suma de las distancias: $6\sqrt{3} + 5$ cm

64. Halla la base **x** y la altura **y** de una cartulina rectangular de 60 cm de perímetro, que, al dar una vuelta completa alrededor de un lado vertical, genera un cilindro de volumen máximo.

Solución:

a) Incógnitas, datos y dibujo.



R = radio del cilindro.

H = altura del cilindro.

R + H = 30 cm

b) Función que hay que maximizar.

$V(R, H) = \pi R^2 H$

Sujeta a las condiciones:

$R + H = 30$

c) Se escribe la ecuación con una sola variable.

$H = 30 - R$

$V(R) = \pi R^2(30 - R)$

$V(R) = 30\pi R^2 - \pi R^3$

d) Se calculan los máximos y mínimos relativos derivando.

$V'(R) = 60\pi R - 3\pi R^2$

$60\pi R - 3\pi R^2 = 0 \Rightarrow R = 0, R = 20$

Si $R = 20 \Rightarrow H = 10$

La solución R = 0 no tiene sentido.

e) Se comprueba en la segunda derivada.

$V''(R) = 60\pi - 6\pi R$

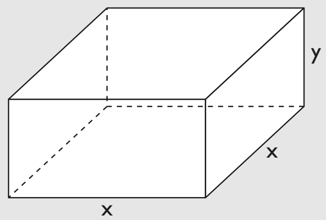
$V''(20) = -60\pi < 0\ (-) \Rightarrow$ máximo relativo.

f) El cilindro mide 20 cm de radio y 10 cm de altura.

65. Una empresa fabrica cajas de latón sin tapa de 500 cm^3 de volumen, para almacenar un líquido colorante. Las cajas tienen la base cuadrada. Halla la altura y el lado de la base de cada caja para que la cantidad de latón empleada en fabricarlas sea la menor posible.

Solución:

a) Incógnitas, datos y dibujo.



x = longitud de la arista de la base.

y = altura de la caja.

Volumen = $x^2y = 500$

b) Función que hay que minimizar.

$A(x, y) = x^2 + 4xy$

Sujeta a las condiciones:

$x^2y = 500$

c) Se escribe la función con una sola variable.

$A(x, y) = x^2 + 4xy$

$y = \dfrac{500}{x^2}$

$A(x) = x^2 + 4x\dfrac{500}{x^2}$

$A(x) = x^2 + \dfrac{2\,000}{x}$

d) Se calculan los máximos y mínimos derivando.

$A'(x) = 2x - \dfrac{2\,000}{x^2}$

$A'(x) = 0 \Rightarrow x = 10$

Si $x = 10 \Rightarrow y = 5$

e) Se comprueba en la segunda derivada.

$A''(x) = \dfrac{4\,000}{x^3} + 2$

$A''(10) = 6 > 0\ (+) \Rightarrow$ mínimo relativo.

f) La caja mide 10 cm de arista de la base y 5 cm de alto. El área es $A = 300\ cm^2$

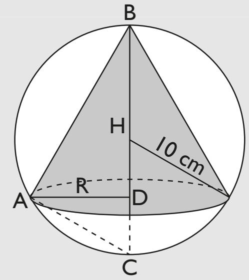
66. Halla la altura del cono de máximo volumen que se pueda inscribir en una esfera de 10 cm de radio.

Solución:

a) Incógnitas, datos y dibujo.

R = radio del cono.

H = altura del cono = BD



El triángulo ABC es rectángulo en A

Por el teorema de la altura:

$R^2 = BD \cdot DC = H(2 \cdot 10 - H) = 20H - H^2$

b) Función que hay que maximizar.

$V(R, H) = \dfrac{1}{3}\pi R^2 H$

Sujeta a las condiciones:

$R^2 = 20H - H^2$

c) Se escribe la ecuación con una sola variable.

$V(H) = \dfrac{1}{3}\pi(20H - H^2)H$

$V(H) = \dfrac{1}{3}\pi(20H^2 - H^3)$

d) Se calculan los máximos y mínimos relativos derivando.

$V'(H) = \dfrac{1}{3}\pi(40H - 3H^2)$

$\dfrac{1}{3}\pi(40H - 3H^2) = 0 \Rightarrow H = 0$ y $H = 40/3$

Si $H = 0$, no tiene sentido en el problema.

Si $H = 40/3$ cm $\Rightarrow R = \dfrac{20\sqrt{2}}{3}$ cm

e) Se comprueba en la segunda derivada.

$V''(H) = \dfrac{1}{3}\pi(40 - 6H)$

$A''(40/3) = -\dfrac{40\pi}{3} < 0\ (-) \Rightarrow$ máximo relativo.

f) El cono tiene una altura de 40/3 cm

6. Problemas de derivadas

67. Sea la función:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x$$

Calcula de forma razonada los puntos de la gráfica en los que la recta tangente forma un ángulo de 45°

Solución:

$f'(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1$

Pendiente de la recta tangente = tg 45° = 1

$f'(x) = 1 \Rightarrow x = -1, x = 0, x = 2$

68. Demuestra que la siguiente ecuación tiene una única raíz real.

$$x^3 + 6x^2 + 15x - 23 = 0$$

Solución:

Se aplica el teorema de Bolzano a la función:

$$f(x) = x^3 + 6x^2 + 15x - 23$$

Como $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, existe al menos un $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(c) = 0$

$f'(x) = 3x^2 + 12x + 15$

$f'(x) > 0$ para todo x, ya que el coeficiente de x^2 es $3 > 0$ y el discriminante $\Delta = 12^2 - 4 \cdot 3 \cdot 15 = -36 < 0$

La función f(x) es estrictamente creciente y solo corta el eje una vez.

69. Utiliza el teorema de Bolzano y el cálculo de derivadas para demostrar que las funciones $f(x) = x^2$; $g(x) = 2^{-x}$, definidas para $x > 0$, se cortan en un solo punto.

Solución:

Se toma la función $h(x) = x^2 - 2^{-x}$

La función cumple las hipótesis del teorema de Bolzano.

Es continua por ser la diferencia de una función polinómica y una exponencial.

$h(0) = -1$ y $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Luego por el teorema de Bolzano existe al menos un $c \in (0, +\infty)$ tal que $h(c) = 0$

Por otra parte:

$h'(x) = 2x + 2^{-x} L\, 2 > 0$ para $x > 0$

Luego h(x) es creciente.

Si $x^2 - 2^{-x} = 0$ para solo un valor $c \in (0, +\infty)$, se cumple que f y g se cortan solo una vez para $x > 0$

70. Para cada valor de **a,** se considera la función:

$$f(x) = \frac{3x^2 - ax}{x + 2}$$

Calcula el valor de **a** para que f(x) tenga un mínimo relativo en $x = 2$

Solución:

$f'(x) = \dfrac{3x^2 + 12x - 2a}{(x + 2)^2}$

Si ha de tener un mínimo en $x = 2$

$f'(2) = 0$

$\dfrac{18 - a}{8} = 0 \Rightarrow a = 18$

$f''(x) = \dfrac{4(a + 6)}{(x + 2)^3}$

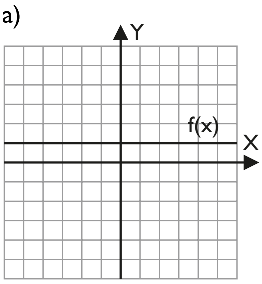
$f''(2) = \dfrac{a + 6}{16} > 0$ para $a = 18$

Efectivamente, es un mínimo.

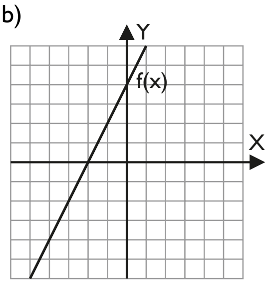
Para ampliar

71. Dada la gráfica de la función f(x), haz en cada caso un dibujo aproximado de la gráfica de la función derivada f'(x):

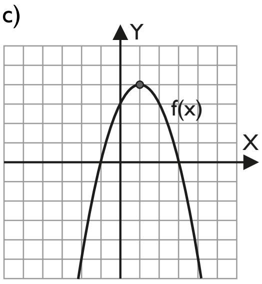
a)



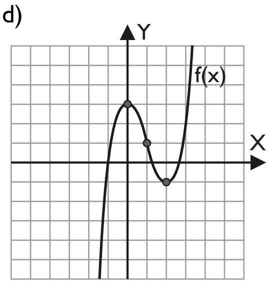
b)



c)

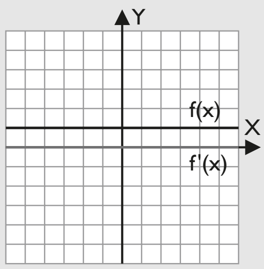


d)

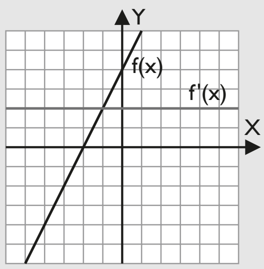


Solución:

a) La derivada de una función constante es cero.

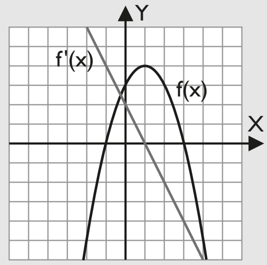


b) La derivada de una función de primer grado es una constante que coincide con la pendiente de la recta.

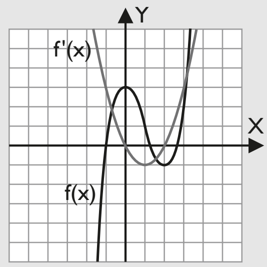


c) La derivada de una parábola es una recta.

La función tiene en x = 1 un máximo. Luego f'(1) = 0. Así, a la izquierda del máximo f es creciente (f' > 0), y a la derecha, f es decreciente (f' < 0)



d) La derivada de una cúbica es una parábola.



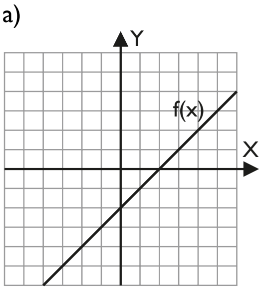
En x = 0 hay un máximo, f'(0) = 0, f' > 0 a la izquierda de x = 0, y f' < 0 a la derecha de x = 0

En x = 2 hay un mínimo, f'(2) = 0, f' < 0 a la izquierda de x = 2, y f' > 0 a la derecha de x = 2

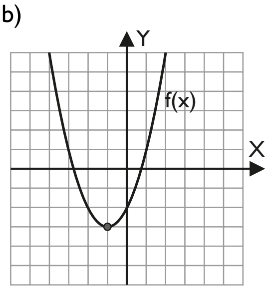
En x = 1 hay un punto de inflexión. La función f' pasa de decreciente a creciente, es decir, f' tiene un mínimo.

72. Dada la gráfica de la función f(x), haz en cada caso un dibujo aproximado de la gráfica de la función derivada f'(x) y de la gráfica de la segunda derivada f''(x):

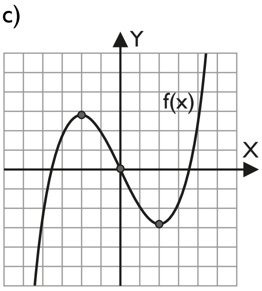
a)



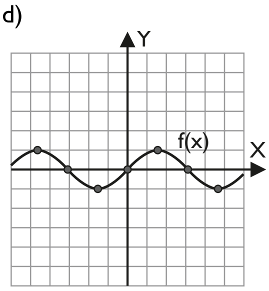
b)



c)



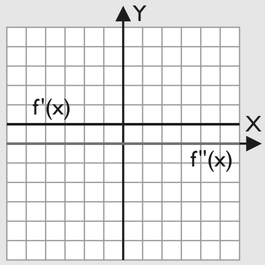
d)



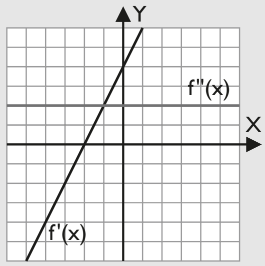
Solución:

a) f': La derivada de una función de primer grado es una constante que coincide con la pendiente de la recta.

f'': La derivada de una constante es cero.



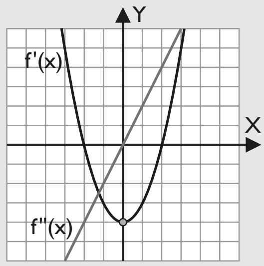
b) La derivada de una parábola es una recta.



f': La función tiene en x = –1 un mínimo. Luego f'(–1) = 0. Entonces, a la izquierda del mínimo, f es decreciente (f' < 0), y a la derecha, f es creciente (f' > 0)

f'': La derivada de una función de primer grado es una constante que coincide con la pendiente de la recta. Como f es cóncava, f'' > 0

c) La derivada de una cúbica es una parábola.



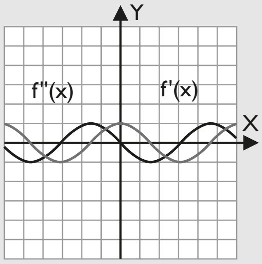
f': En x = –2 hay un máximo, f'(–2) = 0, f' > 0 a la izquierda de x = –2 y f' < 0 a la derecha de x = –2

En x = 2 hay un mínimo, f'(2) = 0, f' < 0 a la izquierda de x = 2 y f' > 0 a la derecha de x = 2

En x = 0 hay un punto de inflexión. La función f' pasa de decreciente a creciente, es decir, f' tiene un mínimo.

f'': En x = 0, f''(0) = 0, y a la derecha de cero la función es cóncava (f'' > 0) y a la izquierda de cero la función es convexa (f'' < 0)

d) La derivada del seno es el coseno.



f: En los puntos de máximo relativo, $f' = 0$, y a la izquierda del valor $f' > 0$, y a la derecha del valor $f' < 0$

f'': En los puntos de inflexión, $f'' = 0$, y en los intervalos de concavidad $f'' > 0$, y en los intervalos de convexidad $f'' < 0$

73. Se considera la curva de ecuación $y = x^3 - 6x$

Halla, si existen, las coordenadas de sus máximos y mínimos relativos.

Solución:

$y' = 3x^2 - 6$

$y'' = 6x$

$y' = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{2}, x = \sqrt{2}$

Máximo relativo: $A(-\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$

Mínimo relativo: $B(\sqrt{2}, -4\sqrt{2})$

74. Dada la función $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$

a) determina sus máximos y sus mínimos relativos.

b) calcula sus puntos de inflexión.

Solución:

$f'(x) = x^2 + x - 2$

a) $f'(x) = 0 \Rightarrow x = -2, x = 1$

Máximo relativo: $A(-2, 13/3)$

Mínimo relativo: $B(1, -1/6)$

b) $f''(x) = 2x + 1$

$f''(x) = 0 \Rightarrow x = -1/2$

$f'''(x) = 2$

Punto de inflexión: $C(-1/2, 25/12)$

75. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función siguiente:

$$f(x) = 2x + \frac{1}{2x}$$

Solución:

$f'(x) = 2 - \frac{1}{2x^2}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1/2, x = 1/2$

Creciente (↗): $(-\infty, -1/2) \cup (1/2, +\infty)$

Decreciente (↘): $(-1/2, 0) \cup (0, 1/2)$

76. Dada la curva siguiente:

$$y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

calcula los máximos y mínimos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

Solución:

$f'(x) = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

Máximo relativo: no tiene.

Mínimo relativo: $A(0, -1)$

Creciente (↗): $(0, +\infty)$

Decreciente (↘): $(-\infty, 0)$

77. Dada la función siguiente:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

determina sus máximos y mínimos relativos.

Solución:

$f'(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1, x = 1$

Máximo relativo: $A(1, 1/2)$

Mínimo relativo: $B(-1, -1/2)$

78. Sea la función $f(x) = 2x^2 - \frac{1}{3}x^3$

Calcula:

a) las coordenadas de sus máximos y mínimos relativos.

b) los intervalos donde es creciente y decreciente.

Solución:

$f'(x) = 4x - x^2$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 4$

Máximo relativo: $A(4, 32/3)$

Mínimo relativo: $O(0, 0)$

Creciente (↗): $(0, 4)$

Decreciente (↘): $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$

79. Dada $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 4}$, escribe la ecuación de la secante a **f** que une los puntos $(-2, f(-2))$ y $(2, f(2))$. ¿Existe un punto **c** en el intervalo $[-2, 2]$ que verifica que la tangente a la gráfica de f en $(c, f(c))$ es paralela a la secante que se ha hallado? En caso afirmativo razona la respuesta y calcula **c;** en caso negativo, razona por qué no existe.

Solución:

Secante:

$A(2, -1), B(-2, -5/3)$

Pendiente = $\dfrac{f(2) - f(-2)}{2 - (-2)} = \dfrac{-1 + 5/3}{2 + 2} = \dfrac{1}{6}$

$y + 1 = \dfrac{1}{6}(x - 2) \Rightarrow y = \dfrac{x - 8}{6}$

f(x) es continua en $[-2, 2]$, puesto que lo es en su dominio.

$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{4\} = (-\infty, 4) \cup (4, +\infty)$

f(x) es derivable en $(-2, 2)$

Por el teorema del valor medio, existe un $c \in (-2, 2)$ tal que

$f'(c) = \dfrac{f(2) - f(-2)}{2 - (-2)} = \dfrac{1}{6}$

$f'(x) = \dfrac{x^2 - 8x + 6}{(x - 4)^2}$

$f'(x) = \dfrac{1}{6} \Rightarrow x = 4 + 2\sqrt{3}, x = 4 - 2\sqrt{3}$

Como el valor $4 + 2\sqrt{3}$ no pertenece al intervalo $(-2, 2)$, el único valor que sirve es $x = 4 - 2\sqrt{3}$

80. Calcula un punto del intervalo [1, 3] en el que la recta tangente a la curva $y = x^2 - x + 2$ es paralela a la cuerda que une los puntos A(1, 2) y B(3, 8)

Solución:

Se puede aplicar el teorema del valor medio porque f(x) es continua en [1, 3] y derivable en (1, 3), ya que es una función polinómica.

Recta secante que pasa por A(1, 2), B(3, 8)

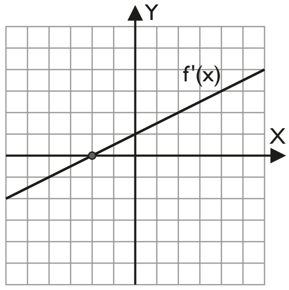
Pendiente: $\dfrac{8 - 2}{3 - 1} = 3$

$y - 2 = 3(x - 1) \Rightarrow y = 3x - 1$

$f'(x) = 2x - 1$

$f'(x) = 3 \Rightarrow x = 2$

81. La gráfica siguiente corresponde a la función f'(x), primera derivada de una cierta función f(x)



a) Estudia el crecimiento y decrecimiento de la función f(x) interpretando la gráfica de f'(x)

b) Estudia la concavidad, convexidad y puntos de inflexión de la función f(x) utilizando solo la gráfica de f'(x)

Solución:

a) La función derivada se hace cero en $x = -2$

A la izquierda de $x = -2$, $f'(x) < 0$; luego f(x) es decreciente en $(-\infty, -2)$

A la derecha de $x = -2$, $f'(x) > 0$; luego f(x) es creciente en $(-2, +\infty)$

En $x = -2$ la función f(x) tiene un mínimo.

b) f'(x) es creciente en $\mathbb{R}$. Por lo tanto, la función f(x) es convexa en $\mathbb{R}$; luego no tiene puntos de inflexión.

Calcula los siguientes límites:

82. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \cos x - \operatorname{sen} x}{x^3}$

Solución:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \cos x - \operatorname{sen} x}{x^3} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{-x \operatorname{sen} x}{3x^2} =$$

$$= \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{-\operatorname{sen} x - x \cos x}{6x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-\cos x - \cos x + x \operatorname{sen} x}{6} = -\frac{1}{3}$$

83. $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{x}{L\,x} - \dfrac{1}{\operatorname{sen}(x - 1)}\right)$

Solución:

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{x}{L\,x} - \frac{1}{\operatorname{sen}(x - 1)}\right) = [\infty - \infty] = \lim_{x \to 1} \left(\frac{x \operatorname{sen}(x - 1) - L\,x}{L\,x \operatorname{sen}(x - 1)}\right) = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x \to 1} \left(\frac{\operatorname{sen}(x - 1) + x \cos(x - 1) - \dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x} \operatorname{sen}(x - 1) + L\,x \cos(x - 1)}\right) = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x \to 1} \left(\frac{\cos(x - 1) + \cos(x - 1) - x \operatorname{sen}(x - 1) - \dfrac{1}{x^2}}{-\dfrac{1}{x^2} \operatorname{sen}(x - 1) + \dfrac{1}{x} \cos(x - 1) + \dfrac{1}{x} \cos(x - 1) - L\,x \operatorname{sen}(x - 1)}\right) = \frac{1}{2}$$

84. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{(L\,x)^3 + 2x}$

Solución:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{(L\,x)^3 + 2x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\dfrac{3(L\,x)^2}{x} + 2} = \frac{1}{2}$$

$$\left(\text{Obsérvese que } \lim_{x \to +\infty} \frac{3(L\,x)^2}{x} = 0\right)$$

85. $\lim\limits_{x \to 0} \text{arc sen } x \text{ cotg } x$

Solución:

$$\lim_{x \to 0} \text{arc sen } x \text{ cotg } x = [0 \cdot \infty] = \lim_{x \to 0} \frac{\text{arc sen } x}{\text{tg } x} =$$

$$= \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}{\sec^2 x} = 1$$

86. $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x)^{\frac{1}{\text{sen}^2 x}}$

Solución:

$$\lim_{x \to 0} (\cos x)^{\frac{1}{\text{sen}^2 x}} = [1^\infty] = e^{\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{\text{sen}^2 x} L \cos x} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x \to 0} \frac{L \cos x}{\text{sen}^2 x}} = e^{\lim\limits_{x \to 0} \frac{-\text{tg } x}{\text{sen } 2x}} = e^{\lim\limits_{x \to 0} \frac{-\sec^2 x}{2 \cos 2x}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

87. $\lim\limits_{x \to 0^+} (\text{cotg } x)^{\frac{1}{L\,x}}$

Solución:

$$\lim_{x \to 0^+} (\text{cotg } x)^{\frac{1}{L\,x}} = [\infty^0] = e^{\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{L \text{ cotg } x}{L\,x}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{-x \text{ cosec}^2 x}{\text{cotg } x}} = e^{\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{-x}{\text{sen } x \cos x}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{-1}{\cos^2 x - \text{sen}^2 x}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

88. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{tg } x - \text{sen } x}{x - \text{sen } x}$

Solución:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{tg } x - \text{sen } x}{x - \text{sen } x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{\sec^2 x - \cos x}{1 - \cos x} =$$

$$= \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{2 \sec^2 x \text{ tg } x + \text{sen } x}{\text{sen } x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{2}{\cos^3 x} + 1\right) = 3$$

89. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x}\right)^{\text{tg } x}$

Solución:

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\text{tg } x} = [\infty^0] = e^{\lim\limits_{x \to 0^+} \text{tg } x \, L(1/x)} = e^{\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{-L\,x}{\text{cotg } x}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{-1/x}{-\text{cosec}^2}} = e^{\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\text{sen}^2 x}{x}} = e^{\lim\limits_{x \to 0^+} 2 \text{ sen } x \cos x} = e^0 = 1$$

90. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\text{sen } x}\right)$

Solución:

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\text{sen } x}\right) = [\infty - \infty] = \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x - x}{x \text{ sen } x} =$$

$$= \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{\text{sen } x + x \cos x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-\text{sen } x}{\cos x + \cos x - x \text{ sen } x} = 0$$

91. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2x + 3}{2x - 1}\right)^x$

Solución:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x + 3}{2x - 1}\right)^x = [1^\infty] = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} x \, L \frac{2x + 3}{2x - 1}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{L \frac{2x + 3}{2x - 1}}{\frac{1}{x}}} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-8x^2}{-4x^2 - 4x + 3}} = e^2$$

92. $\lim\limits_{x \to 1^+} (L\,x)^{x - 1}$

Solución:

$$\lim_{x \to 1^+} (L\,x)^{x - 1} = [0^0] = e^{\lim\limits_{x \to 1^+} (x - 1) L (L\,x)} = e^{\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{L(L\,x)}{\frac{1}{x - 1}}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{-(x - 1)^2}{x\,L\,x}} = e^{\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{-2(x - 1)}{L\,x + 1}} = e^0 = 1$$

93. Calcula $\lim\limits_{x \to 0} \left(\sqrt{\dfrac{1}{x} + 1} - \sqrt{\dfrac{1}{x} - 1}\right)$

Solución:

$$\lim_{x \to 0} \left(\sqrt{\frac{1}{x} + 1} - \sqrt{\frac{1}{x} - 1}\right) = [\infty - \infty] =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{\sqrt{x}} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{1}{2\sqrt{1 + x}} + \dfrac{1}{2\sqrt{1 - x}}}{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}} = \begin{cases} 0 & \text{si } x \to 0^+ \\ \text{No existe si } x \to 0^- \end{cases}$$

El límite no existe cuando $x \to 0$

94. Calcula dos números positivos tales que su producto es 192 y la suma de tres veces el primero más el segundo es mínima.

Solución:

a) Incógnitas y datos.

x = primer número.

y = segundo número.

$xy = 192$

b) Función que hay que minimizar.

$f(x, y) = 3x + y$

Sujeto a: $xy = 192 \Rightarrow y = \dfrac{192}{x}$

c) Se escribe la función con una sola variable.

$f(x) = 3x + \dfrac{192}{x}$

d) Se calculan los máximos y mínimos relativos derivando.

$f'(x) = 3 - \dfrac{192}{x^2}$

$3 - \dfrac{192}{x^2} = 0 \Rightarrow x = -8, x = 8$

Si $x = 8 \Rightarrow y = 24$

El valor $x = -8$ no es válido, ya que piden números positivos.

e) Se comprueba en la segunda derivada.

$f''(x) = \dfrac{384}{x^3}$

$f''(8) = 3/4 > 0\ (+) \Rightarrow$ mínimo relativo.

f) El primer número es $x = 8$; el segundo, $y = 24$, y la suma pedida, $f(x) = 48$

95. Halla la ecuación de la recta tangente en el punto de inflexión de la función siguiente:

$$f(x) = \frac{L\,x}{x}$$

Solución:

$f'(x) = \dfrac{1 - L\,x}{x^2}$

$f''(x) = \dfrac{2\,L\,x - 3}{x^3}$

$f''(x) = 0 \Rightarrow x = e^{3/2}$

Si $x = e^{3/2} \Rightarrow y = \dfrac{3}{2e^{3/2}}$

$f'''(x) = \dfrac{11 - 6\,L\,x}{x^4} \Rightarrow f'''(e^{3/2}) = \dfrac{2}{e^6} \neq 0$

Recta tangente:

$y - \dfrac{3}{2e^{3/2}} = f'(e^{3/2})\,(x - e^{3/2})$

$y - \dfrac{3}{2e^{3/2}} = -\dfrac{1}{2e^3}\,(x - e^{3/2})$

96. Sea P(x) un polinomio de grado cuatro tal que verifica las tres condiciones siguientes:

- P(x) es una función par.
- Dos de sus raíces son $x = 1, x = -\sqrt{5}$
- $P(0) = 5$

Halla sus puntos de inflexión.

Solución:

a) Si es función par:

$P(x) = ax^4 + bx^2 + c$

b) Si $x = 1$ es raíz y $x = -\sqrt{5}$ es raíz:

$P(1) = 0 \Rightarrow a + b + c = 0$

$P(-\sqrt{5}) = 0 \Rightarrow 25a + 5b + c = 0$

c) Si $P(0) = 5$:

$c = 5$

Se resuelve el sistema:

$$\left.\begin{aligned} a + b + c &= 0 \\ 25a + 5b + c &= 0 \\ c &= 5 \end{aligned}\right\}$$

$a = 1, b = -6, c = 5$

La función es:

$P(x) = x^4 - 6x^2 + 5$

Sus puntos de inflexión serán:

$P'(x) = 4x^3 - 12x$

$P''(x) = 12x^2 - 12$

$P''(x) = 0 \Rightarrow x = -1, x = 1$

$P'''(x) = 24x$

$P'''(-1) = -24 \neq 0$

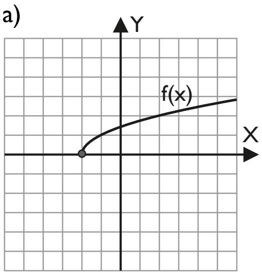
$P'''(1) = 24 \neq 0$

Puntos de inflexión: $A(-1, 0), B(1, 0)$

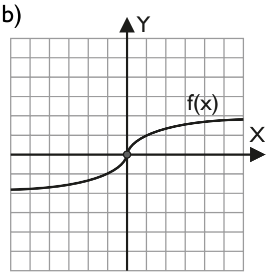
Problemas

97. Dada la gráfica de la función f(x), haz, en cada caso, un dibujo aproximado de la gráfica de la función derivada f'(x):

a)

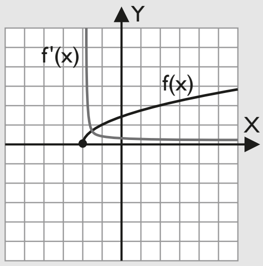


b)



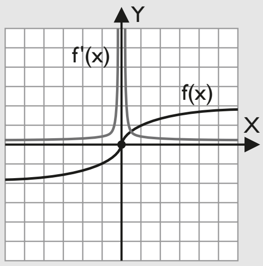
Solución:

a)



Como f(x) es creciente, f'(x) > 0. Como f(x) es cóncava, f'(x) es decreciente, y cuando x tiende a –2 por la derecha, f'(x) debe tender a infinito, es decir, la recta tangente debe ser una recta vertical.

b)



Como f(x) es creciente, f'(x) > 0. En $(-\infty, 0)$ la función es convexa, por lo que f'(x) debe ser creciente, y en $(0, +\infty)$ la función f(x) es cóncava, luego f'(x) es decreciente. En x = 0 la tangente a la gráfica sería vertical y las derivadas laterales tenderían a infinito.

98. Sea la función $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ con $x \neq 0$

a) Halla las coordenadas de sus máximos y mínimos relativos. Estudia la monotonía.

b) Determina los intervalos de concavidad y convexidad.

Solución:

a) $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1, x = 1$

Máximo relativo: $A(-1, -2)$

Mínimo relativo: $B(1, 2)$

Creciente (↗): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

Decreciente (↘): $(-1, 0) \cup (0, 1)$

b) $f''(x) = \dfrac{2}{x^3}$

$f''(x) \neq 0$ para todo x

Punto de inflexión: no tiene.

Convexa (∪): $(0, +\infty)$

Cóncava (∩): $(-\infty, 0)$

99. Dada la función $f(x) = e^{\frac{2x}{x^2+1}}$, determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los extremos relativos de la función.

Solución:

$f'(x) = \dfrac{2(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2} e^{\frac{2x}{x^2+1}}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1, x = 1$

Máximo relativo: $A(1, e)$

Mínimo relativo: $B(-1, 1/e)$

Creciente (↗): $(-1, 1)$

Decreciente (↘): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

100. Dada la función

$$f(x) = \frac{9x - 3}{x^2 - 2x} \text{ para } x \neq 0 \text{ y } x \neq 2,$$

determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

Solución:

$f'(x) = -\dfrac{3(3x^2 - 2x + 2)}{x^2(x - 2)^2}$

$f'(x) \neq 0$ para todo x

Máximo relativo: no tiene.

Mínimo relativo: no tiene.

Creciente (↗): ∅

Decreciente (↘): $(-\infty, 0) \cup (0, 2) \cup (2, +\infty)$

101. Sea $f(x) = L\,\dfrac{x^2 - 2}{2x - 1}$

Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de **f**

Solución:

Dom f = $(-\sqrt{2}, 1/2) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$

$$f'(x) = \frac{2(x^2 - x + 2)}{(x^2 - 2)(2x - 1)}$$

$f'(x) \neq 0$ para todo x

Máximo relativo: no tiene.

Mínimo relativo: no tiene.

Creciente (↗): $(-\sqrt{2}, 1/2) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$

Decreciente (↘): $\varnothing$

102. Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^3}$, calcula:

a) los máximos y los mínimos relativos.

b) los puntos de inflexión.

Solución:

a) $f'(x) = \dfrac{3 - x^2}{x^4}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{3}, x = \sqrt{3}$

Máximo relativo: $A(\sqrt{3}, 2\sqrt{3}/9)$

Mínimo relativo: $B(-\sqrt{3}, -2\sqrt{3}/9)$

b) $f''(x) = \dfrac{2(x^2 - 6)}{x^5}$

$f''(x) = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{6}, x = \sqrt{6}$

$f'''(x) = \dfrac{6(10 - x^2)}{x^6}$

$f'''(-\sqrt{6}) = 1/9 \neq 0$

$f'''(\sqrt{6}) = 1/9 \neq 0$

Puntos de inflexión:

$C(-\sqrt{6}, -5\sqrt{6}/36), D(\sqrt{6}, 5\sqrt{6}/36)$

103. Calcula los máximos y mínimos relativos de:

$$f(x) = -x \, L \, x$$

Solución:

$f'(x) = -1 - L\,x$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1/e$

Máximo relativo: $A(1/e, 1/e)$

Mínimo relativo: no tiene.

104. Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + x - 2}$

halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

Solución:

$f'(x) = \dfrac{x(x - 4)}{(x^2 + x - 2)^2}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 4$

Máximo relativo: $O(0, 0)$

Mínimo relativo: $A(4, 8/9)$

Creciente (↗): $(-\infty, -2) \cup (-2, 0) \cup (4, +\infty)$

Decreciente (↘): $(0, 1) \cup (1, 4)$

105. Sea la función $f(x) = x\,|x - 1|^2$. Halla los extremos y los puntos de inflexión de la función **f**

Solución:

$f(x) = x|x - 1|^2 = x(x - 1)^2 = x^3 - 2x^2 + x$

$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1/3, x = 1$

$f''(x) = 6x - 4$

Máximo relativo: $A(1/3, 4/27)$

Mínimo relativo: $B(1, 0)$

$f''(x) = 0 \Rightarrow x = 2/3$

Punto de inflexión: $C(2/3, 2/27)$

106. Sea $f(x) = e^{-x}(x^2 + 6x + 9)$. Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Solución:

$f'(x) = -(x^2 + 4x + 3)e^{-x}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -3, x = -1$

Máximo relativo: $A(-, 4e)$

Mínimo relativo: $B(-3, 0)$

Creciente (↗): $(-3, 1)$

Decreciente (↘): $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$

107. Estudia el crecimiento de $f(x) = e^x(\cos x + \operatorname{sen} x)$ y determina los máximos y mínimos relativos para $x \in [0, 2\pi]$

Solución:

$f'(x) = 2e^x \cos x$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pi/2, x = 3\pi/2$

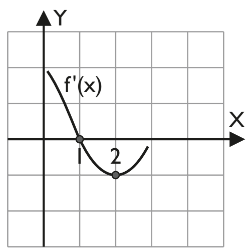
Máximo relativo: $A\left(\dfrac{\pi}{2}, e^{\frac{\pi}{2}}\right)$

Mínimo relativo: $B\left(\dfrac{3\pi}{2}, -e^{\frac{3\pi}{2}}\right)$

Creciente (↗): $(0, \pi/2) \cup (3\pi/2, 2\pi)$

Decreciente (↘): $(\pi/2, 3\pi/2)$

108. La gráfica siguiente corresponde a la derivada f'(x) de una cierta función f(x). Determina a partir de la gráfica si existen máximos relativos, mínimos relativos o puntos de inflexión en los puntos de abscisa x = 1 y x = 2



Solución:

En $x = 1, f'(x) = 0$. A la izquierda de $x = 1, f'(x) > 0$ y la función f(x) es creciente; y a la derecha de $x = 1, f'(x) < 0$ y la función f(x) es decreciente. Luego f(x) en x = 1 tiene un máximo relativo.

En $x = 2, f'(x)$ tiene un mínimo relativo. Luego a la izquierda de x = 2 la función derivada, f'(x), es decreciente y, por lo tanto, la función f(x) es cóncava; y a la derecha de x = 2, f'(x) es creciente, con lo que f(x) es convexa. Por lo tanto, la función f(x) tiene un punto de inflexión en x = 2

109. Dada la función $f(x) = \begin{cases} -x^2 + ax & \text{si } -1 \le x < 3 \\ bx + c & \text{si } 3 \le x \le 5 \end{cases}$

halla **a, b** y **c** para que la función f(x) cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [–1, 5]

Calcula el punto en el que se verifica la tesis.

Solución:

a) f(x) debe ser continua en [–1, 5]

Como la función está definida por dos funciones polinómicas que son continuas, el punto conflictivo está para x = 3

$$\lim_{x \to 3^-} (-x^2 + ax) = -9 + 3a$$

$$\lim_{x \to 3^+} (bx + c) = 3b + c$$

$$-9 + 3a = 3b + c$$

$$3a - 3b - c = 9$$

b) Debe ser derivable en (–1, 5)

Como la función está definida por dos funciones polinómicas que son derivables, el punto conflictivo está para x = 3

$$f'(x) = \begin{cases} -2x + a & \text{si } -1 \le x < 3 \\ b & \text{si } 3 < x < 5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 3^-} (-2x + a) = -6 + a \\ \lim\limits_{x \to 3^+} b = b \end{cases} \Rightarrow$$

$$a - b = 6$$

c) $f(-1) = f(5) \Rightarrow -1 - a = 5b + c$

$$a + 5b + c = -1$$

Resolviendo el sistema de las tres ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} 3a - 3b - c &= 9 \\ a - b \quad &= 6 \\ a + 5b + c &= -1 \end{aligned}\right\}$$

$a = 10/3, b = -8/3, c = 9$

Para calcular el punto se tiene:

$$f'(x) = \begin{cases} -2x + \dfrac{10}{3} & \text{si } -1 < x < 3 \\ -\dfrac{8}{3} & \text{si } 3 < x < 5 \end{cases}$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow -2x + 10/3 = 0 \Rightarrow x = 5/3$

110. En una carretera hay dos radares a una distancia de 10 km. Un coche pasa delante del primero a una velocidad de 60 km/h, y 6 minutos más tarde pasa a 70 km/h por el segundo. Si en ese tramo de carretera el límite de velocidad es de 90 km/h, demuestra que el coche ha sobrepasado ese límite.

Solución:

Sea t = 0 el instante en el que se pasa por el primer radar.

El instante en el que se pasa por el segundo radar es:

$$t = 6/60 = 1/10 \text{ h}$$

Sea e(t) el espacio recorrido por el coche.

La velocidad media del coche entre los dos puntos:

$$v = \frac{e(1/10) - e(0)}{1/10 - 0} = \frac{10 - 0}{1/10 - 0} = 100 \text{ km/h}$$

Si la función e(t) es derivable, el teorema del valor medio permite concluir que ha habido algún instante en el que la velocidad ha sido igual a la media.

111. Calcula el valor de **a** para que:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{4x + 5}{4x + 3}\right)^x = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{4x^2 + 1}{4x^2 + 3}\right)^{ax^2}$$

Solución:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{4x + 5}{4x + 3}\right)^x = [1^\infty] = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} x L \frac{4x + 5}{4x + 3}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{L \frac{4x + 5}{4x + 3}}{\frac{1}{x}}} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{8x^2}{16x^2 + 32x + 15}} = e^{\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{4x^2 + 1}{4x^2 + 3}\right)^{ax^2} = [1^\infty] = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} ax^2 L \frac{4x^2 + 1}{4x^2 + 3}} =$$

$$= e^{a \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{L \frac{4x^2 + 1}{4x^2 + 3}}{\frac{1}{x^2}}} = e^{a \lim\limits_{x \to \infty} \frac{-8x^4}{16x^4 + 16x^2 + 3}} = e^{-a/2}$$

De la igualdad de los dos límites se tiene:

$a = -1$

112. Determina el valor de **a** para el cual:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x + 3}{x}\right)^{ax} = e$$

Solución:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x + 3}{x}\right)^{ax} = [1^\infty] = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} ax L \frac{x + 3}{x}} =$$

$$= e^{a \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{L \frac{x + 3}{x}}{\frac{1}{x}}} = e^{a \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x}{x + 3}} = e^{3a}$$

Si $e^{3a} = e \Rightarrow a = 1/3$

113. Halla el punto de la gráfica de $f(x) = \sqrt{x + 1}$ que esté más cerca del punto $A(3, 0)$

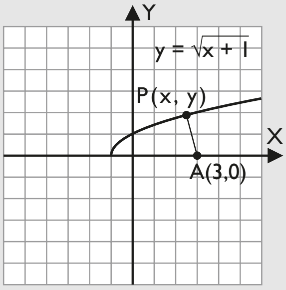
Solución:

a) Incógnitas, datos y dibujo.

Punto incógnita $P(x, y)$

Punto fijo $A(3, 0)$

$y = \sqrt{x + 1}$



b) Función que hay que minimizar.

$d(A, P) = d(x, y) = \sqrt{(x - 3)^2 + y^2}$

Sujeta a las condiciones:

$y = \sqrt{x + 1}$

c) Se escribe la función con una sola variable.

$d(x) = \sqrt{(x - 3)^2 + x + 1}$

$d(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 10}$

d) Se calculan los máximos y mínimos derivando.

$$d'(x) = \frac{2x - 5}{2\sqrt{x^2 - 5x + 10}}$$

$d'(y) = 0 \Rightarrow x = 5/2$

$$\text{Si } x = 5/2 \Rightarrow y = \sqrt{\frac{7}{2}} = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

e) Se comprueba en la segunda derivada.

$$d''(x) = \frac{15}{4(x^2 - 5x + 10)\sqrt{x^2 - 5x + 10}}$$

$$d''(5/2) = \frac{2\sqrt{15}}{15} > 0\ (+) \Rightarrow \text{mínimo relativo.}$$

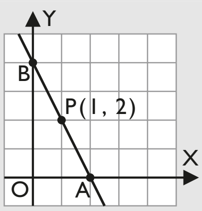
f) El punto es: $P\left(\frac{5}{2}, \frac{\sqrt{14}}{2}\right)$

114. De todas las rectas que pasan por el punto $(1, 2)$, encuentra la que determina con los ejes coordenados y en el primer cuadrante un triángulo de área mínima y el valor de dicha área.

Solución:

a) Incógnitas, datos y dibujo.

Punto fijo $P(1, 2)$



Las rectas que pasan por el punto $P(1, 2)$ son:

$y - 2 = m(x - 1) \Rightarrow y = m(x - 1) + 2$

b) Función que hay que minimizar.

$$\text{Área}(A, B) = \frac{1}{2} OA \cdot OB$$

Sujeta a las condiciones:

$$A \in y = m(x - 1) + 2 \Rightarrow A\left(\frac{m - 2}{m}, 0\right)$$

$B \in y = m(x - 1) + 2 \Rightarrow B(0, -m + 2)$

c) Se escribe la función con una sola variable.

$$d(m) = \frac{1}{2} \cdot \frac{m - 2}{m} \cdot (2 - m) = -\frac{m}{2} - \frac{2}{m} + 2$$

d) Se calculan los máximos y mínimos derivando.

$$d'(m) = -\frac{1}{2} + \frac{2}{m^2}$$

$d'(m) = 0 \Rightarrow m = -2, m = 2$

e) Se comprueba en la segunda derivada.

$$d''(m) = -\frac{4}{m^3}$$

$d''(-2) = 1/2 > 0\ (+) \Rightarrow$ mínimo relativo.

$d''(2) = -1/2 < 0\ (-) \Rightarrow$ máximo relativo.

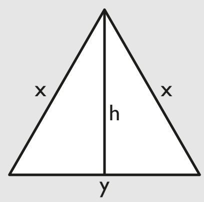
f) La recta que hace el área mínima es:

$y = -2(x - 1) + 2 \Rightarrow y = -2x + 4$

115. Calcula las dimensiones de un triángulo isósceles cuyo perímetro es de 60 cm, de forma que su área sea máxima.

Solución:

a) Incógnitas, datos y dibujo.



Perímetro = 60 cm $\Rightarrow 2x + y = 60 \Rightarrow y = 60 - 2x$

b) Función que hay que maximizar.

$$A(y, h) = \frac{1}{2} yh$$

Sujeta a las condiciones:

$$h = \sqrt{x^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2}$$

$y = 60 - 2x$

c) Se escribe la función con una sola variable.

$$A(x) = \frac{1}{2}(60 - 2x)\sqrt{x^2 - (30 - x)^2}$$

$$A(x) = (30 - x)\sqrt{60x - 900}$$

d) Se calculan los máximos y mínimos derivando.

$$A'(x) = \frac{90(20 - x)}{\sqrt{60x - 900}}$$

$A'(x) = 0 \Rightarrow m = 20$

Si $x = 20,\ y = 20$

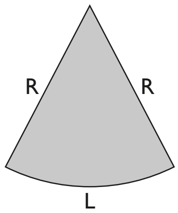
e) Se comprueba en la segunda derivada.

$$A''(x) = \frac{2\,700(10 - x)}{(60x - 900)\sqrt{60x - 900}}$$

$A''(20) = -3\sqrt{3} < 0\ (-) \Rightarrow$ máximo relativo.

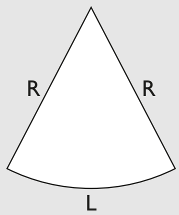
f) El área del triángulo es máxima para $x = y = 20$ cm

116. Calcula el área de un sector circular, cuyo perímetro es de 100 m, para que su área sea máxima.



Solución:

a) Incógnitas, datos y dibujo.



Perímetro = 100 m

L = longitud del arco.

R = longitud del radio.

b) Función que hay que maximizar.

$$A(L, R) = \frac{1}{2} L \cdot R$$

Sujeta a las condiciones:

$L + 2R = 100 \Rightarrow L = 100 - 2R$

c) Se escribe la función con una sola variable.

$$A(R) = \frac{1}{2}(100 - 2R) \cdot R$$

$A(R) = 50R - R^2$

d) Se calculan los máximos y mínimos derivando.

$A'(x) = 50 - 2R$

$A'(x) = 0 \Rightarrow R = 25$

Si $R = 25,\ L = 50$

e) Se comprueba en la segunda derivada.

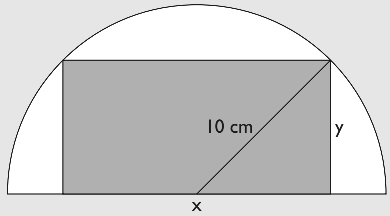
$A''(R) = -2 < 0\ (-) \Rightarrow$ máximo relativo.

f) El área del sector es máxima para $R = 25$ m, $L = 50$ m

117. Calcula las dimensiones de un rectángulo inscrito en un semicírculo de 10 cm de radio para que su área sea máxima.

Solución:

a) Incógnitas, datos y dibujo.



Radio = 10

$$y^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 100 \Rightarrow y = \sqrt{100 - \frac{x^2}{4}}$$

b) Función que hay que maximizar.

$A(x, y) = xy$

Sujeta a las condiciones:

$$y = \sqrt{100 - \frac{x^2}{4}}$$

c) Se escribe la función con una sola variable.

$$A(x) = x\sqrt{100 - \frac{x^2}{4}}$$

$$A(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{400 - x^2}$$

d) Se calculan los máximos y mínimos derivando.

$$A'(x) = \frac{200 - x^2}{\sqrt{400 - x^2}}$$

$A'(x) = 0 \Rightarrow x = -10\sqrt{2}, x = 10\sqrt{2}$

Si $x = 10\sqrt{2} \Rightarrow y = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

El valor negativo no tiene sentido.

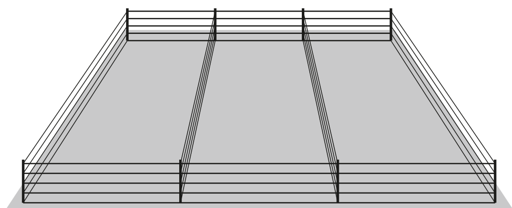
e) Se comprueba en la segunda derivada.

$$A''(x) = \frac{x(x^2 - 600)}{(400 - x^2)\sqrt{400 - x^2}}$$

$A''(10\sqrt{2}) = -2 < 0\ (-) \Rightarrow$ máximo relativo.

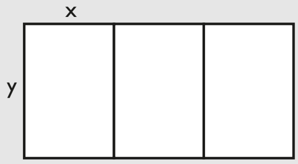
f) El área del rectángulo es máxima para $x = 10\sqrt{2}$ cm, $y = 5\sqrt{2}$ cm

118. Un solar rectangular de $11\,250\ m^2$ se divide en tres zonas rectangulares para venderlo como muestra la figura. Se valla el borde del campo y la separación entre las zonas. Calcula las dimensiones del solar para que la longitud de la valla utilizada sea mínima.



Solución:

a) Incógnitas, datos y dibujo.



y = largo del solar.

x = ancho de una parcela.

b) Función que hay que maximizar.

$L(x, y) = 6x + 4y$

Sujeta a las condiciones:

$3xy = 11\,250 \Rightarrow y = \dfrac{3\,750}{x}$

c) Se escribe la función con una sola variable.

$L(x) = 6x + 4 \cdot \dfrac{3\,750}{x}$

$L(x) = 6x + \dfrac{15\,000}{x}$

d) Se calculan los máximos y mínimos derivando.

$L'(x) = 6 - \dfrac{15\,000}{x^2}$

$L'(x) = 0 \Rightarrow x = -50, x = 50$

Si $x = 50 \Rightarrow y = 75$

El valor negativo no tiene sentido.

e) Se comprueba en la segunda derivada.

$L''(x) = \dfrac{30\,000}{x^3}$

$L''(50) = 6/25 > 0\ (+) \Rightarrow$ mínimo relativo.

f) La longitud se hace mínima para x = 50 m, y = 75 m

119. Se ha de construir un gran depósito cilíndrico de 81π m^3 de volumen. La superficie lateral ha de ser construida con un material que cuesta 30 €/m^2, y las dos bases con un material que cuesta 45 €/m^2

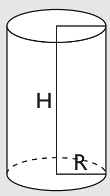
a) Determina la relación que hay entre el radio, R, de las bases circulares y la altura, H, del cilindro, y da el coste, C(R), del material necesario para construir el depósito en función de R

b) ¿Qué dimensiones ha de tener el depósito para que el coste de los materiales necesarios sea el mínimo posible?

c) ¿Cuál será, en este caso, el coste del material?

Solución:

a)



R = radio del cilindro.

H = altura del cilindro.

Volumen $= \pi R^2 H = 81\pi$ m^3

$C(R) = 30 \cdot 2\pi RH + 2 \cdot 45 \cdot \pi R^2$

$C(R) = 60\pi R\,\dfrac{81}{R^2} + 90\pi R^2$

$C(R) = \dfrac{4\,860\pi}{R} + 90\pi R^2$

b) Para calcular el coste mínimo, se deriva:

$C'(R) = -\dfrac{4\,860\pi}{R^2} + 180\pi R$

$-\dfrac{4\,860\pi}{R^2} + 180\pi R = 0 \Rightarrow R = 3$

Si R = 3 m $\Rightarrow$ H = 9 m

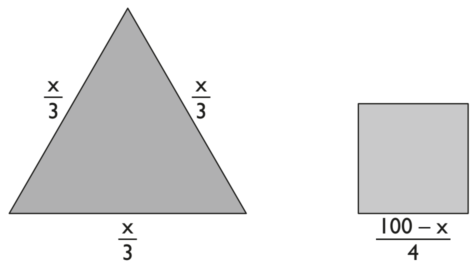
Se comprueba en la segunda derivada:

$C''(R) = \dfrac{9\,720\pi}{R^3} + 180\pi$

$C''(3) = 540\pi > 0\ (+) \Rightarrow$ mínimo relativo.

c) $C(3) = 2\,430\pi$ € = 7 634,07 €

120. Se divide un alambre de 100 m de longitud en dos segmentos de longitud **x** y 100 – x. Con el de longitud **x** se forma un triángulo equilátero y con el otro segmento se forma un cuadrado. Sea f(x) la suma de las áreas del triángulo y del cuadrado.



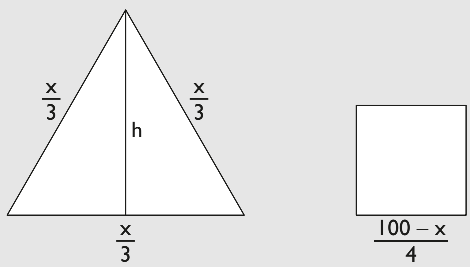
a) Determina el dominio de la función **f,** es decir, los valores que puede tomar **x**

b) Con el estudio de la derivada de **f** obtén cuándo **f** es creciente y cuándo es decreciente.

c) Obtén de forma razonada para qué valor de **x** se obtiene que las sumas de las áreas del triángulo y el cuadrado es mínima.

Solución:

a)



$$f(x, h) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{3} \cdot h + \left(\frac{100 - x}{4}\right)^2$$

La altura del triángulo:

$$h = \sqrt{\left(\frac{x}{3}\right)^2 - \left(\frac{x}{6}\right)^2} = \frac{x\sqrt{3}}{6}$$

$$f(x) = \frac{x^2\sqrt{3}}{36} + \left(\frac{100 - x}{4}\right)^2$$

Dom (f) = (0, 100)

b) $f'(x) = \dfrac{x\sqrt{3}}{18} + \dfrac{x - 100}{8}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \dfrac{900}{9 + 4\sqrt{3}}$

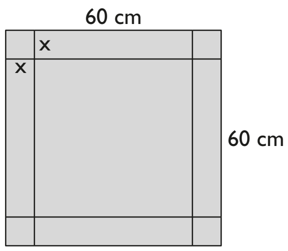
Creciente (↗): $\left(\dfrac{900}{9 + 4\sqrt{3}}, 100\right)$

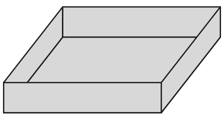
Decreciente (↘): $\left(0, \dfrac{900}{9 + 4\sqrt{3}}\right)$

c) $f''(x) = \dfrac{4\sqrt{3} + 9}{72} > 0$ para todo **x** del dominio.

Luego el área será mínima.

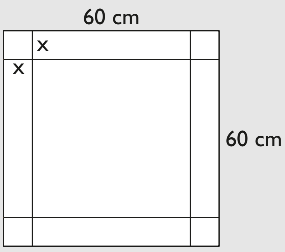
121. A partir de una cartulina cuadrada de 60 cm de lado se va a construir una caja de base cuadrada, sin tapa, a base de recortar cuatro cuadrados iguales en las esquinas de la cartulina y doblando después de la manera adecuada. Un observador indica que la caja de más capacidad se obtendrá si los cuadrados eliminados tienen 10 cm de lado. Decide si la observación es correcta o no.





Solución:

a) Incógnitas, datos y dibujo.



b) Función que hay que maximizar.

$V(x) = (60 - 2x)^2x$

$V(x) = 4x^3 - 240x^2 + 3\,600x$

c) Se calculan los máximos y mínimos derivando.

$V'(x) = 12x^2 - 480x + 3\,600$

$V'(x) = 0 \Rightarrow x = 10, x = 30$

d) Se comprueba en la segunda derivada.

$V''(x) = 24x - 480$

$V''(10) = -240 < 0$ (–) $\Rightarrow$ máximo relativo.

$V''(30) = 240 > 0$ (+) $\Rightarrow$ mínimo relativo.

e) Como el máximo se obtiene para x = 10, la observación es correcta.

122. Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 3}$$

Halla la ecuación cartesiana de la recta tangente en el punto de inflexión de abscisa positiva.

Solución:

$f'(x) = -\dfrac{2x}{(x^2 + 3)^2}$

$f''(x) = \dfrac{6(x^2 - 1)}{(x^2 + 3)^3}$

$f''(x) = 0 \Rightarrow x = -1, x = 1$

$f'''(x) = \dfrac{24x(3 - x^2)}{(x^2 + 3)^4}$

$f'''(1) = 3/16 \neq 0$

Punto de inflexión: A(1, 1/4)

Recta tangente en A:

$y - 1/4 = f'(1)(x - 1)$

$y - 1/4 = -\dfrac{1}{8}(x - 1)$

$y = \dfrac{3 - x}{8}$

123. Sea la función f(x) = sen x. Calcula la ecuación de la tangente a la gráfica de **f** en el punto de abscisa

$$x = \frac{\pi}{4}$$

Solución:

$f'(x) = \cos x$

Punto: $A(\pi/4, \sqrt{2}/2)$

Recta tangente:

$y - \sqrt{2}/2 = f'(\pi/4)(x - \pi/4)$

$y - \sqrt{2}/2 = \sqrt{2}/2\,(x - \pi/4)$

$y = \sqrt{2}/2\,(x - \pi/4 + 1)$

124. Se considera la función siguiente:

$$f(x) = \frac{1}{4 - x^2}$$

a) Halla los extremos relativos de la función f(x) y sus intervalos de concavidad y convexidad.

b) Halla el máximo y el mínimo absolutos en el intervalo [– 1, 1]

Solución:

a) $f'(x) = \dfrac{2x}{(4 - x^2)^2}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

$f''(x) = \dfrac{2(3x^2 + 4)}{(4 - x^2)^3} \Rightarrow f''(0) = \dfrac{1}{8} > 0$

Máximo relativo: no tiene.

Mínimo relativo: A(0, 1/4)

Punto de inflexión: no tiene.

Convexa (∪): (–2, 2)

Cóncava (∩): $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

b) Para calcular los máximos y mínimos absolutos, se observa que la función es continua en [– 1, 1], es decreciente en (– 1, 0) y es creciente en (0, 1)

Como:

f(– 1) = 1/3

f(1) = 1/3

se tiene:

el mínimo absoluto es A(0, 1/4), que coincide con el mínimo relativo, y el máximo absoluto se alcanza en los extremos del intervalo.

125. Dada la función $f(x) = e^x - (1 + x)$

a) estudia los extremos de f(x)

b) demuestra que $e^x > 1 + x$ para todo **x** positivo.

Solución:

a) $f'(x) = e^x - 1$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

$f''(x) = e^x \Rightarrow f''(0) = e^0 = 1 > 0$

Máximo relativo: no tiene.

Mínimo relativo: O(0, 0)

b) Hay que demostrar que la función

$f(x) = e^x - (1 + x) > 0$ para todo **x** positivo.

Como la función tiene un mínimo en (0, 0) y es creciente en $(0, +\infty)$, se verifica que $e^x > 1 + x$ para todo **x** positivo.

Para profundizar

126. Dada la función $f(x) = ax + \dfrac{b}{x}$ siendo **a** y **b** constantes positivas, se pide:

a) demostrar que el mínimo valor de f(x) en $(0, +\infty)$ es $2\sqrt{ab}$

b) deducir que $\sqrt{ab} < \dfrac{a + b}{2}$

Solución:

a) $f'(x) = 0 \Rightarrow a - \dfrac{b}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{b}{a}}$

En el intervalo $(0, +\infty) \Rightarrow x = \sqrt{\dfrac{b}{a}}$

$f\left(\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right) = a\sqrt{\dfrac{b}{a}} + \dfrac{b}{\sqrt{\dfrac{b}{a}}} = \dfrac{b + b}{\sqrt{\dfrac{b}{a}}} = \dfrac{2ba\sqrt{ab}}{ab} =$

$= 2\sqrt{ab}$

$f''(x) = \dfrac{2b}{x^3} > 0$ para todo $x \in (0, +\infty)$

Luego hay un mínimo relativo en el punto:

$$A\left(\sqrt{\dfrac{b}{a}}, 2\sqrt{ab}\right)$$

Creciente (↗): $\left(\sqrt{\dfrac{b}{a}}, +\infty\right)$

Decreciente (↘): $\left(0, \sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)$

El mínimo relativo es el mínimo absoluto en $(0, +\infty)$

b) Si $x = 1 \Rightarrow f(1) = a + b$

Como el mínimo se alcanza en A, se tiene:

$f\left(\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right) < f(1)$

$2\sqrt{ab} < a + b \Rightarrow \sqrt{ab} < \dfrac{a + b}{2}$

127. Demuestra que la ecuación tiene una única raíz positiva.

$$x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x = 1$$

Solución:

$f(x) = x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x - 1$

es continua por ser polinómica

f(0) = – 1

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Por el teorema de Bolzano, existe un **c** tal que f(c) = 0

Además

$f'(x) = 7x^6 + 6x^5 + 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$

$f'(x) > 0$ para todo $x > 0$

Luego f(x) es creciente porque todos los coeficientes son positivos, y, por lo tanto, solo corta al eje X una vez.

128. Dada la función $f(x) = x \, L \, x - 1$ con $x > 0$, explica de forma razonada por qué la ecuación $x \, L \, x = 1$ tiene exactamente una raíz.

Solución:

f(x) es continua por ser el producto de una función polinómica por una logarítmica menos una constante.

Como $\lim\limits_{x \to 0^+} x \,L\, x = 0$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x \,L\, x - 1) = -1$

Como $\lim\limits_{x \to 0^+} (x \,L\, x - 1) = +\infty$

Por el teorema de Bolzano, existe un **c** tal $f(c) = 0$

Para estudiar la unicidad, se estudia $f'(x)$

$f'(x) = L\, x + 1$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1/e$

Si $x = 1/e \Rightarrow f(1/e) = -1/e - 1$

Máximo relativo: no tiene.

Mínimo relativo: $(1/e, -1/e - 1)$

Creciente ($\nearrow$): $(1/e, +\infty)$

Decreciente ($\searrow$): $(0, 1/e)$

La función solo puede cortar al eje X una vez, en $(0, +\infty)$

129. Determina los valores de las constantes **a, b, c** y **d** para los cuales la gráfica de la función

$$f(x) = a \text{ sen } x + bx^2 + cx + d$$

tiene tangente horizontal en el punto (0, 4) y, además, su segunda derivada es $f''(x) = 3 \text{ sen } x - 10$

Solución:

a) Si la función pasa por A(0, 4)

$f(0) = 4 \Rightarrow d = 4$

b) Si la tangente es horizontal en $x = 0$

$f'(x) = a \cos x + 2bx + c$

$f'(0) = 0 \Rightarrow a + c = 0$

c) Si $f''(x) = 3 \text{ sen } x - 10$

$f''(x) = -a \text{ sen } x + 2b$

$-a \text{ sen } x + 2b = 3 \text{ sen } x - 10$

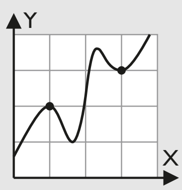
$2b = -10 \Rightarrow b = -5$

$a = -3$

Luego: $a = -3$, $b = -5$, $c = 3$, $d = 4$

130. Si es posible, dibuja de forma clara la gráfica de una función continua en el intervalo [0, 4] que tenga al menos un máximo relativo en el punto (1, 2) y un mínimo relativo en el punto (3, 3). Si la función fuese polinómica, ¿cuál habría de ser como mínimo su grado?

Solución:



Se observa que f tiene al menos 4 extremos. Por lo tanto, f' se anula 4 veces, es decir, es de grado cuatro. Si la función es polinómica, para que f' sea de grado cuatro, f debe ser de grado 5

131. Para cada valor de **a** se considera la función

$$f(x) = 2x + ax^2 - 4 \,L\, x$$

a) Calcula el valor del parámetro real **a,** sabiendo que la función tiene un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 1$. Clasifica el extremo.

b) Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento para $a = 3$

Solución:

a) $f'(x) = 2 + 2ax - \dfrac{4}{x}$

Si tiene un extremo en $x = 1 \Rightarrow f'(1) = 0$

$2 + 2a - 4 = 0$

$2a - 2 = 0$

$a = 1$

$f''(x) = 2a + \dfrac{4}{x^2}$

Para $a = 1 \Rightarrow f''(x) = 2 + \dfrac{4}{x^2}$

$f''(1) = 6 > 0\ (+) \Rightarrow$ mínimo relativo.

Para $x = 1$ se tiene un mínimo relativo.

b) $f'(x) = 2 + 6x - \dfrac{4}{x}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 2/3, x = -1$

$x = -1$ no pertenece al dominio de $f(x)$

Si $x = 2/3$, $f(2/3) = 8/3 - 4\, L(2/3)$

Máximo relativo: no tiene.

Mínimo relativo: $(2/3, 8/3 - 4\, L(2/3))$

Creciente ($\nearrow$): $(2/3, +\infty)$

Decreciente ($\searrow$): $(0, 2/3)$

132. Se sabe que la función $f(x) = x^3 + ax + b$ corta a su función derivada en $x = 1$ y que además, en dicho punto, **f** tiene un extremo.

a) Determina los valores de **a** y **b**

b) Determina la naturaleza del extremo que **f** tiene en $x = 1$

c) ¿Tiene **f** algún otro extremo?

Solución:

a) Si f y f'se cortan en $x = 1$:

$f'(x) = 3x^2 + a$

$3 + a = 1 + a + b$

Si en $x = 1$ hay un extremo, $f'(1) = 0$

$3 + a = 0$

Resolviendo el sistema: $\left.\begin{array}{l} 3 + a = 0 \\ 3 + a = 1 + a + b \end{array}\right\}$

$a = -3, b = 2$

b) $f''(x) = 6x$

$f''(1) = 6 > 0\ (+) \Rightarrow$ mínimo relativo.

c) $f'(x) = 3x^2 - 3$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1, x = 1$

$f''(-1) = -6 < 0\ (-) \Rightarrow$ máximo relativo.

133. Sean las funciones $f(x) = L\,x - b$ y $g(x) = a\sqrt{x} + b$

Determina **a** y **b** para que ambas funciones sean tangentes entre sí al pasar por $x = 1$

Solución:

a) Las funciones se cortan en $x = 1$

$f(1) = g(1) \Rightarrow L\,1 - b = a + b \Rightarrow a + 2b = 0$

b) Las funciones tienen la tangente común en $x = 1$

$f'(1) = g'(1)$

$\dfrac{1}{x} = \dfrac{a}{2\sqrt{x}} \Rightarrow 1 = \dfrac{a}{2} \Rightarrow a = 2$

Si $a = 2 \Rightarrow b = -1$

Las funciones son:

$f(x) = L\,x + 1$

$g(x) = 2\sqrt{x} - 1$

134. Dada la función $f(x) = ax^4 + 3bx^3 - 3x^2 - ax$, calcula los valores de **a** y **b** sabiendo que la función tiene dos puntos de inflexión, uno en $x = 1$ y otro en $x = \dfrac{1}{2}$

Solución:

$f'(x) = 4ax^3 + 9bx^2 - 6x - a$

$f''(x) = 12ax^2 + 18bx - 6$

$f''(1) = 0 \Rightarrow 12a + 18b - 6 = 0 \Rightarrow 2a + 3b = 1$

$f''(1/2) = 0 \Rightarrow 3a + 9b - 6 = 0 \Rightarrow a + 3b = 2$

Resolviendo el sistema: $a = -1, b = 1$

135. De la función $f(x) = ax^3 + bx$ se sabe que tiene una gráfica que pasa por $(1, 1)$ y que en ese punto tiene una tangente paralela a $3x + y = 0$. Halla **a** y **b**

Solución:

Si pasa por $(1, 1) \Rightarrow f(1) = 1$

$a + b = 1$

Si en $(1, 1)$ la tangente es paralela a $y = -3x$, $f'(1) = -3$

$f'(x) = 3ax^2 + b$

$3a + b = -3$

Resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{aligned} a + b &= 1 \\ 3a + b &= -3 \end{aligned}\right\}$$

$a = -2, b = 3$

136. La función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ verifica que $f(1) = 1$, $f'(1) = 0$ y $f(x)$ no tiene un extremo relativo en $x = 1$. Calcula **a, b** y **c**

Solución:

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$f''(x) = 6x + 2a$

$f(1) = 1 \Rightarrow 1 + a + b + c = 1 \Rightarrow a + b + c = 0$

$f'(1) = 0 \Rightarrow 3 + 2a + b = 0 \Rightarrow 2a + b = -3$

Si no hay extremo relativo y $f'(1) = -3$, hay un punto de inflexión:

$f''(1) = 0 \Rightarrow 6 + 2a = 0$

Resolviendo el sistema de las tres ecuaciones:

$a = -3, b = 3, c = 0$

137. Dada la función $f(x) = \sqrt[3]{x + 1} - \sqrt[3]{x}$, se pide:

a) hallar los máximos y mínimos relativos.

b) hallar los puntos de la gráfica de $f(x)$ donde tiene tangente vertical.

Solución:

a) $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x + 1)^2}} - \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1/2$

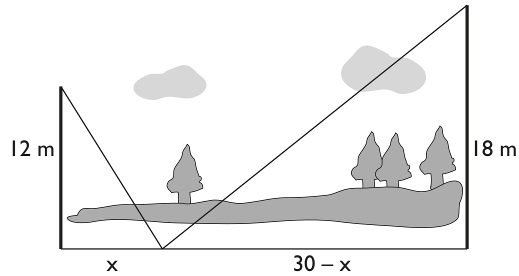
Máximo relativo: $A(-1/2, \sqrt[3]{4})$

Mínimo relativo: no tiene.

b) $f'(x)$ no existe para $x = 0$ y para $x + 1 = 0$

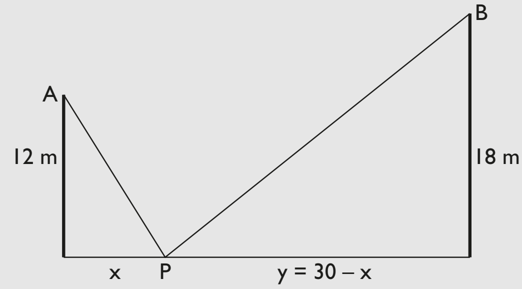
En $x = 0$ y en $x = -1$ la tangente es vertical.

138. Dos postes de 12 m y 18 m de altura distan entre sí 30 m. Se desea tender un cable uniendo un punto del suelo entre los dos postes con los extremos de éstos. ¿En qué posición debe situarse el punto en el suelo para que la longitud total del cable sea mínima?



Solución:

a) Incógnitas, datos y dibujo.



b) Función que hay que maximizar.

$L(x, y) = AP + PB = \sqrt{x^2 + 12^2} + \sqrt{18^2 + y^2}$

Sujeta a las condiciones:

$y = 30 - x$

c) Se escribe la función con una sola variable.

$L(x) = \sqrt{x^2 + 12^2} + \sqrt{18^2 + (30 - x)^2}$

$L(x) = \sqrt{x^2 + 144} + \sqrt{x^2 - 60x + 1\,224}$

d) Se calculan los máximos y mínimos relativos.

$$L'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 144}} + \frac{x - 30}{\sqrt{x^2 - 60x + 1\,224}}$$

$L'(x) = 0 \Rightarrow x = 12$

e) Se comprueba en la segunda derivada.

$$L''(x) = \frac{144}{(x^2 + 144)\sqrt{x^2 + 144}} + \frac{324}{(x^2 - 60x + 1\,224)\sqrt{x^2 - 60x + 1\,224}}$$

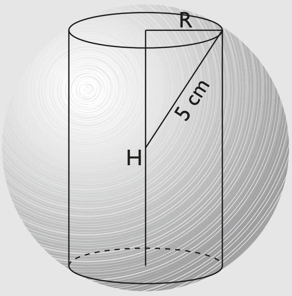
$L''(12) = 5\sqrt{2}/144 > 0\ (+) \Rightarrow$ mínimo relativo.

f) El cable debe estar a 12 m del poste que mide 12 m, y a 18 m del poste que mide 18 m

139. Calcula las dimensiones que debe tener un cilindro inscrito en una esfera de 5 cm de radio para que su volumen sea máximo.

Solución:

a) Incógnitas, datos y dibujo.



R = radio del cilindro.

H = altura del cilindro.

$$\frac{H^2}{4} + R^2 = 25$$

b) Función que hay que maximizar.

$V(R, H) = \pi R^2 H$

Sujeta a las condiciones:

$$R^2 = 25 - \frac{H^2}{4}$$

c) Se escribe la función con una sola variable.

$$V(H) = \pi\left(25 - \frac{H^2}{4}\right)H$$

$$V(H) = \pi\left(25H - \frac{H^3}{4}\right)$$

d) Se calculan los máximos y mínimos relativos.

$$V'(H) = \pi\left(25 - \frac{3H^2}{4}\right)$$

$$V'(H) = 0 \Rightarrow H = -\frac{10\sqrt{3}}{3}, H = \frac{10\sqrt{3}}{3}$$

La solución negativa no tiene sentido.

$$\text{Si } H = \frac{10\sqrt{3}}{3} \Rightarrow R = \frac{5\sqrt{6}}{3}$$

e) Se comprueba en la segunda derivada.

$$V''(H) = \pi\left(-\frac{6H}{4}\right) = -\frac{3\pi H}{2}$$

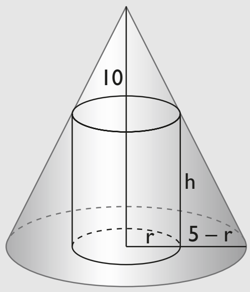
$$V''\left(\frac{10\sqrt{3}}{3}\right) = -5\pi\sqrt{3} < 0\ (-) \Rightarrow \text{máximo relativo.}$$

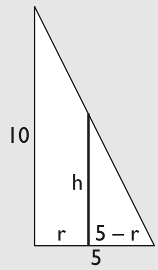
f) El radio del cilindro debe medir $R = \dfrac{5\sqrt{6}}{3}$ cm, y la altura, $H = \dfrac{10\sqrt{3}}{3}$ cm

140. Calcula las dimensiones de un cilindro inscrito en un cono de 5 m de radio y 10 m de altura para que su volumen sea máximo.

Solución:

a) Incógnitas, datos y dibujo.





r = radio del cilindro.

h = altura del cilindro.

$$\frac{10}{5} = \frac{h}{5 - r}$$

b) Función que hay que maximizar.

$V(r, h) = \pi r^2 h$

Sujeta a las condiciones:

$h = 2(5 - r)$

c) Se escribe la función con una sola variable.

$V(r) = 2\pi r^2(5 - r)$

$V(r) = 2\pi(5r^2 - r^3)$

d) Se calculan los máximos y mínimos relativos.

$V'(r) = 2\pi(10r - 3r^2)$

$V'(r) = 0 \Rightarrow r = 0, r = 10/3$

La solución $r = 0$ no tiene sentido.

Si $r = 10/3 \Rightarrow h = 10/3$

e) Se comprueba en la segunda derivada.

$V''(r) = 2\pi(10 - 6r)$

$V''(10/3) = -20\pi < 0\ (-) \Rightarrow$ máximo relativo.

f) El radio del cilindro debe medir $r = 10/3$ cm, y la altura, $h = 10/3$ cm

141. El número total de bacterias (en miles) presentes en un cultivo después de **t** horas viene dado por:

$$N(t) = 2t(t - 10)^2 + 50$$

a) Calcula la función derivada.

b) Durante las 10 primeras horas, ¿en qué instante se alcanza la población máxima y la mínima?

Solución:

$N'(t) = 2(3t^2 - 40t + 100)$

$N'(t) = 0 \Rightarrow t = 10/3, t = 10$

Máximo relativo: $A(10/3, 9\,350/27)$

Mínimo relativo: $B(10, 50)$

Se comprueban los extremos del intervalo $[0, 10]$

$f(0) = 50$

El mínimo se alcanza en los extremos, es decir, en $t = 0$ y $t = 10$ con 50 000 bacterias, y el máximo se alcanza en $t = 10/3$ con $9\,350/27 = 346\,296$ bacterias.

142. La capacidad de concentración de una saltadora de altura en una reunión atlética de tres horas de duración viene dada por la función $f(t) = 300t(3 - t)$, donde **t** mide el tiempo en horas.

a) Calcula los intervalos en los cuales la capacidad de concentración aumenta y los intervalos en los que disminuye. ¿Cuándo es nula?

b) ¿Cuál es el mejor momento, en términos de su capacidad de concentración, para que la saltadora pueda batir su propia marca?

Solución:

a) $f'(t) = -600\,t + 900$

$f'(t) = 0 \Rightarrow t = 3/2$

Máximo relativo: $A(3/2, 675)$

Mínimo relativo: no tiene.

Creciente ($\nearrow$): $(0, 3/2)$

Decreciente ($\searrow$): $(3/2, 3)$

Es nula en: $f(t) = 0 \Rightarrow t = 0$ y $t = 3$

b) Cuando se alcanza el máximo de concentración en $t = 3/2$

143. Sea la función $f(x) = x^2 - 4x + 2$

a) Determina los extremos relativos de la función.

b) Halla las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de $f(x)$ que pasan por el punto $(3, -5)$

Solución:

a) $f'(x) = 2x - 4$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 2$

Máximo relativo: no tiene.

Mínimo relativo: $A(2, -2)$

b) Una recta que pasa por el punto $(3, -5)$ es:

$y + 5 = m(x - 3) \Rightarrow y = mx - 3m - 5$

Para que la recta sea tangente a la parábola, ésta y la recta solo deben tener un punto en común, es decir, el sistema formado por la ecuación de la función y la recta debe tener solución única.

Se observa que el punto $(3, -5)$ no está en la parábola.

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 - 4x + 2 \\ y = mx - 3m - 5 \end{array}\right\}$$

$x^2 - (4 + m)x + 3m + 7 = 0$

Para que tenga una solución, el discriminante debe ser cero:

$(4 + m)^2 - 4(3m + 7) = 0$

$m^2 - 4m - 12 = 0$

$m = -2, m = 6$

Las rectas tangentes son:

$y = -2x + 1$

$y = 6x - 23$

Paso a paso

144. Dada la función:

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$$

a) dibuja la función.
b) calcula los máximos y los mínimos relativos.
c) determina la monotonía.
d) calcula los puntos de inflexión.
e) halla la curvatura.

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

145. Calcula el $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2 \text{ sen } 2x}{\text{sen } x}$

Representa la función correspondiente para comprobar el resultado hallado.

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

Plantea el siguiente problema y resuélvelo con ayuda de Wiris y Derive.

146. Se desea fabricar una caja abierta con base cuadrada y con un área de 300 dm^2. ¿Qué dimensiones debe tener la caja para que el volumen sea máximo?

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

147. **Internet.** Abre: **www.editorial-bruno.es** y elige **Matemáticas, curso** y **tema.**

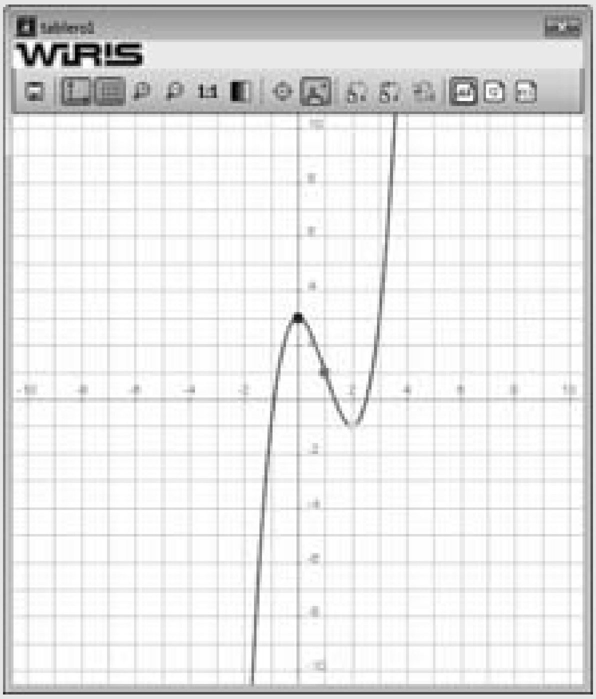
Practica

Dada las siguientes funciones:
a) dibuja la función.
b) calcula los máximos y los mínimos relativos.
c) determina la monotonía.
d) calcula los puntos de inflexión.
e) halla la curvatura.

148. $y = x^3 - 3x^2 + 3$

Solución:

```
Ejercicio 148
f(x) = x³ − 3x² + 3  →  x↦x³−3·x²+3
dibujar(f(x), {color = rojo, anchura_linea = 2})
a) Máximos y mínimos relativos :
f'(x)  →  3·x²−6·x
resolver(f'(x) = 0)  →  {{x=0}, {x=2}}
A = punto(0, f(0))  →  (0,3)
B = punto(2, f(2))  →  (2, −1)
f''(x)  →  6·x−6
f''(0)  →  −6
A(0, 3) Máximo relativo.
dibujar(A, {color = azul, tamaño_punto = 8})
f''(2)  →  6
B(2, −1) mínimo relativo.
dibujar(B, {color = cian, tamaño_punto = 8})
b) Monotonía :
Creciente = (−∞, 0) U (2, +∞)
Decreciente = (0, 2)
c) Puntos de inflexión :
resolver(f''(x) = 0)  →  {{x=1}}
C = punto(1, f(1))  →  (1, 1)
f'''(x)  →  6
f'''(1)  →  6
C(2, 3) Punto de inflexión.
dibujar(C, {color = magenta, tamaño_punto = 8})
d) Curvatura :
Convexa(∪) = (1, +∞)
Cóncava(∩) = (−∞, 1)
```



149. $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

Solución:

Ejercicio 149

$f(x) = \dfrac{x}{x^2-1} \rightarrow x \mapsto \dfrac{x}{x^2-1}$

dibujar(f(x), {color = rojo, anchura_linea = 2})

a) Máximos y mínimos relativos:

$f'(x) \rightarrow \dfrac{-x^2-1}{x^4-2\cdot x^2+1}$

resolver(f'(x) = 0) → {[]}

No tiene máximos, ni mínimos relativos.

b) Monotonía:

Discontinuidades: x = – 1, x = 1

Creciente = Nunca.

Decreciente = $\mathbb{R} - \{-1, 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$

c) Puntos de inflexión:

$f''(x) \rightarrow \dfrac{2\cdot x^3+6\cdot x}{x^6-3\cdot x^4+3\cdot x^2-1}$

resolver(f''(x) = 0) → {{x=0}}

A = punto(0, f(0)) → (0,0)

$f'''(x) \rightarrow \dfrac{-6\cdot x^4-36\cdot x^2-6}{x^8-4\cdot x^6+6\cdot x^4-4\cdot x^2+1}$

f'''(0) → –6

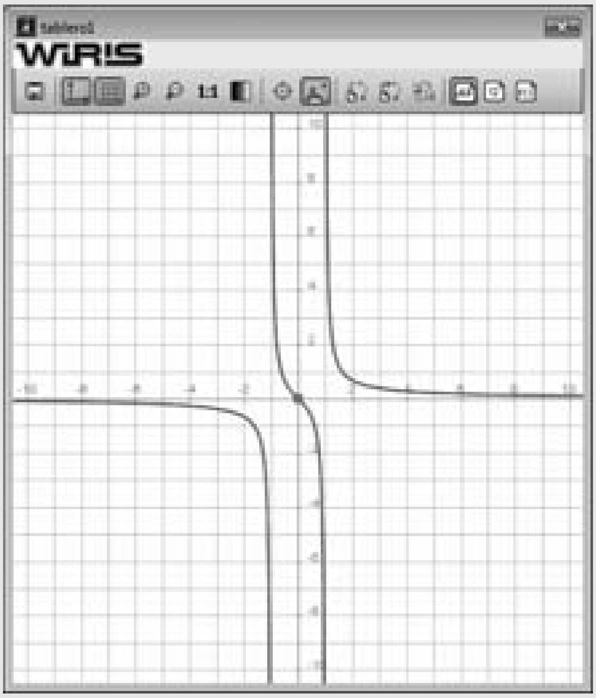
A(0, 0) Punto de inflexión.

dibujar(A, {color = magenta, tamaño_punto = 8})

d) Curvatura:

Convexa(∪) = $(-1, 0) \cup (1\ +\infty)$

Cóncava(∩) = $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$



150. $y = (2 - x)e^x$

Solución:

Ejercicio 150

$f(x) = (2 - x)\cdot e^x \rightarrow x \mapsto (-x+2)\cdot e^x$

dibujar(f(x), {color = rojo, anchura_linea = 2})

a) Máximos y mínimos relativos:

$f'(x) \rightarrow (-x+1)\cdot e^x$

resolver(f'(x) = 0) → {{x=1}}

A = punto(1, f(1)) → (1,e)

$f''(x) \rightarrow -x\cdot e^x$

f''(1) → –e

A(1, e) Máximo relativo.

dibujar(A, {color = azul, tamaño_punto = 8})

b) Monotonía:

Creciente = $(-\infty, 1)$

Decreciente = $(1, +\infty)$

c) Puntos de inflexión:

resolver(f''(x) = 0) → {{x=0}}

C = punto(0, f(0)) → (0,2)

$f'''(x) \rightarrow (-x-1)\cdot e^x$

f'''(0) → –1

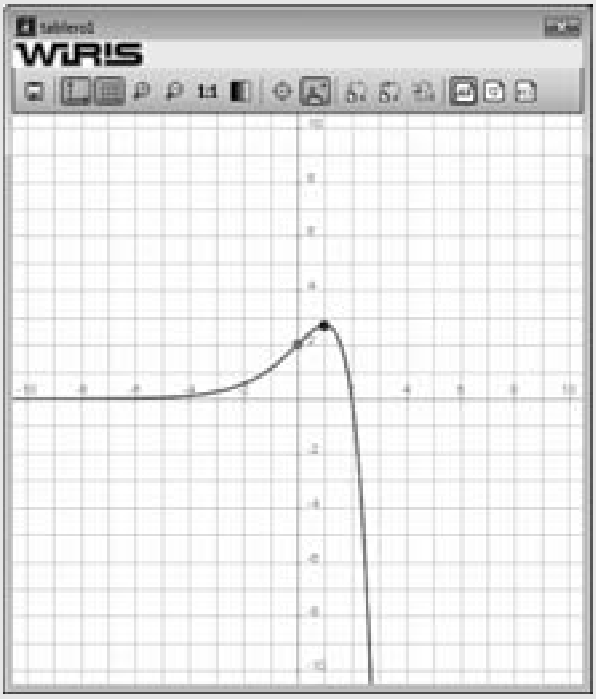
C(0, 2) Punto de inflexión.

dibujar(C, {color = magenta, tamaño_punto = 8})

d) Curvatura:

Convexa(∪) = $(-\infty, 0)$

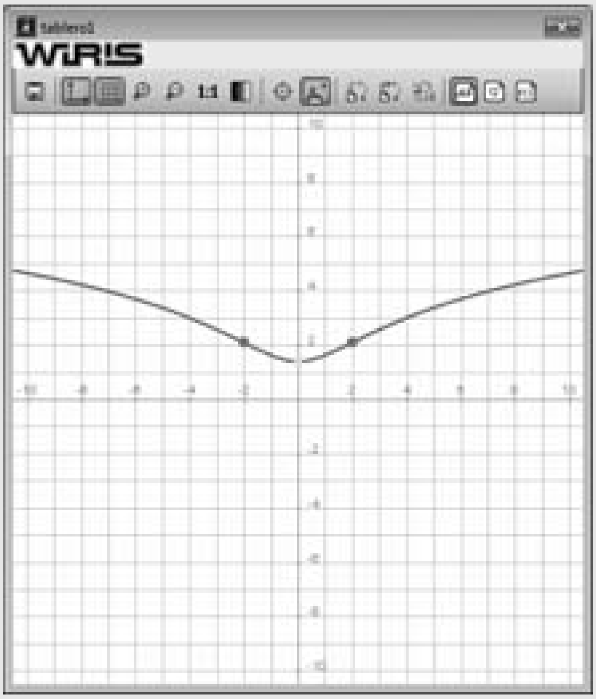
Cóncava(∩) = $(0, +\infty)$



151. $y = L\,(x^2 + 4)$

Solución:

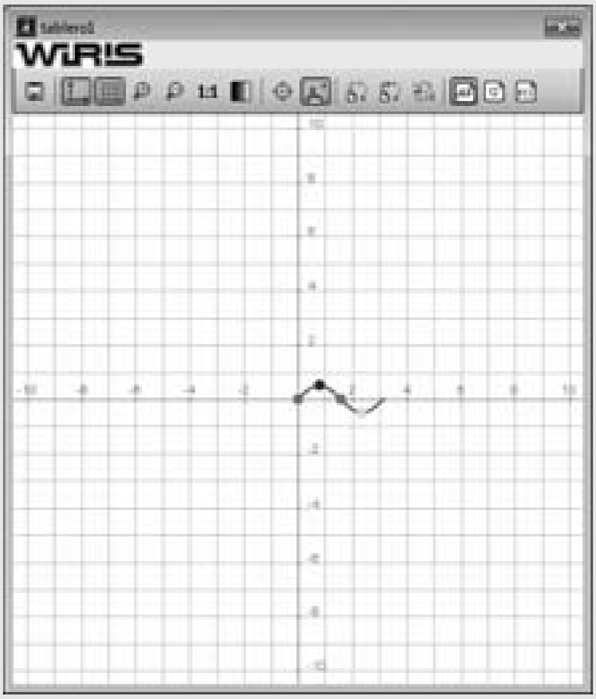
Ejercicio 151
$f(x) = \ln(x^2 + 4) \rightarrow x \mapsto \ln(x^2+4)$
dibujar(f(x), {color = rojo, anchura_línea = 2})
a) Máximos y mínimos relativos :
$f'(x) \rightarrow \dfrac{2\cdot x}{x^2+4}$
resolver(f'(x) = 0) → {{x=0}}
A = **punto**(0, f(0)) → (0.,1.3863)
$f''(x) \rightarrow \dfrac{-2\cdot x^2+8}{x^4+8\cdot x^2+16}$
$f''(0) \rightarrow \dfrac{1}{2}$
A(0, ln 4) mínimo relativo.
dibujar(A, {color = cian, tamaño_punto = 8})
b) Monotonía :
Creciente = (0, +∞)
Decreciente = (−∞, 0)
c) Puntos de inflexión :
resolver(f''(x) = 0) → {{x=−2},{x=2}}
B = **punto**(−2, f(−2)) → (−2.,2.0794)
C = **punto**(2, f(2)) → (2.,2.0794)
$f'''(x) \rightarrow \dfrac{4\cdot x^3-48\cdot x}{x^6+12\cdot x^4+48\cdot x^2+64}$
$f'''(-2) \rightarrow \dfrac{1}{8}$
B(−2, 2.0794) Punto de inflexión.
dibujar(B, {color = magenta, tamaño_punto = 8})
$f'''(2) \rightarrow -\dfrac{1}{8}$
C(2, 2.0794) Punto de inflexión.
dibujar(C, {color = magenta, tamaño_punto = 8})
d) Curvatura :
Convexa(∪) = (−2, 2)
Cóncava(∩) = (−∞, −2) ∪ (2, +∞)



152. $y = \text{sen}\ x \cos x$ en $[0, \pi)$

Solución:

Ejercicio 152
$f(x) = \text{sen}(x)\cdot\cos(x) \rightarrow x \mapsto \text{sen}(x)\cdot\cos(x)$
dibujar(f(x), 0..π, {color = rojo, anchura_línea = 2})
a) Máximos y mínimos relativos :
$f'(x) \rightarrow -2\cdot\text{sen}(x)^2+1$
resolver(f'(x) = 0) → $\left\{\left\{x=\dfrac{\pi}{4}\right\},\left\{x=\dfrac{3\cdot\pi}{4}\right\},\left\{x=\dfrac{5\cdot\pi}{4}\right\},\left\{x=-\dfrac{\pi}{4}\right\}\right\}$
A = **punto**(π/4, f(π/4)) → $\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{1}{2}\right)$
B = **punto**(3π/4, f(3π/4)) → $\left(\dfrac{3\cdot\pi}{4},-\dfrac{1}{2}\right)$
$f''(x) \rightarrow -4\cdot\cos(x)\cdot\text{sen}(x)$
f''(π/4) → −2
A(π/4, 1/2) Máximo relativo.
dibujar(A, {color = azul, tamaño_punto = 8})
f''(3π/4) → 2
B(3π/4, −1/2) mínimo relativo.
dibujar(B, {color = cian, tamaño_punto = 8})
b) Monotonía :
Creciente = (0, π/4) ∪ (3π/4, π)
Decreciente = (π/4, 3π/4)
c) Puntos de inflexión :
resolver(f''(x) = 0) → $\left\{\{x=0\},\{x=-\pi\},\{x=\pi\},\left\{x=\dfrac{\pi}{2}\right\},\left\{x=-\dfrac{\pi}{2}\right\}\right\}$
C = **punto**(0, f(0)) → (0,0)
f'''(0) → −4
C(0, 0) Punto de inflexión.
dibujar(C, {color = magenta, tamaño_punto = 8})
D = **punto**(π/2, f(π/2)) → $\left(\dfrac{\pi}{2},0\right)$
f'''(π/2) → 4
D(π/2, 0) Punto de inflexión.
dibujar(D, {color = magenta, tamaño_punto = 8})
d) Curvatura :
Convexa(∪) = (π/2, π)
Cóncava(∩) = (0, π/2)

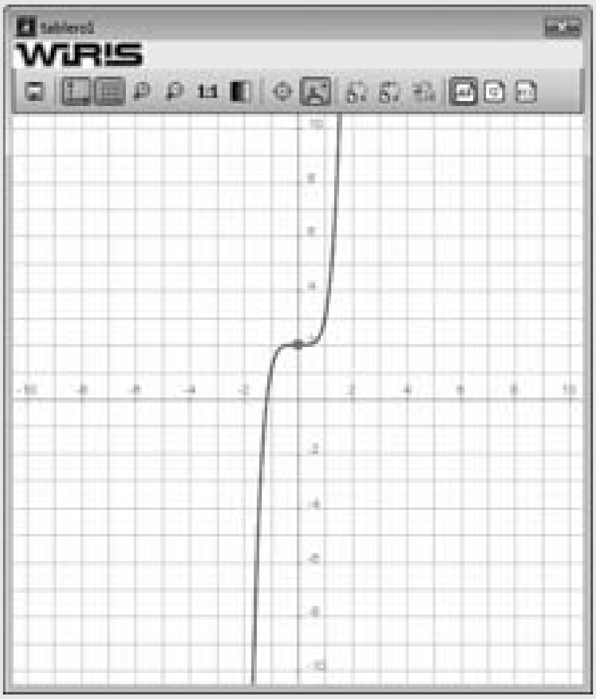


153. Halla los puntos singulares de la función:

$$f(x) = x^5 + 2$$

Solución:

```
Ejercicio 153
f(x) = x^5 + 2  →  x↦x^5+2
dibujar(f(x), {color = rojo, anchura_linea = 2})
f'(x)  →  5·x^4
resolver(f'(x) = 0)  →  {{x=0}}
A = punto(0, f(0))  →  (0,2)
f''(x)  →  20·x^3
f''(0)  →  0
f'''(x)  →  60·x^2
f'''(0)  →  0
f''''(x)  →  120·x
f''''(0)  →  0
f'''''(x)  →  120
f'''''(0)  →  120
A(0, 0) Punto de inflexión
dibujar(A, {color = magenta, tamaño_punto = 8})
```



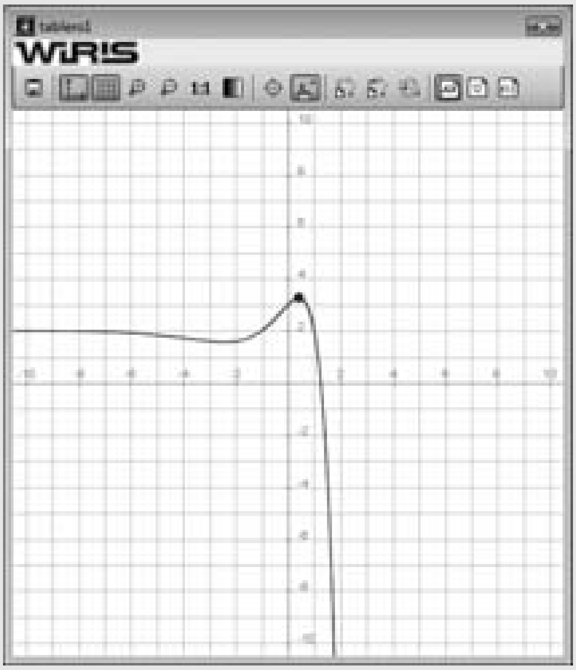
154. Dada la función:

$$f(x) = 2 + (1 - x^2)e^x$$

demuestra que $f'(x) = 0$ para algún valor de $[-1, 1]$

Solución:

```
Ejercicio 154
f(x) = 2 + (1 - x^2)·e^x  →  x↦(-x^2+1)·e^x+2
dibujar(f(x))  →  tablero1
dibujar(f(x), -1..1, {color = rojo, anchura_linea = 2})
Hipótesis del teorema de Rolle
f(x) es continua en [-1, 1] y derivable en (-1, 1)
f(-1)  →  2
f(1)  →  2
f'(x)  →  (-x^2-2·x+1)·e^x
resolver(f'(x) = 0)  →  {{x=-√2-1}, {x=√2-1}}
A = punto(√2-1, f(√2-1))  →  (0.41421,3.2536)
dibujar(A, {color = azul, tamaño_punto = 8})
```



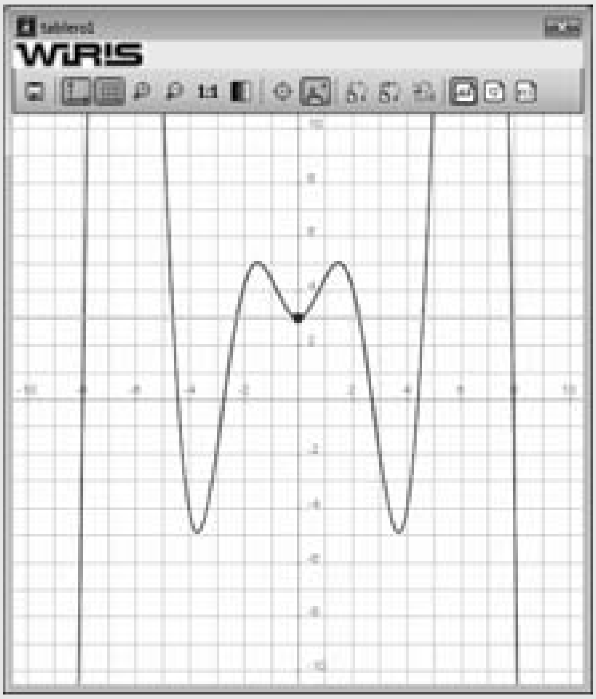
155. Demuestra que la función:

$$f(x) = 5 + (x^2 - 2)\cos x$$

tiene en el intervalo $(-3, 3)$ algún punto tal que la tangente sea horizontal.

Solución:

```
Ejercicio 155
f(x) = 5 + (x^2 - 2)·cos(x)  →  x↦x^2-2·cos(x)+5
dibujar(f(x))  →  tablero1
dibujar(f(x), -3..3, {color = rojo, anchura_linea = 2})
Hipótesis del teorema de Rolle
f(x) es continua en [-3, 3] y derivable en (-3, 3)
f(-3)  →  -1.9299
f(3)  →  -1.9299
A = punto(0, f(0))  →  (0,3)
dibujar(3, {color = verde, anchura_linea = 2})
dibujar(A, {color = azul, tamaño_punto = 8})
Además hay otros dos puntos, en los que hay un máximo relativo.
```



156. Dada la función: $f(x) = \dfrac{4}{x} + 1$

halla todos los valores $c \in (1, 4)$ tales que:

$$f'(c) = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1}$$

Solución:

Ejercicio 156

$f(x) = \dfrac{4}{x} + 1 \rightarrow x \mapsto \dfrac{x+4}{x}$

dibujar(f(x)) → tablero1

dibujar(f(x), 1..4, {color = azul, anchura_linea = 2})

A = punto(1, f(1)) → (1,5)

B = punto(4, f(4)) → (4,2)

$m = \dfrac{f(4) - f(1)}{4 - 1} \rightarrow -1$

$s(x) = m \cdot (x-1) + f(1) \rightarrow x \mapsto -x+6$

dibujar(s(x), {color = verde, anchura_linea = 2})

$f'(x) \rightarrow \dfrac{-4}{x^2}$

resolver(f'(x) = m) → {{x=−2}, {x=2}}

C = punto(2, f(2)) → (2,3)

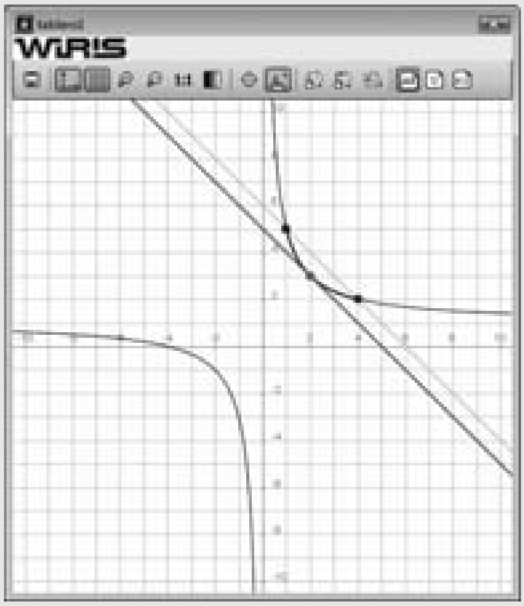
$t(x) = m \cdot (x-2) + f(2) \rightarrow x \mapsto -x+5$

dibujar(t(x), {color = rojo, anchura_linea = 2})

dibujar(A, {color = azul, tamaño_punto = 8})

dibujar(B, {color = azul, tamaño_punto = 8})

dibujar(C, {color = rojo, tamaño_punto = 8})



Calcula los siguientes límites:

157. $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{L\,x}{L\,\text{sen}\,x}$

Solución:

Ejercicio 157

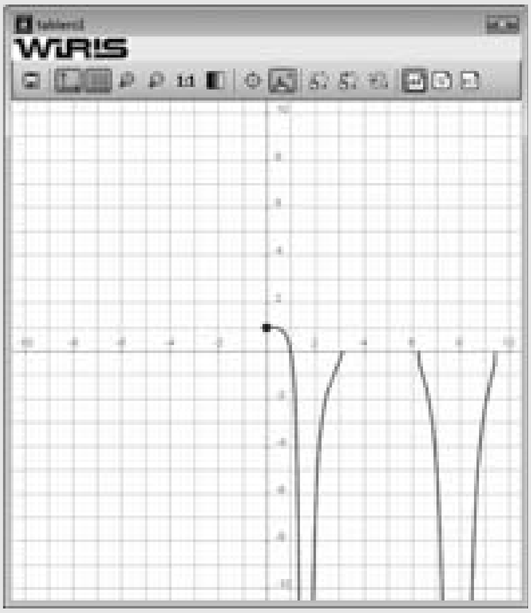
$f(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(\text{sen}(x))} \rightarrow x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{\ln(\text{sen}(x))}$

$L = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) \rightarrow 1$

dibujar(f(x), {color = rojo, anchura_linea = 2})

A = punto(0, L) → (0,1)

dibujar(A, {color = azul, tamaño_punto = 8})



158. $\lim\limits_{x \to 0^+} x \, L \operatorname{sen} x$

Solución:

Ejercicio 158

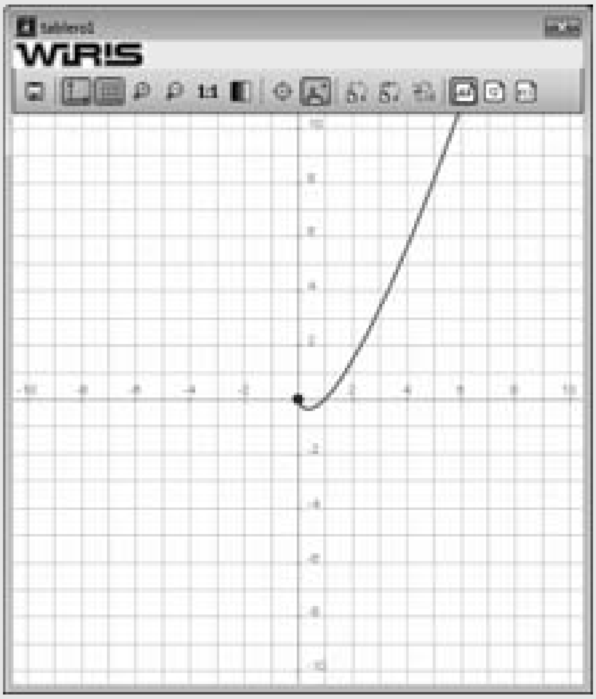
$f(x) = x \cdot \ln(x) \;\rightarrow\; x \mapsto x \cdot \ln(x)$

$L = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) \;\rightarrow\; 0$

dibujar(f(x), {color = rojo, anchura_linea = 2})

A = punto(0, L) → (0,0)

dibujar(A, {color = azul, tamaño_punto = 8})



159. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$

Solución:

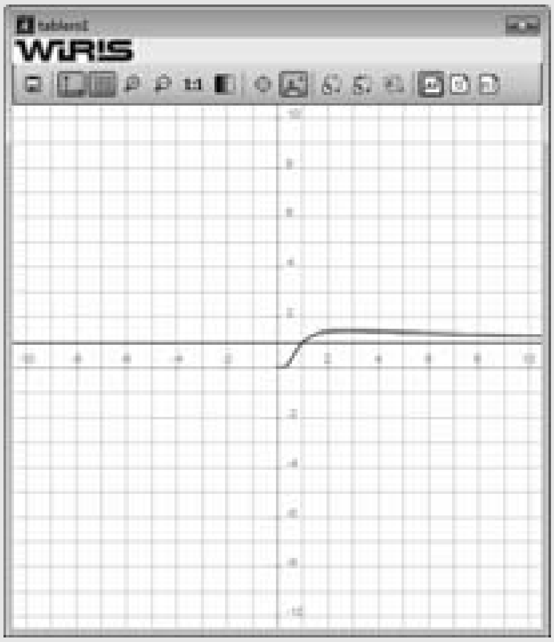
Ejercicio 159

$f(x) = x^{\frac{1}{x}} \;\rightarrow\; x \mapsto x^{\frac{1}{x}}$

$L = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \;\rightarrow\; 1$

dibujar(f(x), {color = rojo, anchura_linea = 2})

dibujar(y = L, {color = azul, tamaño_punto = 8})



160. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{\operatorname{sen} x} - \dfrac{1}{x} \right)$

Solución:

Ejercicio 160

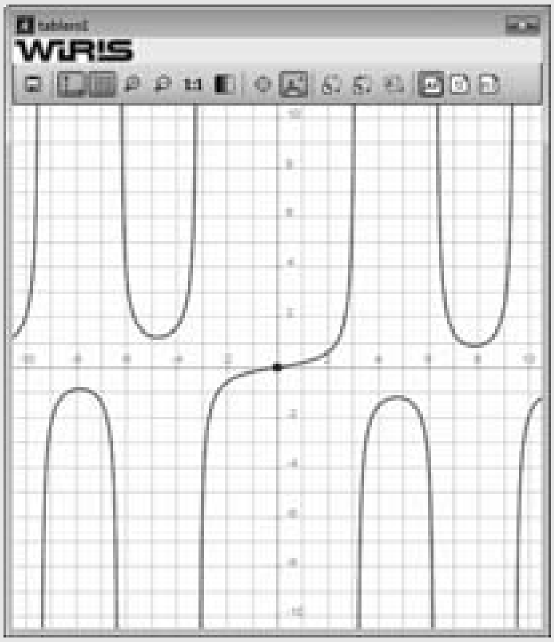
$f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}(x)} - \dfrac{1}{x} \;\rightarrow\; x \mapsto \dfrac{\operatorname{sen}(x) - x}{-x \cdot \operatorname{sen}(x)}$

$L = \lim\limits_{x \to 0} f(x) \;\rightarrow\; 0$

dibujar(f(x), {color = rojo, anchura_linea = 2})

A = punto(0, L) → (0,0)

dibujar(A, {color = azul, tamaño_punto = 8})



161. Calcula las rectas tangente y normal de la función:

$$f(x) = x^3 + x$$

en A(1, 2)

Solución:

Ejercicio 161

$a = 1 \rightarrow 1$

$f(x) = x^3 + x \Rightarrow x \mapsto x^3 + x$

dibujar(f(x), {color = azul, anchura_linea = 2})

P = punto(a, f(a)) $\rightarrow$ (1,2)

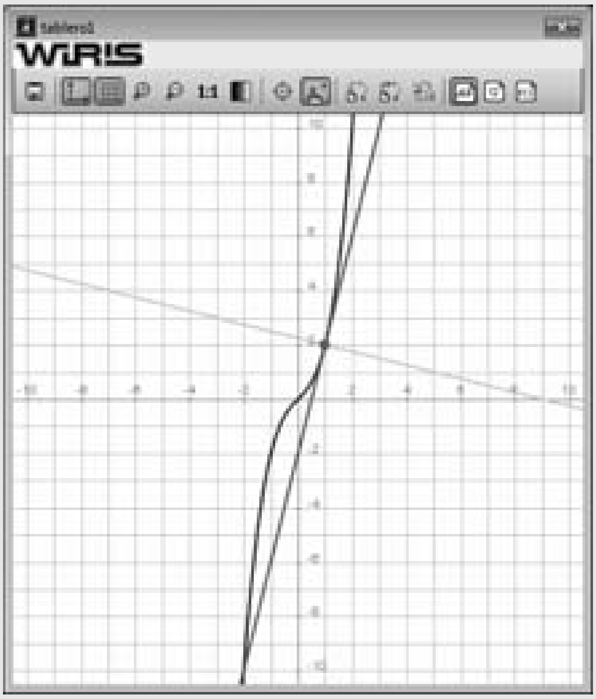
$t(x) = f'(a)\cdot(x - a) + f(a) \rightarrow x \mapsto 4\cdot x - 2$

dibujar(t(x), {color = rojo, anchura_linea = 2})

$n(x) = -\dfrac{1}{f'(a)}\cdot(x - a) + f(a) \Rightarrow x \mapsto -\dfrac{1}{4}\cdot x + \dfrac{9}{4}$

dibujar(n(x), {color = verde, anchura_linea = 2})

dibujar(P, {color = rojo, tamaño_punto = 8})



162. Halla el máximo y el mínimo absolutos de la función:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$$

en el intervalo [1, 2]

Solución:

Ejercicio 162

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1 \Rightarrow x \mapsto x^3 - 6\cdot x^2 + 9\cdot x - 1$

dibujar(f(x)) $\rightarrow$ tablero1

dibujar(f(x),0..2, {color = rojo, anchura_linea = 2})

A = punto(0, f(0)) $\rightarrow$ (0, −1)

dibujar(A, {color = azul, tamaño_punto = 8})

B = punto(2, f(2)) $\rightarrow$ (2,1)

dibujar(B, {color = azul, tamaño_punto = 8})

Aplicación del teomera de Weiertrass

$f'(x) \rightarrow 3\cdot x^2 - 12\cdot x + 9$

resolver(f'(x) = 0) $\rightarrow$ {{x=1}, {x=3}}

C = punto(1, f(1)) $\rightarrow$ (1,3)

$f''(x) \rightarrow 6\cdot x - 12$

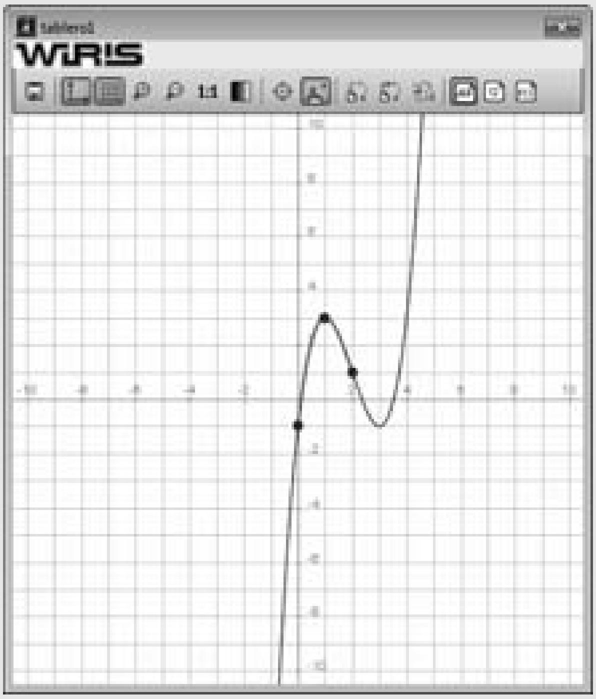
$f''(1) \rightarrow -6$

C(1, 3) Máximo relativo de f(x) en [0, 2]

dibujar(C, {color = azul, tamaño_punto = 8})

El máximo absoluto es C(1, 3)

El mínimo relativo es A(0, −1)



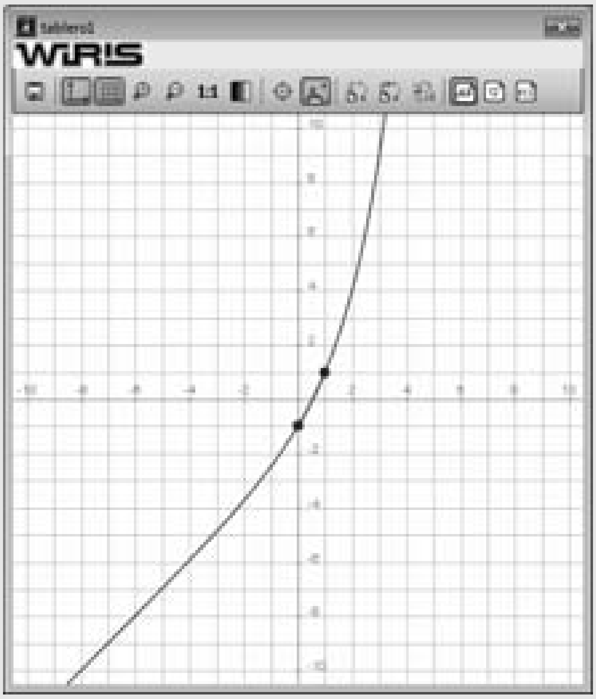
163. Demuestra que la ecuación:

$$2^x + x - 2 = 0$$

tiene una única solución real en el intervalo [0, 1]

Solución:

Ejercicio 163
$f(x) = 2^x + x - 2 \twoheadrightarrow x \mapsto 2^x + x - 2$
dibujar(f(x)) → tablero1
dibujar(f(x),0..1, {color = rojo, anchura_linea = 2})
A = punto(0, f(0)) → (0, −1)
dibujar(A, {color = azul, tamaño_punto = 8})
B = punto(1, f(1)) → (1, 1)
dibujar(B, {color = azul, tamaño_punto = 8})
Existencia por el teorema de Bolzano
f(x) es continua en [0, 1], f(0) < 0, f(1) > 0, existe $c \in (0, 1)$ tal que f(c) = 0
Unicidad :
$f'(x) \twoheadrightarrow 0.69315 \cdot 2^x + 1$
f'(x) > 0 siempre, luego la función es siempre creciente.
Por tanto, solo puede cortar al eje X en un punto.



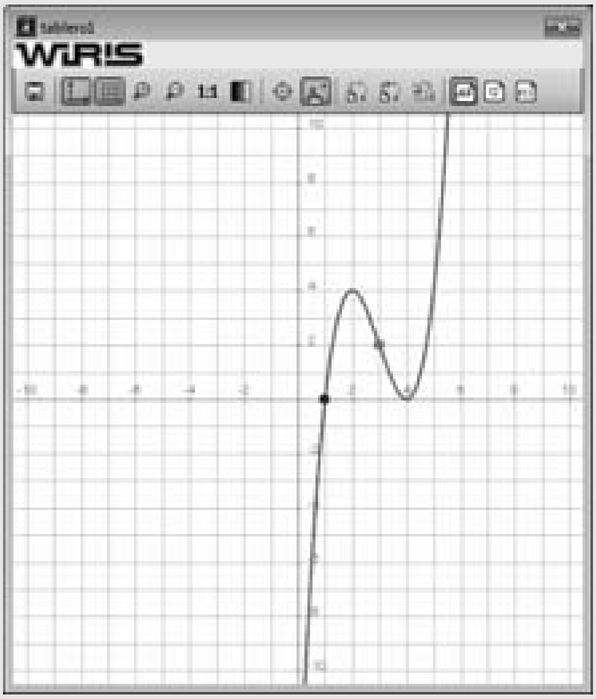
164. Calcula el valor de los coeficientes **a, b** y **c** para que la función:

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

corte al eje X en el punto A(1, 0) y tenga un punto de inflexión en el punto B(3, 2)

Solución:

Ejercicio 164
$f(x) = x^3 + a \cdot x^2 + b \cdot x + c \twoheadrightarrow x \mapsto a \cdot x^2 + b \cdot x + c + x^3$
$\text{resolver}\begin{Bmatrix} f(1) = 0 \\ f(3) = 2 \\ f''(3) = 0 \end{Bmatrix} \twoheadrightarrow \{\{a = -9, b = 24, c = -16\}\}$
$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 16 \twoheadrightarrow x \mapsto x^3 - 9 \cdot x^2 + 24 \cdot x - 16$
dibujar(f(x), {color = rojo, anchura_linea = 2})
A = punto(1, 0) → (1,0)
dibujar(A, {color = azul, tamaño_punto = 8})
B = punto(3, 2) → (3,2)
dibujar(B, {color = magenta, tamaño_punto = 8})



165. Calcula las dimensiones de un rectángulo cuyo perímetro mida 64 m y su área sea máxima.

Solución:

Problema 165
Planteamiento : A(x, y) = xy
Condiciones : P(x, y) = 2x + 2y
resolver({2x + 2y = 64}, {y}) → {{y = −x+32}}
$A(x) = x \cdot (-x+32) \twoheadrightarrow x \mapsto -x^2 + 32 \cdot x$
resolver(A'(x) = 0) → {{x=16}}
$f(x) = -x+32 \twoheadrightarrow x \mapsto -x+32$
f(16) → 16
Dimensiones del rectángulo : largo = ancho = 16 cm