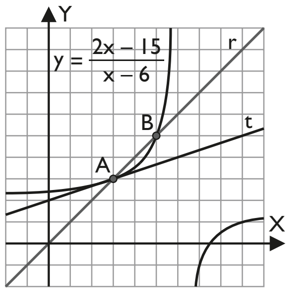
10 Cálculo de derivadas

1. La derivada

Piensa y calcula



Calcula mentalmente sobre la primera gráfica del margen:

a) la pendiente de la recta secante, **r,** que pasa por A y B

b) la pendiente de la recta tangente, **t,** en el punto A

Solución:

a) 1 b) 1/3

Aplica la teoría

1. Calcula la tasa de variación media de las siguientes funciones en el intervalo que se indica:

a) $f(x) = 2 - 3x$ en $[1, 2]$

b) $f(x) = x^2 - 4$ en $[2, 3]$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ en $[2, 4]$

d) $f(x) = \sqrt{x+2}$ en $[-1, 2]$

Solución:

a) -3 b) 5 c) $-1/15$ d) 1/3

2. Aplica la definición de derivada y calcula la derivada de las siguientes funciones en los valores que se indican:

a) $f(x) = 5$ en $x = 2$

b) $f(x) = x$ en $x = 5$

c) $f(x) = 3x + 2$ en $x = 4$

d) $f(x) = 2x^2$ en $x = -1$

Solución:

a) 0 b) 1 c) 3 d) -4

3. Aplica la definición de derivada y calcula:

a) la derivada de $f(x) = x^2 - 4x$ en $x = 1$

b) la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa $x = 1$

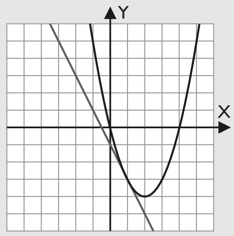
Representa la gráfica de f(x) y la recta tangente para $x = 1$

Solución:

a) -2

b) $y + 3 = -2(x - 1) \Rightarrow y = -2x - 1$

c)



4. Aplica la definición de derivada y calcula:

a) la derivada de $f(x) = \sqrt{x}$ en $x = 4$

b) la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa $x = 4$

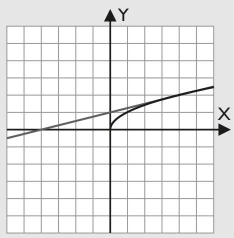
Representa la gráfica de f(x) y la recta tangente para $x = 4$

Solución:

a) 1/4

b) $y - 2 = \dfrac{1}{4}(x - 4) \Rightarrow y = \dfrac{1}{4}x + 1$

c)



5. La recta tangente a la gráfica de la función f(x) en el punto A(2, 1) pasa por el punto B(6, –1). Calcula el valor de f(2) y f'(2)

Solución:

$f(2) = 1$

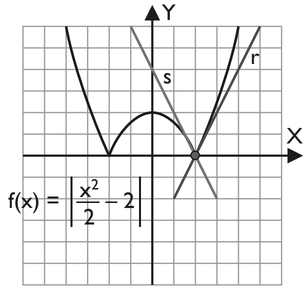
$f'(2) = \dfrac{-1-1}{6-2} = \dfrac{-2}{4} = -\dfrac{1}{2}$

2. Continuidad y derivabilidad

Piensa y calcula

a) Observando la función del margen, $f(x) = |x^2/2 - 2|$, calcula las pendientes de las rectas tangentes **r** y **s**

b) ¿Se puede dibujar una única recta tangente a la gráfica de la función f(x) en x = 2?



Solución:

a) La pendiente de **r** es 2

La pendiente de **s** es –2

b) No, hay dos.

Aplica la teoría

6. Aplica la definición de derivada y calcula la función derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 7$
b) $f(x) = x - 2$
c) $f(x) = x^2 - x$
d) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

Solución:

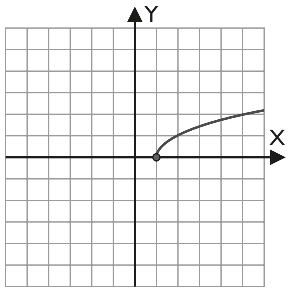
a) $f'(x) = 0$

b) $f'(x) = 1$

c) $f'(x) = 2x - 1$

d) $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

7. Dada la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x-1}$, analiza si la función es derivable en x = 1



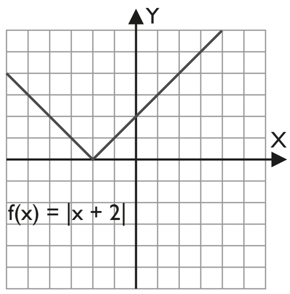
Solución:

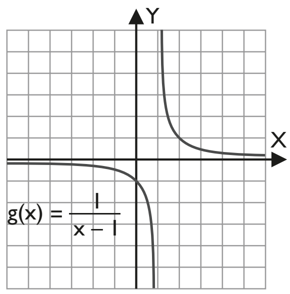
La función solo admitiría derivada por la derecha, puesto que la función no está definida para x < 1. La derivada por la derecha no existe porque, como se ve gráficamente, la tangente sería una recta vertical de ecuación x = 1. La pendiente de la recta sería +∞. Luego no existe la derivada en x = 1

8. Dadas las gráficas de las funciones siguientes, analiza si dichas funciones son derivables en los puntos que se indican:

a) $f(x) = |x + 2|$ en $x = -2$

b) $g(x) = \dfrac{1}{x-1}$ en $x = 1$





Solución:

a) La función f(x) no es derivable en x = –2, ya que tiene un pico en ese valor. Las derivadas laterales son distintas.

$f'(-2^-) = -1$ y $f'(-2^+) = 1$

Por lo tanto, no es derivable.

b) La función g(x) no es derivable en x = 1, ya que es discontinua en ese valor.

3. Reglas de derivación. Tablas de derivadas

Aplica la teoría

Deriva en función de **x:**

9. $y = x^3 - 2x + 1$

Solución:
$y' = 3x^2 - 2$

10. $y = (2x - 1)^5$

Solución:
$y' = 10(2x - 1)^4$

11. $y = \text{cotg } 3x$

Solución:
$y' = -3 \text{ cosec}^2 3x$

12. $y = \sqrt{7x + 3}$

Solución:
$y' = \dfrac{7}{2\sqrt{7x + 3}}$

13. $y = \text{arc sen } 8x$

Solución:
$y' = \dfrac{8}{\sqrt{1 - 64x^2}}$

14. $y = e^{2x}$

Solución:
$y' = 2e^{2x}$

15. $y = x \text{ tg } x$

Solución:
$y' = \text{tg } x + x \sec^2 x$

16. $y = L (x^2 + x)$

Solución:
$y' = \dfrac{2x + 1}{x^2 + x}$

17. $y = x^{\cos x}$

Solución:
$L\, y = \cos x\, L\, x$

$y' = x^{\cos x}\left(-\text{sen } x\, L\, x + \dfrac{1}{x} \cos x\right)$

18. $y = \text{sen } x^3$

Solución:
$y' = 3x^2 \cos x^3$

19. $y = 3^{5x}$

Solución:
$y' = 5 \cdot 3^{5x}\, L\, 3$

20. $y = \text{arc tg } x^2$

Solución:
$y' = \dfrac{2x}{1 + x^4}$

21. $y = \sqrt[4]{5x}$

Solución:
$y' = \dfrac{5}{4\sqrt[4]{(5x)^3}}$

22. $y = \text{tg } (x^2 + 1)$

Solución:
$y' = 2x \sec^2(x^2 + 1)$

23. $y = \dfrac{2}{(3x - 1)^4}$

Solución:
$y' = -\dfrac{24}{(3x - 1)^5}$

24. $y = \sec 5x$

Solución:
$y' = 5 \sec 5x \text{ tg } 5x$

25. $y = x^x$

Solución:
$L\, y = x\, L\, x$

$y' = x^x(1 + L\, x)$

26. $y = \text{arc cos } 3x^2$

Solución:
$y' = -\dfrac{6x}{\sqrt{1 - 9x^4}}$

27. $y = L\, \dfrac{x^2 - 2}{2x - 1}$

Solución:
$y' = \dfrac{2x^2 - 2x + 4}{2x^3 - x^2 - 4x + 2}$

28. $y = 8 \text{ sen } 5x$

Solución:
$y' = 40 \cos 5x$

29. $y = x^2 - \cos x$

Solución:
$y' = 2x + \text{sen } x$

30. $y = L (x^2 - 4)^3$

Solución:
$y' = \dfrac{6x}{x^2 - 4}$

31. $y = \log (5x + 2)$

Solución:
$y' = \dfrac{5}{5x + 2} \log e$

32. $y = \text{cosec } x^2$

Solución:
$y' = -2x \text{ cosec } x^2 \text{ cotg } x^2$

33. $y = \dfrac{5\,x}{x^2 + 1}$

Solución:
$y' = \dfrac{5 - 5x^2}{(x^2 + 1)^2}$

34. $y = \dfrac{\text{sen } x}{2x}$

Solución:
$y' = \dfrac{x \cos x - \text{sen } x}{2x^2}$

35. $x^2 + y^2 = 1$

Solución:
$2x + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = -\dfrac{x}{y}$

36. $x^2 - xy + y^2 = 4$

Solución:
$2x - y - xy' + 2yy' = 0$

$y' = \dfrac{y - 2x}{2y - x}$

37. $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

Solución:
$\dfrac{2x}{4} + \dfrac{2yy'}{9} = 0 \Rightarrow y' = -\dfrac{9x}{4y}$

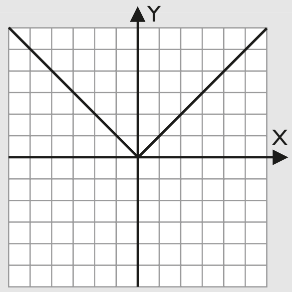
4. Problemas de derivadas

Piensa y calcula

Escribe la función valor absoluto f(x) = |x| como una función definida a trozos y represéntala.

Solución:

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$



Aplica la teoría

38. Halla la función derivada de la función siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } x \leq 2 \\ L\, x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Solución:

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 2 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

39. Dada la función $f(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } -3 \leq x \leq 3 \\ 7 - x & \text{si } 3 < x < 7 \end{cases}$

justifica si f(x) es derivable en x = 3. ¿Cuál es el significado geométrico del resultado obtenido?

Solución:

a) La continuidad de la función

$f(3) = 4$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 4 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to 3} f(x) = f(3) = 4$$

La función es continua en x = 3

b) La derivabilidad calculando las derivadas laterales

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -3 < x < 3 \\ -1 & \text{si } 3 < x < 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'(3^-) = \lim\limits_{x \to 3^-} 0 = 0 & \text{si } -3 < x < 3 \\ f'(3^+) = \lim\limits_{x \to 3^+} (-1) = -1 & \text{si } 3 < x < 7 \end{cases}$$

$f'(3^-) \neq f'(3^+) \Rightarrow$ La función no es derivable en x = 3

La función es continua y no es derivable en x = 3; la función tiene en el punto de abscisa x = 3 un pico, y en ese punto se pueden dibujar dos tangentes.

40. Dada la función $f(x) = \begin{cases} 2x + 5 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 + k & \text{si } x > 1 \end{cases}$

determina el valor de **k** para que la función sea derivable en x = 1

Solución:

a) La continuidad de la función

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (2x + 5) = 7 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (x^2 + k) = 1 + k \end{array}\right\} \Rightarrow 1 + k = 7 \Rightarrow$$

$\Rightarrow k = 6$

b) La derivabilidad calculando las derivadas laterales

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 1 \\ 2x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} 2 = 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} 2x = 2 \end{array}\right\}$$

Para k = 6, la función es continua y las derivadas laterales son iguales; luego la función es derivable en x = 1

41. Estudia la derivabilidad de la función f(x) = |x – 2| en x = 2

Solución:

$$f(x) = \begin{cases} -x + 2 & \text{si } x \leq 2 \\ x - 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 2 \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (-1) = -1 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} 1 = 1 \end{array}\right\}$$

$f'(2^-) \neq f'(2^+) \Rightarrow$ f(x) no es derivable en x = 2

Preguntas tipo test

Contesta en tu cuaderno:

1 Calcula la tasa de variación media de la función:

$$f(x) = \text{sen}\,(x)$$

en el intervalo $[0, \pi/2]$

- ☐ 1
- ☐ $\pi/2$
- ☒ $2/\pi$
- ☐ 0

2 Halla la recta tangente a la función:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

en el punto $x = -1/2$

- ☐ $y = 4x + 4$
- ☐ $y = 4x - 4$
- ☒ $y = -4x - 4$
- ☐ $y = -4x + 4$

3 Halla la derivada de la función:

$$y = e^{\cos x}$$

- ☐ $y' = \text{sen}\,x\, e^{\cos x}$
- ☐ $y' = -\cos x\, e^{\cos x}$
- ☐ $y' = \text{sen}\,x\, e^{\text{sen}\,x}$
- ☒ $y' = -\text{sen}\,x\, e^{\cos x}$

4 Halla la derivada de la función:

$$y = x^x$$

- ☒ $y' = x^x(1 + L\,x)$
- ☐ $y' = x^x(1 - L\,x)$
- ☐ $y' = x^x(-1 + L\,x)$
- ☐ $y' = x^x(-1 - L\,x)$

5 Halla los puntos de la curva de ecuación:

$$y = x^3 - 2x^2 + 1$$

donde la recta tangente es paralela a la recta:

$$y + x - 2 = 0$$

- ☒ $A(1, 0), B(1/3, 22/27)$
- ☐ $A(-1, 0), B(3, 22)$
- ☐ $A(0, 1), B(1, 3)$
- ☐ $A(-1, 0), B(-1/3, 5)$

6 Dada la función:

$$f(x) = 9x + 6x^2 - x^4$$

halla los puntos en los que la recta tangente a la gráfica de f(x) tiene pendiente 1

- ☐ $A(1, 4), B(-2, -26)$
- ☐ $A(-1, 4), B(-2, 26)$
- ☒ $A(-1, -4), B(2, 26)$
- ☐ $A(-1, 4), B(2, -26)$

7 Dadas las funciones:

$$f(x) = x^3, \qquad g(x) = \text{sen}\,x$$

calcula la derivada de $(f \circ g)(x)$

- ☐ $(f \circ g)(x) = \text{sen}^3 x, (f \circ g)'(x) = 3 \cos x$
- ☒ $(f \circ g)(x) = \text{sen}^3 x, (f \circ g)'(x) = 3\,\text{sen}^2 x \cos x$
- ☐ $(f \circ g)(x) = \text{sen}^3 x, (f \circ g)'(x) = 3 \cos^2 x \cos x$
- ☐ $(f \circ g)(x) = \text{sen}^3 x, (f \circ g)'(x) = 3 \cos^2 x\,\text{sen}\,x$

8 Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \le -\sqrt{2} \\ -x^2 + 2 & \text{si } x > -\sqrt{2} \end{cases}$$

¿Es f(x) continua en $x = -\sqrt{2}$?

¿Es f(x) derivable en $x = -\sqrt{2}$?

- ☒ es continua y no derivable.
- ☐ es continua y derivable.
- ☐ no es continua ni derivable.
- ☐ no es continua y sí es derivable.

9 Encuentra el valor de **k** para el cual la función:

$$f(x) = \begin{cases} 6 - \dfrac{x}{2}, & x < 2 \\ x^2 + kx, & x \ge 2 \end{cases}$$

es continua.

Estudia si su derivada es una función continua.

- ☐ $k = -1/2$ y la derivada es continua.
- ☐ $k = 1$ y la derivada es continua.
- ☐ $k = -2$ y la derivada es continua.
- ☒ $k = 1/2$ y la derivada no es continua.

10 La función dada por:

$$f(x) = \begin{cases} (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)e^{-x+1} & \text{si } x > 1 \\ \text{sen}\,(x - 1) & \text{si } x \le 1 \end{cases}$$

Encuentra los valores α, β y γ que hacen que f(x) sea continua y admita primera y segunda derivada en el punto $x = 1$

- ☒ $\alpha = 1, \beta = -1, \gamma = 0$
- ☐ $\alpha = -1, \beta = 1, \gamma = 2$
- ☐ $\alpha = 0, \beta = 1, \gamma = 1$
- ☐ $\alpha = 2, \beta = 0, \gamma = -1$

Ejercicios y problemas

1. La derivada

42. Calcula la tasa de variación media de las siguientes funciones en el intervalo que se indica:

a) $f(x) = -2x - 3$ en $[1, 2]$

b) $f(x) = x^2 - 2x - 3$ en $[1, 3]$

c) $f(x) = x^3 + x^2$ en $[0, 1]$

d) $f(x) = \sqrt{x - 1}$ en $[2, 5]$

Solución:

a) -2 b) 2

c) 2 d) $1/3$

43. Aplica la definición de derivada y calcula la derivada de las siguientes funciones en los valores que se indican:

a) $f(x) = 3x + 2$ en $x = -2$

b) $f(x) = x^2 + 4x + 1$ en $x = 1$

c) $f(x) = \sqrt{x + 1}$ en $x = 3$

d) $f(x) = x^3 + x$ en $x = 2$

Solución:

a) 3 b) 6

c) $1/4$ d) 13

44. Aplica la definición de derivada y calcula:

a) La derivada de $f(x) = 3/x$ en $x = 1$

b) La ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa $x = 1$

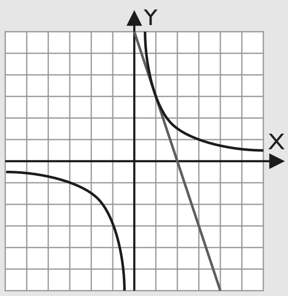
Representa la gráfica de $f(x)$ y la recta tangente para $x = 1$

Solución:

a) -3

b) $y - 3 = -3(x - 1) \Rightarrow y = -3x + 6$

c)



45. La recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto $A(-1, 5)$ pasa por el punto $B(1, -3)$. Calcula el valor de $f(-1)$ y $f'(-1)$

Solución:

$f(-1) = 5$ $f'(-1) = -4$

2. Continuidad y derivabilidad

46. Aplica la definición de derivada y calcula la función derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x + 2$

b) $f(x) = -x^2 + x$

c) $f(x) = x^3$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x + 1}$

Solución:

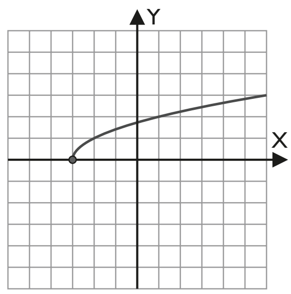
a) $f'(x) = 1$

b) $f'(x) = -2x + 1$

c) $f'(x) = 3x^2$

d) $f'(x) = -\dfrac{1}{(x + 1)^2}$

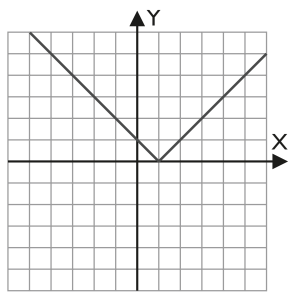
47. Dada la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x + 3}$, analiza si la función es derivable en $x = -3$



Solución:

No es derivable en $x = -3$. Tiene una recta tangente vertical de ecuación $x = -3$

48. Dada la gráfica de la función $f(x) = |x - 1|$

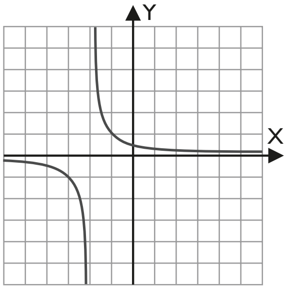


analiza si dicha función es derivable en el punto $x = 1$

Solución:

La función tiene un pico en $x = 1$. No es derivable. Sus derivadas laterales son $f'(-1^-) = -1$ y $f'(-1^+) = 1$

49. Dada la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$

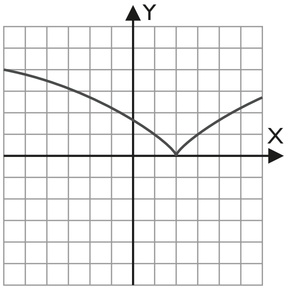


analiza si dicha función es derivable en $x = -2$

Solución:

No es derivable en $x = -2$ porque la función es discontinua en ese valor.

50. Dada la gráfica de la función $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2}$

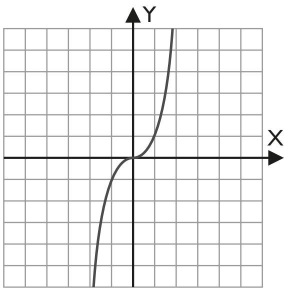


analiza si dicha función es derivable en $x = 2$

Solución:

La función tiene un pico en $x = 2$. No es derivable. Tiene una tangente vertical de ecuación $x = 2$

51. Dada la gráfica de la función $f(x) = x^3$

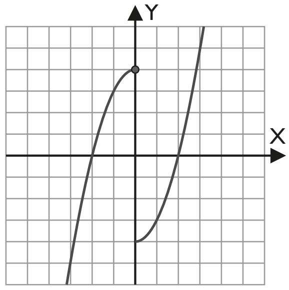


analiza si dicha función es derivable en $x = 0$

Solución:

Sí es derivable en $x = 0$. La tangente es la recta $y = 0$

52. Dada la gráfica de la función $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si } x \le 0 \\ x^2 - 4 & \text{si } x > 0 \end{cases}$



analiza si dicha función es derivable en $x = 0$

Solución:

No es derivable porque es discontinua en $x = 0$

3. Reglas de derivación. Tablas de derivadas

Halla la derivada de la función:

53. $y = (x^2 - 3)e^x$

Solución:

$y' = (x^2 + 2x - 3)e^x$

54. $y = x \operatorname{sen} x$

Solución:

$y' = \operatorname{sen} x - x \cos x$

55. $y = 7 \operatorname{tg} 3x$

Solución:

$y' = 21 \sec^2 3x$

56. $y = (2x + 3)^2$

Solución:

$y' = 4(2x + 3)$

57. $y = \sqrt{\operatorname{sen} x}$

Solución:

$y' = \dfrac{\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}}$

58. $y = e^{x^2 + 3}$

Solución:

$y' = 2xe^{x^2 + 3}$

59. $y = 3x + \sec x$

Solución:

$y' = 3 + \sec x \operatorname{tg} x$

60. $y = 2x + \sqrt{x + 1}$

Solución:

$y' = 2 + \dfrac{1}{2\sqrt{x + 1}}$

61. $y = 5 \text{ arc sen } 4x$

Solución:

$y' = \dfrac{20}{\sqrt{1 - 16x^2}}$

62. $y = L\,(3x - 2)$

Solución:

$y' = \dfrac{3}{3x - 2}$

63. $y = x^{3x}$

Solución:

$L\, y = 3x\, L\, x$

$y' = 3x^{3x}\,(L\, x + 1)$

64. $y = \text{tg}\,(x^3 + 1)$

Solución:

$y' = 3x^2 \sec^2 (x^3 + 1)$

65. $y = 2^{7x}$

Solución:

$y' = 7 \cdot 2^{7x}\, L\, 2$

66. $y = \text{arc tg } 3x^2$

Solución:

$y' = \dfrac{6x}{1 + 9x^4}$

67. $y = \sqrt[3]{x^2 + 1}$

Solución:

$y' = \dfrac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2 + 1)^2}}$

68. $y = \cos 5x^2$

Solución:

$y' = -10x \text{ sen } 5x^2$

69. $y = \dfrac{2x}{x - 1}$

Solución:

$y' = -\dfrac{2}{(x - 1)^2}$

70. $y = (\text{sen } x)^x$

Solución:

$L\, y = x\, L \text{ sen } x$

$y' = (\text{sen } x)^x(L \text{ sen } x + x \text{ cotg } x)$

71. $y = \text{arc cos } x^2$

Solución:

$y' = -\dfrac{2x}{\sqrt{1 - x^4}}$

72. $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$

Solución:

$y' = -\dfrac{2x}{(x^2 - 1)^2}$

73. $y = L\sqrt[4]{x^3 + 5x - 7}$

Solución:

$y' = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{3x^2 + 5}{x^3 + 5x - 7}$

74. $y = L \text{ sen } x$

Solución:

$y' = \text{cotg } x$

75. $y = \text{cosec}\,(5x + 2)$

Solución:

$y' = -5 \text{ cosec}\,(5x + 2) \text{ cotg}\,(5x + 2)$

76. $y = \log x^2$

Solución:

$y' = \dfrac{2}{x}$

77. $y = \dfrac{\text{tg } x}{x}$

Solución:

$y' = \dfrac{x \sec^2 x - \text{tg } x}{x^2}$

78. $y = \text{sen } x + \cos x$

Solución:

$y' = \cos x - \text{sen } x$

79. Halla la derivada de la función implícita $xy = 4$

Solución:

$y + xy' = 0$

$y' = -\dfrac{y}{x}$

80. Halla la derivada de la función implícita $x^2 - y^3 = 0$

Solución:

$2x - 3y^2y' = 0$

$y' = \dfrac{2x}{3y^2}$

81. Halla la derivada de la función implícita $x^2 - y^2 = 16$

Solución:

$2x - 2yy' = 0$

$y' = \dfrac{x}{y}$

4. Problemas de derivadas

82. Estudia la derivabilidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \le 2 \\ 4x - 5 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

en el punto $x = 2$

Solución:

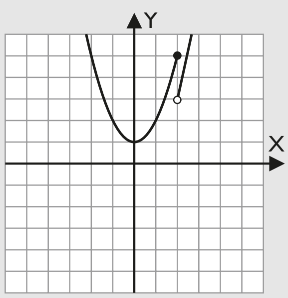
La continuidad de la función

$f(2) = 5$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (x^2 + 1) = 5 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (4x - 5) = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 2} f(x) \neq f(2)$$

La función no es es continua en $x = 2$

La función no es derivable en $x = 2$



Se observa que las tangentes por la izquierda y por la derecha tienen la misma pendiente, pero la función no es derivable.

83. Halla el valor de **a** y **b** para que la función

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x & \text{si } x \le 2 \\ x^2 - bx - 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

sea derivable en $x = 2$

Solución:

a) La continuidad de la función

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (ax^2 + 3x) = 4a + 6 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (x^2 - bx - 4) = -2b \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$4a + 6 = -2b \Rightarrow 2a + b = -3$

b) La derivabilidad calculando las derivadas laterales

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax + 3 & \text{si } x < 2 \\ 2x - b & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (2ax + 3) = 4a + 3 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (2x - b) = 4 - b \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$4a + 3 = 4 - b \Rightarrow 4a + b = 1$

Se resuelve el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 2a + b = -3 \\ 4a + b = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow a = 2, b = -7$$

84. Estudia la derivabilidad de la función $f(x) = x|x|$

Solución:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

La función es continua y derivable por estar definida por polinomios. El único punto que hay que estudiar es el correspondiente al valor de la abscisa $x = 0$

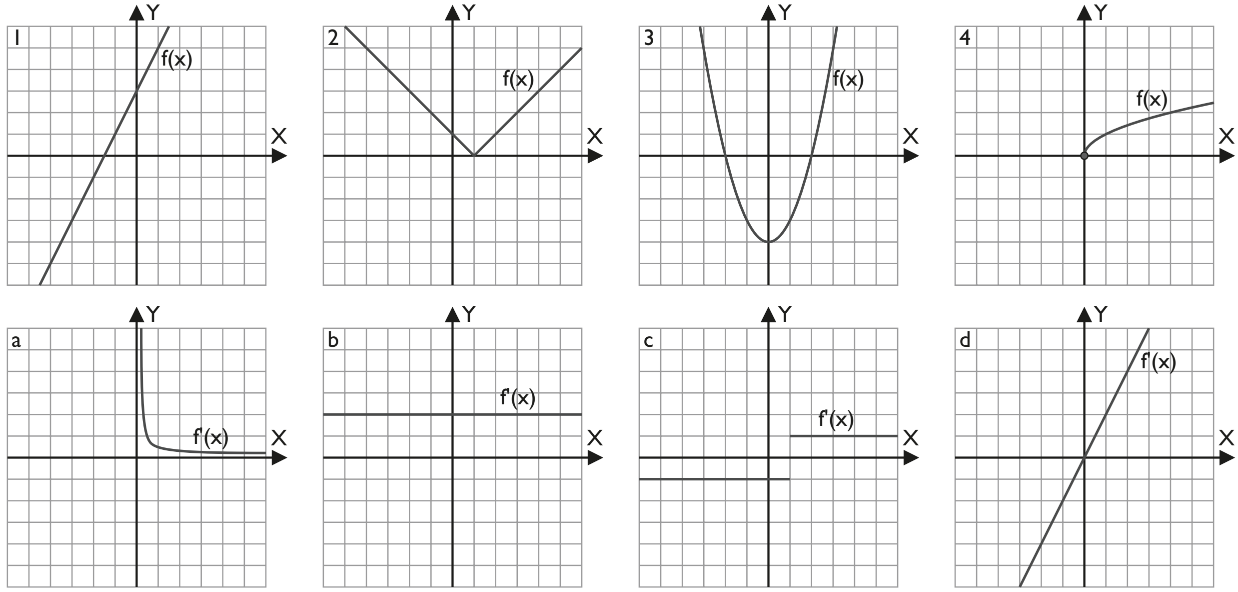
$$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (-2x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} 2x = 0 \end{array}\right\}$$

$f'(0^-) = f'(0^+) \Rightarrow$ La función es derivable en $x = 0$

Para ampliar

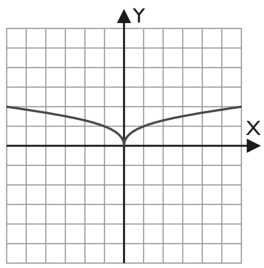
85. Asocia cada gráfica de la función f(x) con su función derivada f'(x)



Solución:

f(x)	1	2	3	4
f'(x)	b	c	d	a

86. Dada la gráfica de la función $f(x) = \sqrt[5]{x^2}$

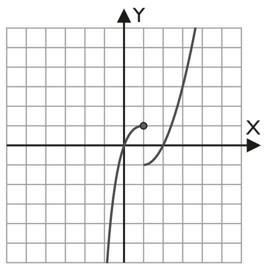


analiza si dicha función es derivable en $x = 0$

Solución:
No es derivable en $x = 0$ porque tiene una tangente vertical de ecuación $x = 0$

87. Dada la gráfica de la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si } x > 1 \\ x^3 - 3x^2 + 3x & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

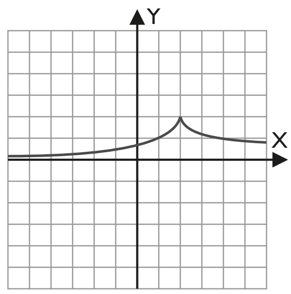


analiza si dicha función es derivable en $x = 1$

Solución:
No es derivable en $x = 1$ porque la función no es continua en ese valor.

88. Dada la gráfica de la función

$$f(x) = \begin{cases} 2^{x-1} & \text{si } x \leq 2 \\ \dfrac{4}{x} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$



analiza si dicha función es derivable en $x = 2$

Solución:
No es derivable en $x = 2$ porque la función tiene un pico. La gráfica en ese valor tiene dos tangentes distintas.

Halla las derivadas de las funciones siguientes:

89. $y = (x^2 + 1)2^x$

Solución:
$y' = 2x \cdot 2^x + (x^2 + 1)\, 2^x\, L\, 2$

90. $y = \sqrt{x}\ \text{sen}\ x$

Solución:
$y' = \dfrac{\text{sen}\ x}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}\ \cos x$

91. $y = \dfrac{2}{x^2 - 1}$

Solución:
$y' = -\dfrac{4x}{(x^2 - 1)^2}$

92. $y = \dfrac{x^2}{\text{sen}\ x}$

Solución:
$y' = \dfrac{2x\ \text{sen}\ x - x^2 \cos x}{\text{sen}^2 x}$

93. $y = x \cos x$

Solución:
$y' = \cos x - x\ \text{sen}\ x$

94. $y = (x + 2)e^x$

Solución:
$y' = (x + 3)\, e^x$

95. $y = \sqrt{1 - x^2}$

Solución:
$y' = -\dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$

96. $y = \dfrac{1}{2}x - \text{tg}\ x$

Solución:
$y' = \dfrac{1}{2} - \sec^2 x$

97. $y = \dfrac{1 + \text{sen}\ x}{1 - \text{sen}\ x}$

Solución:
$y' = \dfrac{2 \cos x}{(1 - \text{sen}\ x)^2}$

98. $y = (\text{sen}\ x)^{\cos x}$

Solución:
$L\, y = \cos x\ L\ \text{sen}\ x$
$y' = (\text{sen}\ x)^{\cos x}\, (-\text{sen}\ x\ L\ \text{sen}\ x + \cos x\ \text{cotg}\ x)$

99. $y = \dfrac{x + 3}{x - 2}$

Solución:
$y' = -\dfrac{5}{(x - 2)^2}$

100. $y = \text{arc} \cos x^2$

Solución:
$y' = -\dfrac{2x}{\sqrt{1 - x^4}}$

101. $y = \dfrac{\sec x}{x}$

Solución:
$y' = \dfrac{x \sec x\ \text{tg}\ x - \sec x}{x^2}$

102. $y = \sqrt{x + \text{sen}\ x}$

Solución:
$y' = \dfrac{1 + \cos x}{2\sqrt{x + \text{sen}\ x}}$

103. $y = \dfrac{9}{x^2 - 3}$

Solución:
$y' = -\dfrac{18x}{(x^2 - 3)^2}$

104. $y = \text{sen}\ x\ \text{tg}\ x$

Solución:
$y' = \cos x\ \text{tg}\ x + \text{tg}\ x \sec x = \text{tg}\ x\, (\cos x + \sec x)$

105. $y = x^{L\,x}$

Solución:
$L\, y = L\, x\ L\, x \Rightarrow L\, y = (L\, x)^2$
$y' = \dfrac{L\, x}{x}\, 2x^{Lx}$

106. $y = L\, (\cos x)^2$

Solución:
$y' = -2\ \text{tg}\ x$

107. $y = \text{arc sen } \frac{x^2}{5}$

Solución:

$y' = \frac{2x}{\sqrt{25 - x^4}}$

108. $y = \sqrt{\frac{x + 3}{x - 3}}$

Solución:

$y' = \frac{\frac{-6}{(x-3)^2}}{2\sqrt{\frac{x+3}{x-3}}} = -\frac{3\sqrt{x-3}}{(x-3)^2\sqrt{x+3}}$

109. $y = \left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^3$

Solución:

$y' = 3\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^2 \left(2x - \frac{1}{x^2}\right)$

110. $y = \frac{\sec^5 x}{5} - \frac{\sec^3 x}{3}$

Solución:

$y' = \text{tg } x\,(\sec^5 x - \sec^3 x)$

111. $y = \text{arc tg } \frac{x}{2}$

Solución:

$y' = \frac{2}{4 + x^2}$

112. $y = \text{sen } 2x \cos 2x$

Solución:

$y' = 2(\cos^2 2x - \text{sen}^2\, 2x) = 2 \cos 4x$

113. $y = 2^{\text{sen } x}$

Solución:

$y' = \cos x\, 2^{\text{sen } x}\, L\, 2$

114. $y = L\sqrt{\frac{x + 1}{x - 1}}$

Solución:

$y = \frac{1}{2}\left[L(x + 1) - L(x - 1)\right]$

$y' = -\frac{1}{x^2 - 1}$

115. $y = 2 \text{ cotg}^2 (\pi x + 2)$

Solución:

$y' = -4\pi \text{ cotg } (\pi x + 2) \text{ cosec}^2 (\pi x + 2)$

116. $y = L\,(L\,x^2)$

Solución:

$y' = \frac{2}{x\, L\, x^2}$

117. $y = e^{5x}$

Solución:

$y' = 5e^{5x}$

118. $y = \sec^2 2x$

Solución:

$y' = 4 \sec^2 2x \text{ tg } 2x$

119. $y = \sec^2 x^2$

Solución:

$y' = 4x \sec^2 x^2 \text{ tg } x^2$

120. $y = \log \sqrt{x + 1}$

Solución:

$y = \frac{1}{2}\log(x + 1)$

$y' = \frac{1}{2(x + 1)} \log e$

121. $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

Solución:

$y' = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

122. $y = L\, e^x$

Solución:

$y = x$

$y' = 1$

123. $y = \log \frac{x^2}{x - 1}$

Solución:

$y = 2\log x - \log (x - 1)$

$y' = \frac{x - 2}{x(x - 1)} \log e$

124. $y = x^2e^x + 2x$

Solución:

$y' = e^x(x^2 + 2x) + 2$

125. $y = (\text{arc sen } x)^x$

Solución:

$L\, y = x\, L \text{ arc sen } x$

$$y' = (\text{arc sen } x)^x \left(L \text{ arc sen } x + \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}\ \text{arc sen } x}\right)$$

126. $y = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$

Solución:

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

127. $y = 5x \cos x$

Solución:

$y' = 5(\cos x - x \text{ sen } x)$

128. $y = (x + 1) \text{ tg } x$

Solución:

$y' = \text{tg } x + (x + 1) \sec^2 x$

129. $y = 2^x\, L\, x$

Solución:

$$y' = 2^x\left(L\, 2\, L\, x + \frac{1}{x}\right)$$

130. $y = \dfrac{\text{tg } x}{\cos x}$

Solución:

$$y = \frac{\text{sen } x}{\cos^2 x}$$

$$y' = \frac{\cos^2 x + 2 \text{ sen}^2 x}{\cos^3 x}$$

131. $y = \dfrac{x^2}{L\, x}$

Solución:

$$y' = \frac{x(2\, L\, x - 1)}{L^2\, x}$$

132. $y = x \text{ arc sen } x$

Solución:

$$y' = \text{arc sen } x + \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

133. $y = \dfrac{\text{sen } x + \cos x}{\cos x - \text{sen } x}$

Solución:

$$y' = \frac{2}{(\cos x - \text{sen } x)^2}$$

134. $y = \dfrac{\text{arc cos } x}{\text{arc sen } x}$

Solución:

$$y' = -\frac{\text{arc sen } x + \text{arc cos } x}{\sqrt{1 - x^2}\ (\text{arc sen } x)^2}$$

135. $y = \text{arc cos } e^x$

Solución:

$$y' = -\frac{e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}}$$

136. $y = \sqrt{\text{cotg } x}$

Solución:

$$y' = -\frac{\text{cosec}^2 x}{2\sqrt{\text{cotg } x}}$$

137. $y = L^2 (\text{sen } x)$

Solución:

$y' = 2\, L(\text{sen } x) \text{ cotg } x$

138. $y = \text{arc tg } L\, x$

Solución:

$$y' = \frac{1}{x(1 + L^2\, x)}$$

139. $y = \text{arc tg } L \dfrac{1}{x}$

Solución:

$y = \text{arc tg } (L\, 1 - L\, x) = \text{arc tg } (-L\, x)$

$$y' = -\frac{1}{x(1 + L^2\, x)}$$

140. $y = e^{\sec x}$

Solución:

$y' = e^{\sec x} \sec x \text{ tg } x$

141. $y = L\cos\frac{1}{x}$

Solución:

$$y' = \frac{\frac{1}{x^2}\,\text{sen}\,\frac{1}{x}}{\cos\frac{1}{x}} = \frac{1}{x^2}\,\text{tg}\,\frac{1}{x}$$

142. Halla la derivada de la siguiente función implícita:

$$3x - 2y = 4$$

Solución:

$3 - 2yy' = 0$

$y' = \dfrac{3}{2y}$

143. Halla la derivada de la siguiente función implícita:

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$$

Solución:

$2(x - 1) + 2(y - 2)y' = 0$

$y' = -\dfrac{(x - 1)}{(y - 2)}$

144. Halla la derivada de la siguiente función implícita:

$$x^2y + xy^2 = 2$$

Solución:

$2xy + x^2y' + y^2 + 2xyy' = 0$

$(x^2 + 2xy)y' = -2xy - y^2$

$y' = -\dfrac{2xy + y^2}{x^2 + 2xy}$

145. Halla la recta tangente a la curva $x^2 + y^2 - 4xy = 1$ en el punto A(1, 4)

Solución:

$2x + 2yy' - 4y - 4xy' = 0$

$x + yy' - 2y - 2xy' = 0$

$(y - 2x)y' = 2y - x$

$y' = \dfrac{2y - x}{y - 2x}$

Para el punto $(1, 4) \Rightarrow y' = \dfrac{7}{2}$

$y - 4 = \dfrac{7}{2}(x - 1) \Rightarrow 7x - 2y + 1 = 0$

146. Halla las tres primeras derivadas de la función:

$$y = x^3 + 3x$$

Solución:

$y' = 3x^2 + 3$ $\qquad$ $y'' = 6x$

$y''' = 6$

147. Dada la función $y = x^3 - 3x^2$

a) halla las tres primeras derivadas.

b) halla los puntos de la gráfica en los que la tangente sea horizontal.

Solución:

a) $y' = 3x^2 - 6x$

$y'' = 6x - 6$

$y''' = 6$

b) Si la tangente es horizontal, la pendiente es cero.

$y' = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$

Si $x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow O(0, 0)$

Si $x = 2 \Rightarrow y = -4 \Rightarrow A(2, -4)$

148. Dada la función $y = x^3 - 6x^2 + 9x$

a) halla las tres primeras derivadas.

b) halla los puntos de la gráfica en los que la tangente sea horizontal.

Solución:

a) $y' = 3x^2 - 12x + 9$

$y'' = 6x - 12$

$y''' = 6$

b) Si la tangente es horizontal, la pendiente es cero.

$y' = 0 \Rightarrow x = 1, x = 3$

Si $x = 1 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow A(1, 4)$

Si $x = 3 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow B(3, 0)$

149. Halla las tres primeras derivadas de la función:

$$y = x^3 + 3x^2 + x - 3$$

Solución:

$y' = 3x^2 + 6x + 1$

$y'' = 6x + 6$

$y''' = 6$

150. Halla las tres primeras derivadas de la función:

$$y = x^3 + x^2$$

Solución:

$y' = 3x^2 + 2x$

$y'' = 6x + 2$

$y''' = 6$

151. Dada la función $y = \dfrac{x^2 + 1}{x}$

a) halla las tres primeras derivadas de la función.

b) halla los puntos en los que la recta tangente es horizontal.

Solución:

a) $y' = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$

$y'' = \dfrac{2}{x^3}$

$y''' = -\dfrac{6}{x^4}$

b) Si la tangente es horizontal, la pendiente es cero.

$y' = 0 \Rightarrow x = -1, x = 1$

Si $x = -1 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow A(-1, -2)$

Si $x = 1 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow B(1, 2)$

152. Halla las tres primeras derivadas de la función:

$$y = \frac{4x}{x^2 + 1}$$

Solución:

$y' = \dfrac{-4x^2 + 4}{(x^2 + 1)^2}$ $\qquad$ $y'' = \dfrac{8x^3 - 24x}{(x^2 + 1)^3}$

$y''' = \dfrac{-24x^4 + 144x^3 - 24}{(x^2 + 1)^4}$

153. Dada la función $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

a) halla las tres primeras derivadas.

b) analiza si puede haber algún punto de la gráfica que tenga tangente horizontal.

Solución:

a) $y' = \dfrac{-x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2}$

$y'' = \dfrac{2x^3 + 6x}{(x^2 - 1)^3}$

$y''' = \dfrac{-6x^4 - 36x^2 - 6}{(x^2 - 1)^4}$

b) Si la recta tangente es horizontal, la pendiente es cero.

$y' \neq 0$ para todo valor de **x**

No hay ningún punto de la gráfica que tenga recta tangente horizontal.

154. Halla las tres primeras derivadas de la función:

$$y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

Solución:

$y' = -\dfrac{4x}{(x^2 - 1)^2}$ $\qquad$ $y'' = \dfrac{12x^2 + 4}{(x^2 - 1)^3}$

$y''' = \dfrac{-48x^3 - 48x}{(x^2 - 1)^4}$

155. Halla las tres primeras derivadas de la función:

$$y = \frac{5}{x^2 + 1}$$

Solución:

$y' = -\dfrac{10x}{(x^2 + 1)^2}$

$y'' = \dfrac{30x^2 - 10x}{(x^2 + 1)^3}$

$y''' = \dfrac{-120x^3 + 120x}{(x^2 + 1)^4}$

156. Dada la función $y = xe^x$

a) halla las tres primeras derivadas.

b) halla los puntos de la gráfica en los que la tangente es horizontal.

Solución:

a) $y' = (x + 1)e^x$

$y'' = (x + 2)e^x$

$y''' = (x + 3)e^x$

b) Si la tangente es horizontal, la pendiente es cero.

$y' = 0 \Rightarrow x = -1$

Si $x = -1, y = -1/e \Rightarrow A(-1, -1/e)$

157. Halla las tres primeras derivadas de la siguiente función: $y = x^2e^x$

Solución:

$y' = (x^2 + 2x)e^x$

$y'' = (x^2 + 4x + 2)e^x$

$y''' = (x^2 + 6x + 6)e^x$

158. Halla las tres primeras derivadas de la siguiente función: $y = x\,L\,x$

Solución:

$y' = 1 + L\,x$ $\qquad$ $y'' = \dfrac{1}{x}$ $\qquad$ $y''' = -\dfrac{1}{x^2}$

159. Dada la función $y = L\,x^2$

a) halla las tres primeras derivadas.

b) analiza si hay algún punto de la gráfica con tangente horizontal.

Solución:

a) $y' = \dfrac{2}{x}$ $\qquad$ $y'' = -\dfrac{2}{x^2}$ $\qquad$ $y''' = \dfrac{4}{x^3}$

b) No hay ningún punto con tangente horizontal porque $y' \neq 0$ para todo valor de **x**

160. Dada la función $y = L(x^2 + 1)$

a) halla las tres primeras derivadas.

b) analiza si hay algún punto de la gráfica con tangente horizontal.

Solución:

a) $y' = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$ $\qquad y'' = \dfrac{2(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2}$

$y''' = \dfrac{4x(x^2 - 3)}{(x^2 + 1)^3}$

b) Si la tangente es horizontal, la pendiente es cero.

$y' = 0 \Rightarrow x = 0$

Si $x = 0, y = 0 \Rightarrow O(0, 0)$

161. Dada la función $y = \dfrac{L\,x}{x}$

a) halla las tres primeras derivadas.

b) analiza si hay algún punto de la gráfica con tangente horizontal.

Solución:

a) $y' = \dfrac{1 - L\,x}{x^2}$ $\qquad y'' = \dfrac{2\,L\,x - 3}{x^3}$

$y''' = \dfrac{11 - 6\,L\,x}{x^4}$

b) Si la tangente es horizontal, la pendiente es cero.

$y' = 0 \Rightarrow x = e$

Si $x = e, y = 1/e \Rightarrow A(e, 1/e)$

Problemas

162. Halla las rectas tangentes horizontales a la gráfica de la función $y = x^3 - 27x$

Solución:

$y' = 3x^2 - 27$

$y' = 0 \Rightarrow x = -3, x = 3$

Si $x = -3, y = 54 \Rightarrow A(-3, 54)$

Si $x = 3, y = -54 \Rightarrow A(3, -54)$

Recta tangente en A: $y = 54$

Recta tangente en B: $y = -54$

163. Determina los puntos donde la gráfica de la función $f(x) = x + \operatorname{sen} x$ tiene una tangente horizontal en el intervalo $[0, 2\pi]$

Solución:

$y' = 1 + \cos x$

$y' = 0 \Rightarrow x = \pi$

Si $x = \pi, y = \pi \Rightarrow A(\pi, \pi)$

164. Encuentra el valor de **k** tal que la recta $y = 4x - 9$ sea tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2 - kx$

Solución:

Sea el punto A(x, y) el punto de tangencia. Se tiene:

$y' = 4$

$f'(x) = 2x - k$

$2x - k = 4 \qquad (1)$

El punto A es común a la tangente y a la curva:

$4x - 9 = x^2 - kx \qquad (2)$

Resolviendo el sistema de (1) y (2):

$x = 3, k = 2$

$x = -3, k = -10$

165. Estudia la derivabilidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} (x - 1)^3 & \text{si } x \le 1 \\ (x - 1)^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

en el punto $x = 1$

Solución:

Se estudia el punto $x = 1$

a) La continuidad de la función

$f(1) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (x - 1)^3 = 0 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (x - 1)^2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$$

La función es continua en $x = 1$

b) La derivabilidad calculando las derivadas laterales

$$f'(x) = \begin{cases} 3(x - 1)^2 & \text{si } x < 1 \\ 2(x - 1) & \text{si } x > 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} 3(x - 1)^2 = 0 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} 2(x - 1) = 0 \end{array}\right\}$$

$f'(1^-) = f'(1^+) \Rightarrow$ La función es derivable en $x = 1$

166. Determina los valores de **a** y **b** para que la función

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{si } x \le 1 \\ x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

sea continua y derivable en $x = 1$

Solución:

a) La continuidad de la función $f(1) = a + b$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (ax + b) = a + b \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} x^2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow a + b = 1$$

b) La derivabilidad calculando las derivadas laterales

$$f'(x) = \begin{cases} a & \text{si } x < 1 \\ 2x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} a = a \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} 2x = 2 \end{array}\right\} a = 2$$

Resolviendo el sistema:

$a = 2, b = -1$

167. Determina el valor de **a** para que la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si } x \geq 3 \\ 2x + a & \text{si } x < 3 \end{cases}$$

sea derivable en $x = 3$

Solución:

a) La continuidad de la función

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} (2x + a) = 6 + a \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} (x^2 - 2x) = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$6 + a = 3 \Rightarrow a = -3$

b) La derivabilidad calculando las derivadas laterales

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 2 & \text{si } x > 3 \\ 2 & \text{si } x < 3 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} 2 = 2 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} (2x - 2) = 4 \end{array}\right\}$$

$f'(3^-) \neq f'(3^+) \Rightarrow$ La función no es derivable en $x = 3$ para ningún valor de **a**

168. Estudia la derivabilidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} (2 - x)^3 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

en el punto $x = 1$

Solución:

Se estudia el punto $x = 1$

a) La continuidad de la función

$f(1) = 1$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (2 - x)^3 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} x^2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$$

La función es continua en $x = 1$

b) La derivabilidad calculando las derivadas laterales

$$f'(x) = \begin{cases} -3(2 - x)^2 & \text{si } x < 1 \\ 2x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} -3(2 - x)^2 = -3 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} 2x = 2 \end{array}\right\}$$

$f'(1^-) \neq f'(1^+) \Rightarrow$ La función no es derivable en $x = 1$

169. Halla los valores de **a** y **b** para que la función

$$f(x) = \begin{cases} ax + 5 & \text{si } x \leq 1 \\ a\sqrt{x} + \dfrac{b}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

sea derivable en $x = 1$

Solución:

a) La continuidad de la función

$f(1) = a + 5$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (ax + 5) = a + 5 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \left(a\sqrt{x} + \dfrac{b}{x}\right) = a + b \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$a + 5 = a + b \Rightarrow b = 5$

b) La derivabilidad calculando las derivadas laterales

$$f'(x) = \begin{cases} a & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{a}{2\sqrt{x}} - \dfrac{b}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} a = a \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \left(\dfrac{a}{2\sqrt{x}} - \dfrac{b}{x^2}\right) = \dfrac{a}{2} - b \end{array}\right\}$$

$a = \dfrac{a}{2} - b \Rightarrow a = -2b$

Resolviendo el sistema:

$a = -10, b = 5$

170. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x|x| & \text{si } x \leq 1 \\ x & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 4 - x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

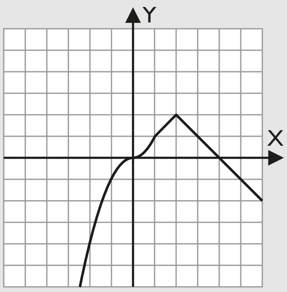
halla los puntos en los que $f(x)$ es derivable.

Solución:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ x & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 4 - x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

La función es continua y derivable por estar definida por polinomios. Los valores que hay que estudiar son $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$

En una función con tantos trozos la mejor estrategia es hacer la representación gráfica:



Se estudian los puntos de enlace

a) La continuidad de la función

La función es continua en todos los puntos de enlace.

b) La derivabilidad calculando las derivadas laterales

$f'(0^-) = 0 = f'(0^+) \Rightarrow$ La función es derivable en $x = 0$

$f'(1^-) = 2 \neq f'(1^+) = 1 \Rightarrow$ La función no es derivable en $x = 1$

$f'(2^-) = 1 \neq f'(2^+) = -1 \Rightarrow$ La función no es derivable en $x = 2$

171. Halla el valor de **a** para que la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + a - 1 & \text{si } x \leq 2 \\ L\,(x - 1) & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

sea continua y estudia si para dicho valor es derivable.

Solución:

La función está definida por dos funciones que son continuas y derivables en sus dominios. Se tiene que estudiar el valor $x = 2$

a) La continuidad de la función

$f(2) = 3a + 3$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (x^2 + ax + a - 1) = 3a + 3 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} L(x - 1) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$3a + 3 = 0 \Rightarrow a = -1$

Para $a = -1$, la función es continua en $x = 2$

b) La derivabilidad calculando las derivadas laterales

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{si } x < 2 \\ \dfrac{1}{x - 1} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (2x + a) = 4 + a \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{1}{x - 1} = 1 \end{array}\right\}$$

Para $a = -1$ se tiene

$f'(2^-) = 3$

$f'(2^+) = 1$

La función no es derivable en $x = 2$

172. Determina el valor de **a** y **b** para que la función

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 1 & \text{si } x < 1 \\ ax + b & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

sea derivable en $x = 1$

Solución:

a) La continuidad de la función

$f(1) = a + b$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (x^3 - 1) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (ax + b) = a + b \end{array}\right\} \Rightarrow a + b = 0$$

b) La derivabilidad calculando las derivadas laterales

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{si } x < 1 \\ a & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} 3x^2 = 3 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} a = a \end{array}\right\} \Rightarrow a = 3$$

Resolviendo el sistema:

$a = 3, b = -3$

173. Determina el valor de **a** y **b** para que la función

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{si } x < 0 \\ a \cos x + b \,\text{sen}\, x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

sea derivable en $x = 0$

Solución:

a) La continuidad de la función

$f(0) = a$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (ax + b) = b \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (a \cos x + b \,\text{sen}\, x) = a \end{array}\right\} \Rightarrow a = b$$

b) La derivabilidad calculando las derivadas laterales

$$f'(x) = \begin{cases} a & \text{si } x < 0 \\ -a \,\text{sen}\, x + b \cos x & \text{si } x > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} a = a \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (-a \,\text{sen}\, x + b \cos x) = b \end{array}\right\} a = b$$

Resolviendo el sistema:

La función es continua y derivable siempre que $a = b$

174. Determina el valor de **a** y **b** para que la función

$$f(x) = \begin{cases} (x + a)e^{-bx} & \text{si } x < 0 \\ ax^2 + bx + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

sea derivable en $x = 0$

Solución:

a) La continuidad de la función

$f(0) = 1$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (x+a)e^{-bx} = a \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (ax^2+bx+1) = 1\end{array}\right\} \Rightarrow a = 1$$

b) La derivabilidad calculando las derivadas laterales

$$f'(x) = f(x) = \begin{cases} e^{-bx} - b(x+a)e^{-bx} & \text{si } x < 0 \\ 2ax + b & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} e^{-bx} - b(x+a)e^{-bx} = 1 - ab \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (2ax+b) = b\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$1 - ab = b$

Resolviendo el sistema:

$a = 1, b = 1/2$

175. Estudia la derivabilidad de $f(x) = |x^3(x-1)|$

Solución:

Se escribe la función a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} x^4 - x^3 & \text{si } x \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty) \\ -x^4 + x^3 & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}$$

La función queda definida por dos polinomios que son continuos y derivables. Los valores que hay que estudiar son $x = 0$ y $x = 1$

En $x = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^-}(x^4 - x^3) = \lim\limits_{x\to 0^+}(-x^4 + x^3) = 0 = f(0) \Rightarrow$

$f(x)$ es continua en $x = 0$

$$f'(x) = \begin{cases} 4x^3 - 3x^2 & \text{si} \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty) \\ -4x^3 + 3x^2 & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}$$

$f'(0^-) = f'(0^+) = 0 \Rightarrow f(x)$ derivable en $x = 0$

En $x = 1$

$\lim\limits_{x\to 1^-}(-x^4 + x^3) = \lim\limits_{x\to 1^+}(x^4 - x^3) = 0 = f(1) \Rightarrow$

$f(x)$ es continua en $x = 1$

$f'(1^-) = -1 \neq f'(1^+) = 1 \Rightarrow f(x)$ no es derivable en $x = 1$

176. Estudia la derivabilidad de $f(x) = x|x-1|$

Solución:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + x & \text{si } x < 1 \\ x^2 - x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

La función queda definida por dos polinomios que son continuos y derivables. El valor que hay que estudiar es $x = 1$

a) La continuidad de la función

$f(1) = 0$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (-x^2+x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (x^2-x) = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$$

$f(x)$ es continua en $x = 1$

b) La derivabilidad calculando las derivadas laterales

$$f'(x) = \begin{cases} -2x + 1 & \text{si } x < 1 \\ 2x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (-2x+1) = -1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (2x-1) = 1\end{array}\right\}$$

$f'(1^-) = -1 \neq f'(1^+) = 1 \Rightarrow f(x)$ no es derivable en $x = 1$

177. Estudia la derivabilidad de $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$

Solución:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1-x} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x}{1+x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

La función está definida por dos funciones racionales que son continuas y derivables en su dominio. El valor que hay que estudiar es $x = 0$

a) La continuidad de la función

$f(0) = 0$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x}{1-x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{1+x} = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$$

La función es continua en $x = 0$

b) La derivabilidad calculando las derivadas laterales

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1-x)^2} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{(1+x)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{(1-x)^2} = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{(1+x)^2} = 1\end{array}\right\}$$

$f'(0^-) = f'(0^+) = 1 \Rightarrow f(x)$ es derivable en $x = 1$

178. Se sabe que una población de 400 bacterias de un cultivo varía según la función

$$f(x) = 400\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}$$

donde **x** se mide en minutos. ¿Qué velocidad de crecimiento instantáneo tendrá la población en t = 3 minutos?

Solución:

El crecimiento instantáneo es la derivada de la función

$f'(x) = 400 \dfrac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$

$f'(3) = -32$

El signo menos indica que están disminuyendo las bacterias.

Para profundizar

179. Halla la ecuación de la parábola $y = ax^2 + bx + c$, que pasa por el punto A(0, 1) y es tangente a la recta $y = x - 1$ en el punto B(1, 0)

Solución:

a) Si pasa por A(0, 1)

$c = 1$

b) Si es tangente a la recta $y = x - 1$ en B(1, 0), la derivada de la parábola en x = 1 es la pendiente de la recta tangente.

$2a + b = 1$

c) Como pasa por B(1, 0)

$a + b + c = 0$

Resolviendo el sistema de ecuaciones:

$a = 2, b = -3, c = 1$

180. Sea una función $f(x) = x \cdot g(x)$, donde g(x) es una función continua en x = 0 pero no derivable. ¿Cuánto vale f'(0)?

Solución:

Para calcular f'(0) hay que demostrar que f(x) es derivable en x = 0 y hallar su valor.

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \lim_{x \to 0} \frac{h\,g(h) - 0}{h} =$$

$$= \lim_{x \to 0} g(h) = g(0)$$

Luego f'(0) = g(0)

181. Dadas $f(x) = x^2 + \pi$ y $g(x) = \text{sen } x + \cos x$, calcula la derivada en x = 0 de f(g(x)) y g(f(x))

Solución:

$f(g(x)) = g(x)^2 + \pi$

$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x) = 2g(x) \cdot g'(x) =$

$= 2(\text{sen } x + \cos x) \cdot (\cos x - \text{sen } x) = 2 \cos 2x$

En x = 0

$[f(g(0))]' = 2 \cos 0 = 2$

$g(f(x)) = \text{sen } f(x) + \cos f(x)$

$[g(f(x))]' = g'(f(x)) \cdot f'(x) =$

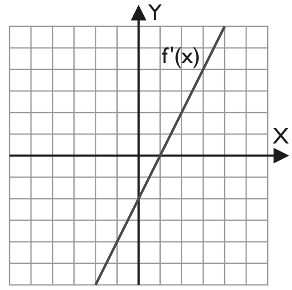
$= f'(x) \cos f(x) - f'(x) \text{ sen } f(x) =$

$= 2x \cos(x^2 + \pi) - 2x \text{ sen } (x^2 + \pi) =$

$= 2x(-\cos x^2 + \text{sen } x^2)$

$[g(f(0))]' = 0$

182. La siguiente gráfica corresponde a la función derivada de la función f(x)



a) ¿Existe algún punto de tangente horizontal en la gráfica de f(x)?

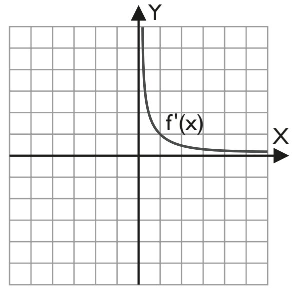
b) ¿Puede ser la derivada de una función polinómica? ¿De qué grado?

Solución:

a) En x = 1 la derivada se hace cero y, por lo tanto, la pendiente de la recta tangente es cero. La tangente es horizontal.

b) Si la derivada es un polinomio de primer grado, la función es un polinomio de segundo grado.

183. La siguiente gráfica corresponde a la función derivada de la función f(x)



a) ¿Existe algún punto de tangente horizontal en la gráfica de f(x)?

b) Escribe la ecuación de la gráfica de f'(x)

c) Da una función cuya derivada sea la de la gráfica.

Solución:

a) No, porque f'(x) no corta al eje X

b) $f'(x) = 1/x$

c) $f(x) = L\,x$

184. Calcula las tres primeras derivadas de las siguientes funciones y encuentra la expresión de la derivada enésima.

a) $y = e^{2x}$ b) $y = \dfrac{1}{x}$

Solución:

a) $y' = 2e^{2x}$

$y'' = 4e^{2x}$

$y''' = 8e^{2x}$

…

$y^n = 2^n e^{2x}$

b) $y' = -\dfrac{1}{x^2}$

$y'' = \dfrac{2}{x^3}$

$y''' = -\dfrac{6}{x^4}$

…

$y^n = (-1)^n \dfrac{n!}{x^{n+1}}$

Paso a paso

185. Halla la derivada de la función:

$$f(x) = L\sqrt[3]{x^2 + 4}$$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

186. Halla la recta tangente a la curva:

$$f(x) = x^2 - 4x + 5 \text{ en } x = 3$$

Representa la función y la recta tangente.

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

187. Estudia la derivabilidad de la función para $x = 2$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \le 2 \\ -x^2 + 2x + 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Representa la función y la recta o rectas tangentes para $x = 2$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

188. Calcula el valor de los parámetros **a** y **b** para que la función

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx - 1 & \text{si } x \le 1 \\ 2bx - 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

sea derivable en $x = 1$. Representa la función y la recta tangente para $x = 1$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

189. **Internet.** Abre: **www.editorial-bruno.es** y elige **Matemáticas, curso** y **tema.**

Practica

Halla las derivadas de las siguientes funciones:

190. $f(x) = e^{\cos x}$

Solución:

Ejercicio 190

$f(x) = e^{\cos x} \Rightarrow x \mapsto e^{\cos(x)}$

$f'(x) \Rightarrow -\text{sen}(x) \cdot e^{\cos(x)}$

191. $f(x) = L\,\dfrac{x^2 - 2}{2x - 1}$

Solución:

Ejercicio 191

$f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2 - 2}{2x - 1}\right) \Rightarrow x \mapsto \ln\left(\dfrac{x^2-2}{2 \cdot x - 1}\right)$

$f'(x) \Rightarrow \dfrac{2 \cdot x^2 - 2 \cdot x + 4}{2 \cdot x^3 - x^2 - 4 \cdot x + 2}$

192. $f(x) = x^{\text{sen}\, x}$

Solución:

Ejercicio 192

$f(x) = x^{\text{sen}\, x} \Rightarrow x \mapsto x^{\text{sen}(x)}$

$f'(x) \Rightarrow \left(\cos(x) \cdot \ln(x) + \dfrac{\text{sen}(x)}{x}\right) \cdot x^{\text{sen}(x)}$

193. $f(x) = L\,(x^2 - 4)$

Solución:

Ejercicio 193

$f(x) = \ln(x^2 - 4) \Rightarrow x \mapsto \ln(x^2 - 4)$

$f'(x) \Rightarrow \dfrac{2 \cdot x}{x^2 - 4}$

194. $f(x) = \dfrac{5x}{x^2 + 1}$

Solución:

Ejercicio 194

$f(x) = \dfrac{5x}{x^2+1} \;\rightarrow\; x \mapsto \dfrac{5 \cdot x}{x^2+1}$

$f'(x) \;\rightarrow\; \dfrac{-5 \cdot x^2 + 5}{x^4 + 2 \cdot x^2 + 1}$

195. Halla la recta tangente a la curva:

$$f(x) = x^2 - 5 \text{ en } x = 2$$

Representa la función y la recta tangente.

Solución:

Ejercicio 195

$a = 2 \;\rightarrow\; 2$

$f(x) = x^2 - 5 \;\rightarrow\; x \mapsto x^2 - 5$

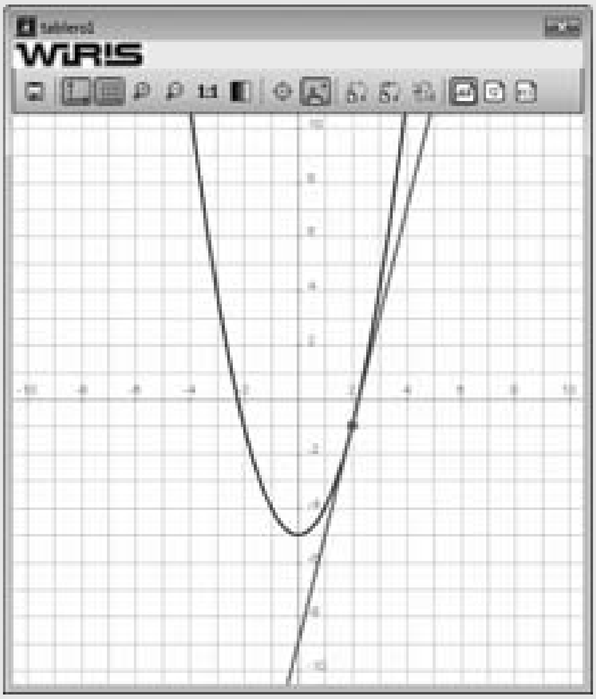
$P = \text{punto}(a, f(a)) \;\rightarrow\; (2, -1)$

dibujar(P, {color = rojo, tamaño_punto = 8})

$t(x) = f'(a) \cdot (x - a) + f(a) \;\rightarrow\; x \mapsto 4 \cdot x - 9$

dibujar(f(x), {color = azul, anchura_linea = 2})

dibujar(t(x), {color = rojo, anchura_linea = 2})



196. Estudia la derivabilidad de la función en x = 2

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & \text{si } x \le 2 \\ -x^2 + 2x + 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Representa la función y la recta o rectas tangentes para x = 2

Solución:

Ejercicio 196

$a = 2 \;\rightarrow\; 2$

$g(x) = x^2 - 3 \;\rightarrow\; x \mapsto x^2 - 3$

$P = \text{punto}(a, g(a)) \;\rightarrow\; (2, 1)$

dibujar(P, {color = rojo, tamaño_punto = 8})

$h(x) = -x^2 + 2x + 4 \;\rightarrow\; x \mapsto -x^2 + 2 \cdot x + 4$

dibujar(g(x), −∞..a, {color = azul, anchura_linea = 2})

$t1(x) = g'(a) \cdot (x - a) + g(a) \;\rightarrow\; x \mapsto 4 \cdot x - 7$

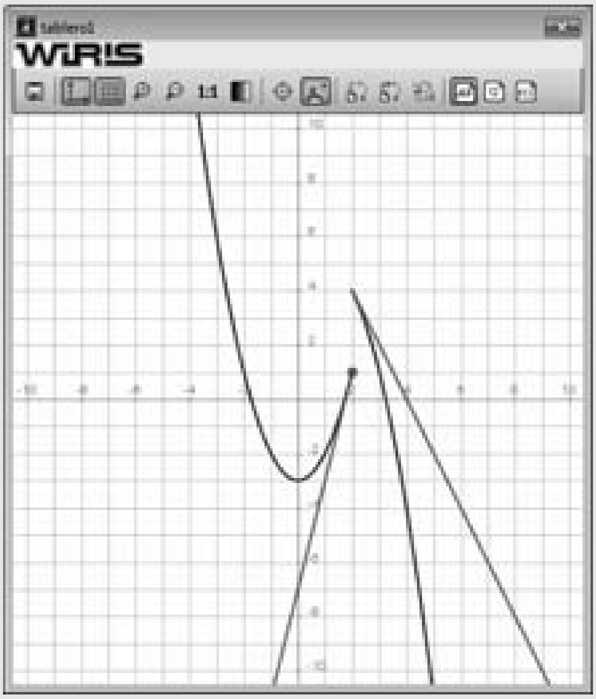
dibujar(t1(x), −∞..a, {color = rojo, anchura_linea = 2})

dibujar(h(x), a..+∞, {color = azul, anchura_linea = 2})

$t2(x) = h'(a) \cdot (x - a) + h(a) \;\rightarrow\; x \mapsto -2 \cdot x + 8$

dibujar(t2(x), a..+∞, {color = rojo, anchura_linea = 2})

La función no es continua en x = 2, por tanto no es derivable.



197. Estudia la derivabilidad de la función para x = 0

$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

Representa la función y la recta o rectas tangentes para x = 0

Solución:

Ejercicio 197

$a = 0 \;\rightarrow\; 0$

$f(x) = \sqrt[3]{x} \;\rightarrow\; x \mapsto \sqrt[3]{x}$

$P = \text{punto}(a, f(a)) \;\rightarrow\; (0, 0)$

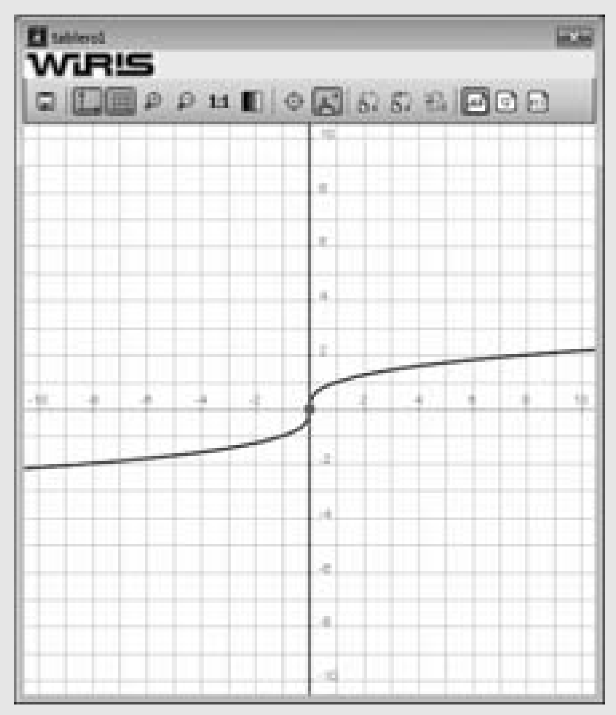
dibujar(P, {color = rojo, tamaño_punto = 8})

$m = f'(a)$

dibujar(f(x), {color = azul, anchura_linea = 2})

dibujar(x = 0, {color = rojo, anchura_linea = 2})

La gráfica de la función no tiene un pico en x = 0, sin embago no es derivable. La pendiente de la recta tangente es +∞, es decir, la tangente es la recta vertical x = 0



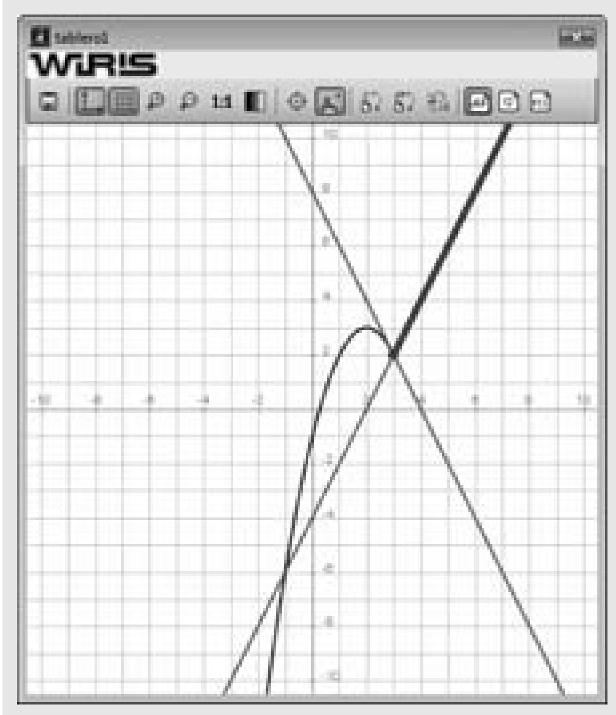
198. Estudia la derivabilidad de la función para x = 3

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x - 1 & \text{si } x \le 3 \\ 2x - 4 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Representa la función y la recta o rectas tangentes para x = 3

Solución:

```
Ejercicio 198
a = 3 → 3
g(x) = −x² + 4x − 1 → x↦−x²+4·x−1
P = punto(a, g(a)) → (3,2)
dibujar(P, {color = rojo, tamaño_punto = 8})
h(x) = 2x − 4 → x↦2·x−4
dibujar(g(x), −∞..a, {color = azul, anchura_linea = 2})
t1(x) = g'(a)·(x − a) + g(a) → x↦−2·x+8
dibujar(t1(x), {color = rojo, anchura_linea = 2})
dibujar(h(x), a..+∞, {color = azul, anchura_linea = 5})
t2(x) = h'(a)·(x − a) + h(a) → x↦2·x−4
dibujar(t2(x), {color = rojo, anchura_linea = 2})
La función es continua en x = 3, pero no es derivable porque
las rectas tangentes son distintas.
```



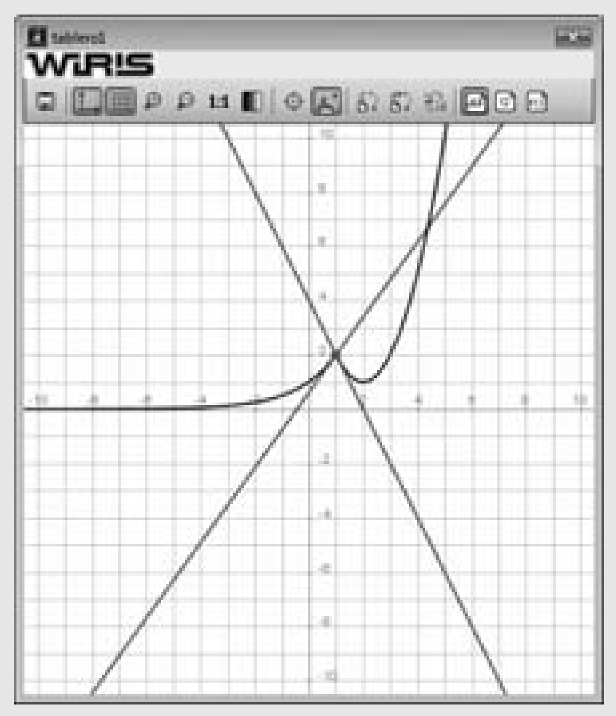
199. Estudia la derivabilidad de la función para x = 1

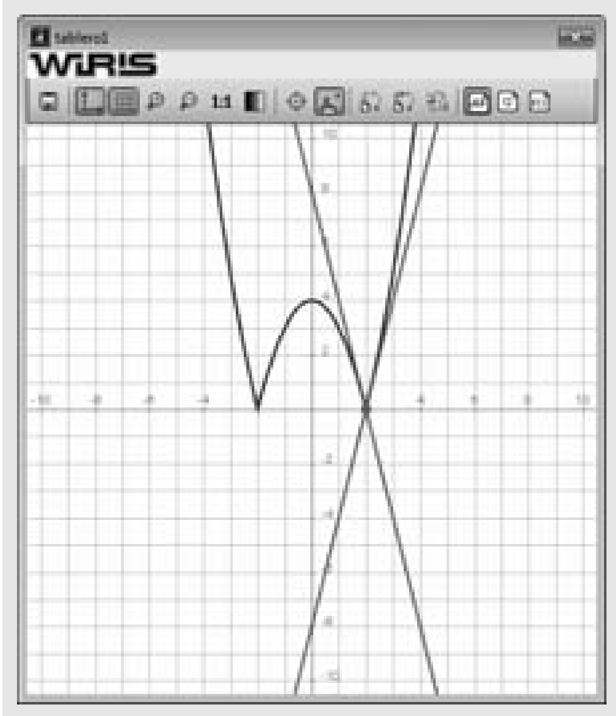
$$f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si } x \le 1 \\ x^2 - 4x + 5 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Representa la función y la recta o rectas tangentes para x = 1

Solución:

```
Ejercicio 199
a = 1 → 1
g(x) = 2ˣ → x↦2ˣ
P = punto(a, g(a)) → (1,2)
dibujar(P, {color = rojo, tamaño_punto = 8})
h(x) = x² − 4x + 5 → x↦x²−4·x+5
dibujar(g(x), −∞..a, {color = azul, anchura_linea = 2})
t1(x) = g'(a)·(x − a) + g(a) → x↦1.3863·x+0.61371
dibujar(t1(x), {color = rojo, anchura_linea = 2})
dibujar(h(x), a..+∞, {color = azul, anchura_linea = 2})
t2(x) = h'(a)·(x − a) + h(a) → x↦−2·x+4
dibujar(t2(x), {color = rojo, anchura_linea = 2})
La función es continua en x = 3, pero no es derivable porque
las rectas tangentes son distintas.
```





200. Estudia la derivabilidad de la función para x = 2

$$f(x) = |x^2 - 4|$$

Representa la función y la recta o rectas tangentes para x = 2

Solución:

Ejercicio 200
$a = 2 \rightarrow 2$
$f(x) = |x^2 - 4| \Rightarrow x \mapsto |x^2 - 4|$
dibujar(f(x), {color = azul, anchura_linea = 2})
$g(x) = -x^2 + 4 \Rightarrow x \mapsto -x^2 + 4$
$P = \text{punto}(a, g(a)) \Rightarrow (2,0)$
dibujar(P, {color = rojo, tamaño_punto = 8})
$h(x) = x^2 - 4 \Rightarrow x \mapsto x^2 - 4$
$t1(x) = g'(a)\cdot(x - a) + g(a) \Rightarrow x \mapsto -4\cdot x + 8$
dibujar(t1(x), {color = rojo, anchura_linea = 2})
$t2(x) = h'(a)\cdot(x - a) + h(a) \Rightarrow x \mapsto 4\cdot x - 8$
dibujar(t2(x), {color = rojo, anchura_linea = 2})

Halla las tres primeras derivadas de las siguientes funciones:

201. $f(x) = x^3 + 3x^2 + x - 3$

Solución:

Ejercicio 201
$f(x) = x^3 + 3x^2 + x - 3 \Rightarrow x \mapsto x^3 + 3\cdot x^2 + x - 3$
$f'(x) \Rightarrow 3\cdot x^2 + 6\cdot x + 1$
$f''(x) \Rightarrow 6\cdot x + 6$
$f'''(x) \Rightarrow 6$

202. $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x}$

Solución:

Ejercicio 202
$f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x} \Rightarrow x \mapsto \dfrac{x^2 + 1}{x}$
$f'(x) \Rightarrow \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$
$f''(x) \Rightarrow \dfrac{2}{x^3}$
$f'''(x) \Rightarrow \dfrac{-6}{x^4}$

203. $f(x) = x \cdot e^x$

Solución:

Ejercicio 203

$f(x) = x \cdot e^x \;\rightarrow\; x \mapsto x \cdot e^x$

$f'(x) \;\rightarrow\; (x+1) \cdot e^x$

$f''(x) \;\rightarrow\; (x+2) \cdot e^x$

$f'''(x) \;\rightarrow\; (x+3) \cdot e^x$

204. $f(x) = x \cdot L\,x$

Solución:

Ejercicio 204

$f(x) = x \cdot \ln(x) \;\rightarrow\; x \mapsto x \cdot \ln(x)$

$f'(x) \;\rightarrow\; \ln(x) + 1$

$f''(x) \;\rightarrow\; \dfrac{1}{x}$

$f'''(x) \;\rightarrow\; \dfrac{-1}{x^2}$

205. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)e^{-x+1} & \text{si } x > 1 \\ \text{sen}\,(x - 1) & \text{si } x \le 1 \end{cases}$$

encuentra los valores α, β y γ que hacen que f(x) sea continua, y que admita primera y segunda derivada en el punto x = 1. Representa la función obtenida.

Solución:

Ejercicio 205

$f(x) = (a \cdot x^2 + b \cdot x + c) \cdot e^{-x+1} \;\rightarrow\; x \mapsto (a \cdot x^2 + b \cdot x + c) \cdot e^{-x+1}$

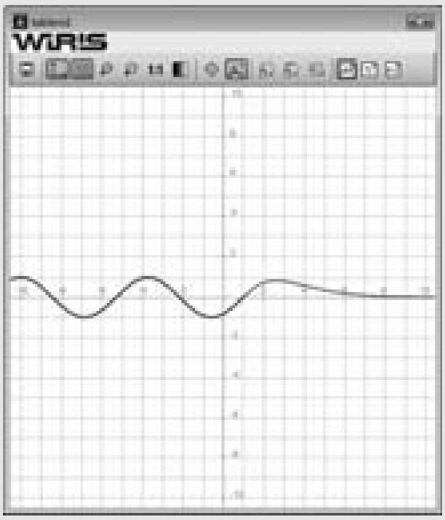
$g(x) = \text{sen}\,(x-1) \;\rightarrow\; x \mapsto \text{sen}\,(x-1)$

$\text{resolver}\begin{bmatrix} f(1) = g(1) \\ f'(1) = g'(1) \\ f''(1) = g''(1) \end{bmatrix} \;\rightarrow\; \{\{a=1, b=-1, c=0\}\}$

$f(x) = (x^2 - x) \cdot e^{-x+1} \;\rightarrow\; x \mapsto x^2 - x \cdot e^{-x+1}$

dibujar(f(x), 1..+∞, {color = rojo, anchura_linea = 2})

dibujar(g(x), -∞..1, {color = azul, anchura_linea = 2})



206. Estudia la derivabilidad de la función para x = 0

$$f(x) = x|x|$$

Representa la función y la recta o rectas tangentes para x = 0

Solución:

Ejercicio 206

$a = 0 \;\rightarrow\; 0$

$f(x) = x|x| \;\rightarrow\; x \mapsto x(|x|)$

dibujar(f(x), {color = azul, anchura_linea = 2})

$g(x) = -x^2 \;\rightarrow\; x \mapsto -x^2$

P = punto(a, g(a)) → (0,0)

dibujar(P, {color = rojo, tamaño_punto = 8})

$h(x) = x^2 \;\rightarrow\; x \mapsto x^2$

$t1(x) = g'(a) \cdot (x - a) + g(a) \;\rightarrow\; x \mapsto 0$

dibujar(t1(x), {color = rojo, anchura_linea = 2})

$t2(x) = h'(a) \cdot (x - a) + h(a) \;\rightarrow\; x \mapsto 0$

dibujar(t2(x), {color = rojo, anchura_linea = 2})