MATEMÁTICAS II:
2º Bachillerato
Capítulo 9: Representación de funciones

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Leticia González Pascual

Revisores: Álvaro Valdés Menéndez y Javier Rodrigo

Todas las imágenes han sido creadas por los autores utilizando *sofware* libre (GeoGebra y GIMP)

Índice

Resumen

El concepto de función es la piedra angular de las Matemáticas. Sirve para modelar experiencias tanto de Física, como de Biología, como del resto de las Ciencias. Sin embargo su génesis ha sido lenta.

En el famoso trabajo sobre **la difusión del calor de *Jean Baptiste Joseph Fourier*** (1768 – 1830) comenzado en 1807 y publicado en 1822, indicaba que las funciones que podían representarse como una suma infinita de funciones trigonométricas es *amplia*.

Por entonces las tres grandes L (*Lagrange, Laplace y Legendre*) criticaron la memoria de *Fourier* por sus lagunas y vaguedad de razonamiento, y quizás esta sea la causa para que comenzara en Matemáticas la época del rigor. El trabajo de *Fourier* desempeñó un papel **catalizador** en la nueva fundamentación, pues suscitó cuestiones como las condiciones exactas de representabilidad de funciones mediante series trigonométricas. El primer resultado riguroso en esta línea fue obtenido por *Dirichlet*, en 1829, un año antes de la muerte de *Fourier*.

Autora: Leticia González Pascual
Revisores: Álvaro Valdés y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

1. REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES

El curso pasado y en cursos anteriores ya has estudiado las funciones, y en este curso has estudiado su continuidad, la derivada… En este capítulo vamos a recoger todo lo que ya sabes de forma organizada para que aprendas a representarlas con soltura.

A la hora de representar una función $y = f(x)$ tenemos sobre todo tres fuentes de información:

- **La propia función**: a partir de su expresión algebraica podemos saber dónde está definida, los puntos de corte con los ejes coordenados y otros puntos, si tiene asíntotas o no, …
- **La primera derivada**: a partir de ella obtendremos toda la información relacionada con el crecimiento o decrecimiento de la función y los extremos relativos.
- **La segunda derivada:** nos ayudará a estudiar la curvatura que presenta y los puntos de inflexión.

1.1. Información extraída de la propia función

Dominio

El **dominio** de una función es el conjunto de valores de $\mathbb{R}$ que puede tomar la variable independiente, es decir, para los cuales está definida la función:

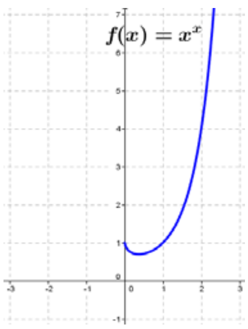
$$\text{Dom } f = \{x \in \mathbb{R};\ f(x) \in \mathbb{R}\}$$

En otras palabras, se trata de determinar qué valores podemos dar a la variable independiente, x, de modo que podamos calcular la función f. Por ello, debemos recordar (una vez más) qué funciones presentan alguna limitación a la hora de ser calculadas en el cuerpo de los números reales, pues esas serán las que debamos estudiar con detalle:

- Suma, resta y producto: pueden evaluarse para cualquier número real.
- División: no se puede dividir entre cero.
- Raíces:
  - De orden impar: pueden evaluarse en cualquier número real.
  - De orden par: el radicando debe ser mayor o igual que cero.
- Potencias:
  - De exponente natural: pueden evaluarse siendo la base cualquier número real.
  - De exponente negativo: pueden evaluarse si la base es un real positivo.

Ejemplo

- *Vamos a utilizar GeoGebra para representar la función* $f(x) = x^x$.



Observamos que la función sólo existe cuando $x > 0$, algo que tiene sentido si pensamos que intentar calcular una potencia de base negativa y exponente real puede llevar a situaciones confusas:

$\Rightarrow$ $(-1)^x$ con $x \in \mathbb{Z}$: puede calcularse sin problemas.

$\Rightarrow$ $(-1)^x$ con $x \in \mathbb{Q}$: si el denominador del exponente es par, es equivalente a intentar hallar la raíz de un número negativo.

$\Rightarrow$ $(-1)^x$ con $x \in \mathbb{I}$: no puede calcularse ya que es imposible realizar el proceso de acotación necesario.

Autora: Leticia González Pascual
Revisores: Álvaro Valdés y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

- Logaritmos: el argumento debe ser rigurosamente mayor que cero.

Con el fin de determinar el dominio de una función real de variable real (las funciones con las que trabajamos normalmente), estudiamos el dominio de las funciones más usuales:

➢ **Funciones polinómicas:** El dominio de estas funciones es el conjunto de los números reales.

$$f(x) = P(x) \Rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R}$$

Ejemplo

- *Para* $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5$, Dom $f = \mathbb{R}$.

➢ **Funciones racionales (fraccionarias):** Son de la forma $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$

Su dominio es el conjunto de los reales excepto los ceros o raíces del denominador.

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \Rightarrow \text{Dom } f = \{x \in \mathbb{R};\ Q(x) \neq 0\} = \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R};\quad Q(x) = 0\}$$

Ejemplos

- Para $f(x) = \text{cotg } x$, Dom $f = \mathbb{R} - \{x = k\cdot\pi\}$, pues $\text{cotg } x = \dfrac{\cos x}{\text{sen } x}$, y $\text{sen } x = 0$ cuando $x = k$, con $k \in \mathbb{Z}$.
- Si $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2-4}$, es fácil ver que para $x = -2$ y $+2$ el denominador se anula, por tanto:

$$\text{Dom } f = (-\infty, -2) \cup (-2, +2) \cup (+2, +\infty) = \mathbb{R} - \{-2, +2\}$$

➢ **Funciones irracionales:** Son de la forma $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$. Como ya se dijo, hay dos casos posibles:

- **Si *n* es impar** el dominio de la función coincidirá con el dominio del radicando: Dom f = Dom g.
- **Si *n* es par** el dominio de la función estará formado por todos los valores de x que hagan que el radicando sea mayor o igual que cero: Dom $f = \{x \in \mathbb{R};\ g(x) \geq 0\}$.

Ejemplos

- Si $f(x) = \sqrt{x+5}$, en este caso Dom $f = \{x \in \mathbb{R};\ x + 5 \geq 0\}$, por lo que habrá que resolver la inecuación $x + 5 \geq 0$, cuya solución es $x \geq -5$. Es decir, Dom $f = [5,+\infty)$.
- Si se trata de la función $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x-3}{x^2-4}}$, en este caso el dominio de la función coincide con el dominio del radicando, y éste está visto en el ejemplo anterior:

$$\text{Dom } f = (-\infty, -2) \cup (-2, +2) \cup (+2, +\infty) = \mathbb{R} - \{-2, +2\}$$

➢ **Funciones exponenciales:** Son funciones de la forma $f(x) = a^{g(x)}$, siendo a un número positivo. El dominio de estas funciones coincide con el dominio de la función que aparece en el exponente:

$$\text{Dom } f = \text{Dom } g.$$

Ejemplo

- Sea $f(x) = 2^{\frac{x+2}{x-3}}$. El dominio de $f(x)$ coincidirá con el dominio del exponente que, como se trata de una función racional, será todos los números reales excepto los que anulan el denominador. Por tanto: $\text{Dom } f = (-\infty,+3) \cup (+3,+\infty) = \mathbb{R} - \{+3\}$

➢ **Funciones logarítmicas:** Son de la forma $f(x) = \log_a[g(x)]$, siendo a positivo y distinto de 1. Como los logaritmos sólo tienen sentido para los números positivos se tiene: Dom $f = \{x \in \mathbb{R};\ g(x) > 0\}$.

Ejemplo

- Si $f(x) = \log(x+1)$, el dominio de la función serán todos los valores de x que hagan que el argumento sea positivo: $x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1$, por tanto:

$$\text{Dom } f = \{x \in \mathbb{R};\ x + 1 > 0\} = (-1, +\infty).$$

Autora: Leticia González Pascual
Revisores: Álvaro Valdés y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

Conjunto imagen o recorrido

El **conjunto imagen** o **recorrido** de una función es el conjunto de valores de $\mathbb{R}$ que toma la variable dependiente:

$$\text{Im } f = \{y \in \mathbb{R};\ \ \exists\, x \in \mathbb{R} \text{ con } f(x) = y\}$$

La forma más habitual y sencilla de determinar el recorrido de una función es a partir de su representación gráfica, si bien puede hallarse conociendo la forma general de la función. El recorrido está formado por el conjunto de valores del eje de ordenadas o eje OY que son alcanzados por la función.

Ejemplos

- Ya representamos antes la función $f(x) = x^x$. De la gráfica deducimos:

$$\text{Dom} f = (0, +\infty) = \mathbb{R}^+ \quad \text{e} \quad \text{Im } f = [0{,}6932\ , +\infty)$$

- Si $f(x) = x^2 + 2x - 3$, sabemos que es una parábola con forma de “U”, que el vértice es un mínimo y se encuentra en:

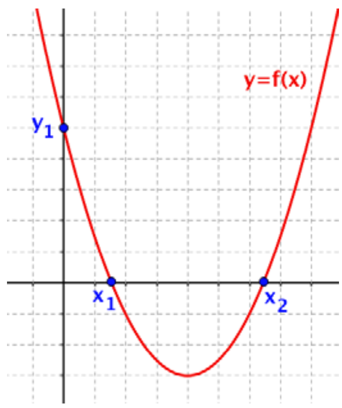
$$x = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x = \frac{-2}{2 \cdot 1} = -1 \quad \text{y} \quad f(-1) = (-1)^2 + 2 \cdot (-1) - 3 = -4$$

  Por tanto:

$$\text{Dom } f = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \text{Im } f = [-4, +\infty)$$

Puntos de corte con los ejes

Se denominan **puntos de corte** o puntos de intersección con los ejes coordenados a los puntos en los cuales la gráfica de la función corta al eje de abscisas y/o al eje de ordenadas.



- **Cortes con el eje OX**: Para determinar los puntos de corte con el eje de abscisas se iguala a cero la función y se resuelve la ecuación resultante:

$$\text{Dada } y = f(x) \rightarrow \text{Si } y = 0 \Rightarrow f(x) = 0$$

$$\text{Soluciones: } x_1, x_2, \ldots, x_n \quad \Rightarrow \text{Puntos de corte: } (x_1, 0), (x_2, 0) \ldots, (x_n, 0)$$

- **Corte con el eje OY**: Para determinar el punto de corte con el eje de ordenadas (será uno como máximo) se sustituye la x por cero y se halla el valor de y:

$$\text{Dada } y = f(x) \rightarrow \text{Si } x = 0 \Rightarrow y_1 = f(0) \Rightarrow \text{Punto de corte: } (0, y_1)$$

Ejemplos

- Si consideramos de nuevo $f(x) = x^2 + 2x - 3$, hallamos los puntos de corte con los ejes:

Corte con el eje OY: $f(0) = 0^2 + 2 \cdot 0 - 3 = -3$

Corte con el eje OX: $x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = +1 \end{cases}$

Por tanto, los puntos de corte con los ejes son los puntos:

$$(-3, 0), \quad (0, -3) \quad y \quad (+1, 0)$$

- Volvamos a la función $f(x) = x^x$. Al intentar resolver tanto $x = 0$ como $y = 0$ llegamos a ecuaciones sin solución:

Corte con el eje OY: $x = 0 \notin$ Dom f

Corte con el eje OX: $x^x = 0$ no tiene solución

Sin embargo, sí podemos calcular el límite cuando x tiende a cero por la derecha:

$$\lim_{x \to 0^+} x^x = 0^0 = \text{Indeterminación}$$

que resolvemos tomando logaritmos:

$$\lim_{x \to 0^+} x^x = L \Rightarrow \ln L = \ln(\lim_{x \to 0^+} x^x) = \lim_{x \to 0^+} (\ln x^x) = \lim_{x \to 0^+} (x \cdot \ln x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \frac{-\infty}{\infty} = \text{Ind.}$$

y, aplicando la regla de L'Hôpital:

$$\ln L = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \to 0^+} (-x) = 0 \Rightarrow L = e^0 = 1$$

valor que coincide con el que podemos observar en la gráfica de $f(x)$.

Simetrías

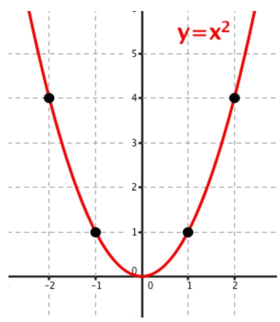
Nos interesa estudiar las simetrías de una función de cara a simplificar el proceso de representación gráfica. Si la función es simétrica, para representar la gráfica correspondiente basta con estudiarla en la parte de las abscisas positivas.

- **Simetría respecto al eje OY**: Una función es simétrica respecto al eje OY si se cumple que:

$$f(x) = f(-x) \quad \forall\, x \in \text{Dom } f$$

Las funciones con este tipo de simetría se llaman **funciones pares**. Una función con este tipo de simetría define una simetría especular respecto al eje OY.

Ejemplo



- La función $f(x) = x^2$ es una función simétrica respecto al eje OY, como se puede observar viendo su gráfica.

Algebraicamente se cumple que:

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

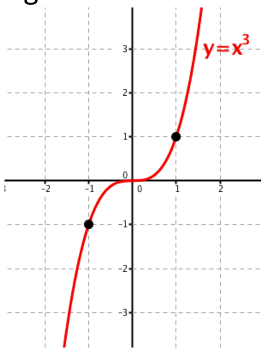
- **Simetría respecto al origen**: Una función es simétrica respecto al origen de coordenadas si:

$$f(-x) = -f(x) \quad \forall\ x \in \text{Dom} f$$

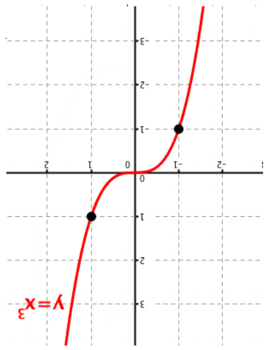
Las funciones con este tipo de simetría se llaman **funciones impares**. Una función con este tipo de simetría define una **inversión respecto del origen de coordenadas**, pero desde un punto de vista práctico, dado que estamos trabajando con funciones en el plano, podemos buscar un giro de centro en el origen y amplitud 180°.

Ejemplo

- La función $f(x) = x^3$ es una función simétrica respecto al origen, como se puede observar viendo su gráfica.



Girando 180° con un eje que pasa por el origen



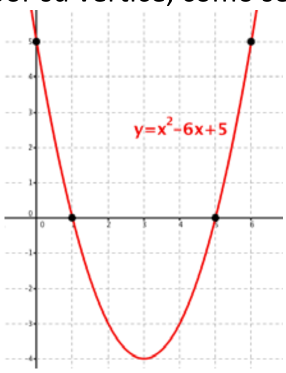
Algebraicamente se cumple que:

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$

Hay funciones que no son pares ni impares y que no presentan ningún tipo de simetría. Otras funciones, algunas de ellas ya estudiadas, aunque no son ni pares ni impares son simétricas respecto a otras rectas.

Ejemplo

- La función $f(x) = x^2 - 6x + 5$, o en general todas las funciones cuadráticas, son simétricas respecto a la recta vertical que pasa por su vértice, como se puede ver observando su gráfica:



Autora: Leticia González Pascual
Revisores: Álvaro Valdés y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

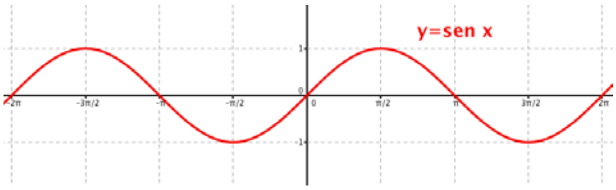
Periodicidad

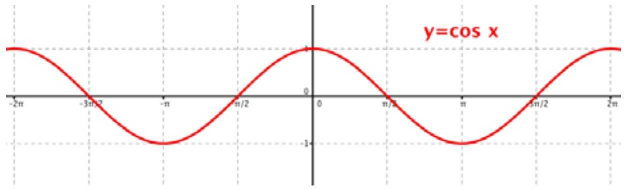
Una función $f(x)$ se dice que es **periódica** de período T, si para todo x perteneciente a su dominio se cumple que $f(x) = f(x + T) = f(x + 2T) = \ldots = f(x + k\cdot T)$, con k un número entero. Para poder representar las funciones periódicas basta con estudiarlas en el intervalo $[0, T]$.

Las funciones periódicas más fáciles de determinar a partir de su expresión cartesiana son las que están formadas únicamente por funciones trigonométricas con argumentos lineales, pero hay muchas más.

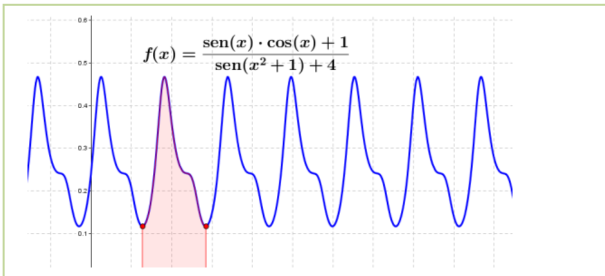
Ejemplos

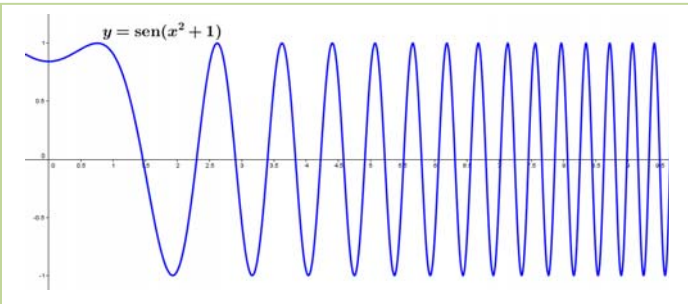
- Las funciones $f(x)$ = sen x y $f(x)$ = cos x son periódicas de período $T = 2\pi$, por lo que sus gráficas se estudiarían en el intervalo $[0,2\pi]$.





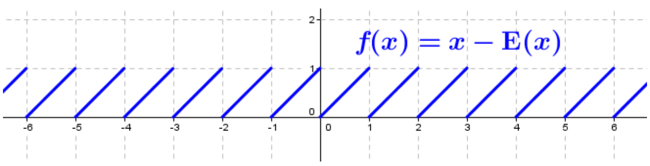
- $f(x) = \dfrac{\text{sen } x \cdot \cos x + 1}{\text{sen }(4x+3)+4}$ es periódica de período $T = \pi$, como puede verse en su gráfica, en la que vemos cómo la región sombreada se repite indefinidamente.



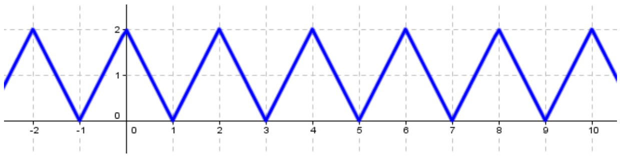


- Sin embargo, $f(x) = \text{sen}(x^2+1)$ no es periódica al tener un argumento de grado dos, y vemos cómo las oscilaciones están cada vez más próximas.

- La función mantisa, que devuelve la parte decimal de un número y se define restando a cada número su parte entera: $M(x) = x - E(x)$ es periódica con $T = 1$:



- Otras funciones pueden ser periódicas por el contexto al que hace referencia. Por ejemplo, el ciclo de explosión o combustión de un motor, la modelización de un circuito de calefacción, la cuenta corriente de una persona a lo largo de un mes,…:



Asíntotas y ramas parabólicas

Recuerda que:

El curso pasado, en el capítulo de límites y continuidad estudiamos las asíntotas y las ramas parabólicas. Ahora vamos a recordarlo.

En la gráfica de una función, los tramos en los que x toma valores muy grandes (x tiende a más o menos infinito) se llaman **ramas infinitas** de la función.

Si la gráfica se aproxima cada vez más a una dirección hablamos de que la gráfica tiene una **asíntota**. En caso contrario decimos que tiene una **rama parabólica**.

Por tanto, una **asíntota** a una curva es una recta a la cual tiende la función en el infinito de la x o en el de $f(x)$.

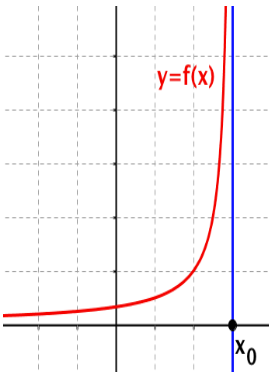
Según sea la forma de esta recta podemos hablar de asíntotas verticales, horizontales u oblicuas.

- ***Asíntotas verticales:*** Se dice que una recta $x = x_0$ es una asíntota vertical cuando se verifica una de las relaciones siguientes:

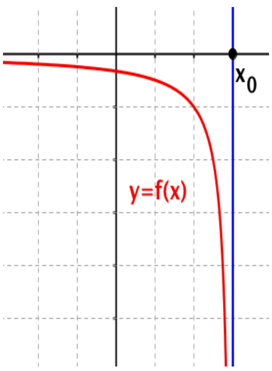
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \pm\infty$$

Es decir, para que exista una asíntota vertical en x_0 al menos uno de los límites laterales tiene que ser infinito.

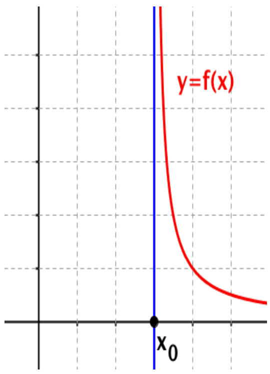
Las distintas posibilidades son las siguientes:



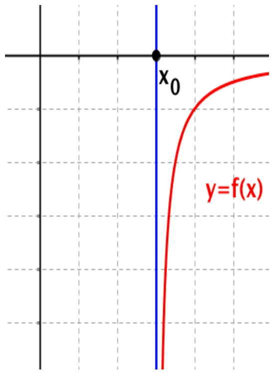
$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$$

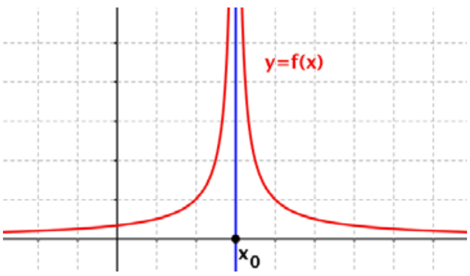


$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$$

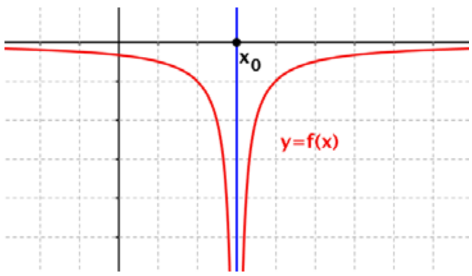


$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$$

Los anteriores son límites laterales. También tenemos las siguientes situaciones:



$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$$

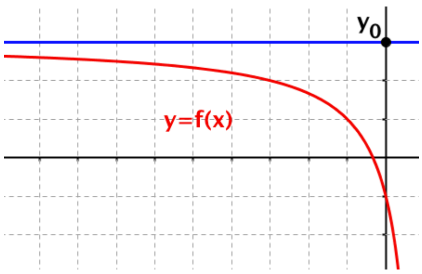
Una función puede tener una asíntota vertical en los valores de x para los cuales la función no es real, es decir, los puntos que nos han salido en el estudio del dominio.

Autora: Leticia González Pascual
Revisores: Álvaro Valdés y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

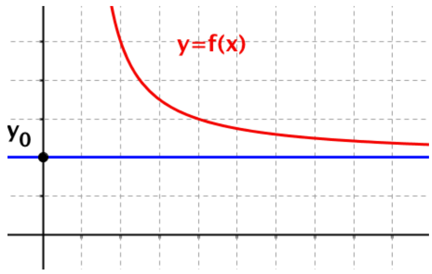
Una función puede no tener asíntotas verticales (por ejemplo, las funciones polinómicas) o tener cualquier número de ellas. Las ramas de la curva que se aproximan a una asíntota vertical se llaman **ramas infinitas verticales.**

La gráfica de una función no suele cortar a una asíntota vertical, salvo en el caso de funciones definidas a trozos como: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$.

- **Asíntotas horizontales:** Una recta de ecuación $y = y_0$ es asíntota horizontal de la función cuando existe, al menos, uno de los siguientes límites:



$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = y_0$$



$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = y_0$$

Para determinar, por tanto, la existencia y la ecuación de una asíntota horizontal basta con hallar los límites cuando x tiende a más o menos infinito. Los valores de dichos límites serán las ecuaciones de la asíntota.

Una función puede tener como máximo dos asíntotas horizontales.

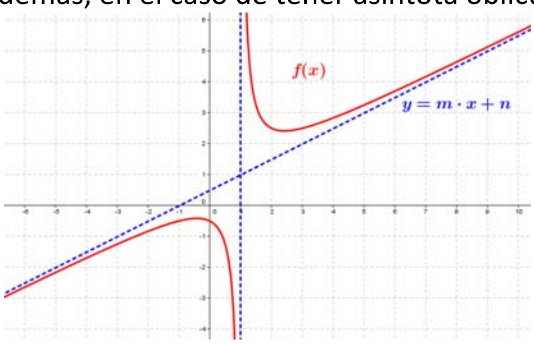
Las ramas de la curva que se aproximan a una asíntota horizontal se llaman **ramas infinitas horizontales.**

- **Asíntotas oblicuas:** Una asíntota oblicua es una recta de la forma $y = m \cdot x + n$, con $m \neq 0$, a la cual tiende a aproximarse la función en el infinito.

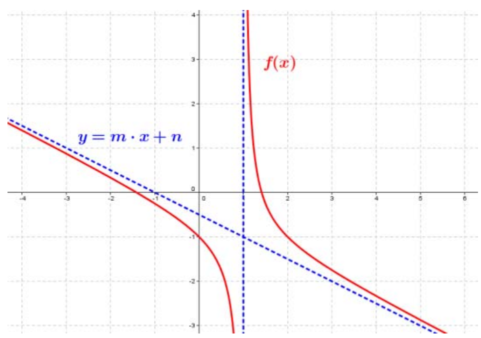
Para determinar la ecuación de la asíntota oblicua tenemos que hallar su pendiente, m, y su ordenada en el origen, n. Estos valores se obtienen calculando los siguientes límites:

- $m = \lim_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Para que exista la asíntota, este límite debe ser un número real distinto de cero.
- Si $m \in \mathbb{R}^*$, $n = \lim_{x \to \infty} (f(x) - m\,x)$

Una función puede tener una asíntota oblicua en un sentido si no tiene asíntota horizontal en ese sentido. Además, en el caso de tener asíntota oblicua, tendrá como máximo dos.



$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} > 0$$



$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} < 0$$

Autora: Leticia González Pascual
Revisores: Álvaro Valdés y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

La rama de la función que se acerca a una asíntota oblicua se llama **rama hiperbólica**.

- **Ramas parabólicas:** Dada una función $f(x)$, diremos que una de sus ramas infinitas es una rama parabólica si no se acerca a ninguna recta y se cumple alguna de estas igualdades.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

Una función tiene ramas parabólicas si no tiene asíntotas horizontales ni oblicuas.

Ejemplo

- *Calcula las asíntotas de la función* $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x-2}$.
  - Asíntotas verticales:

    Como $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+2}{x-2} = \infty$, la función tiene una asíntota vertical, $x = 2$.

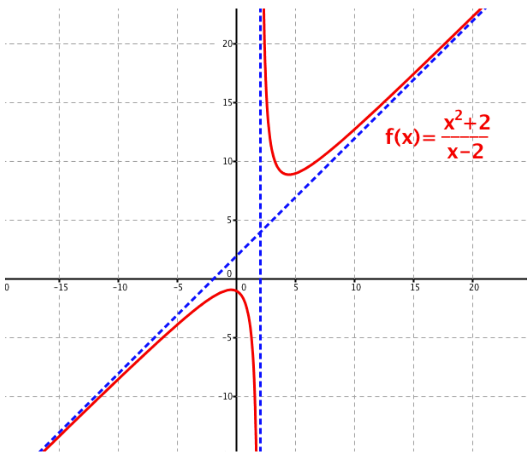
  - Asíntotas horizontales:

    Como $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+2}{x-2} = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+2}{x-2} = -\infty$, la función no tiene asíntotas horizontales.

  - Asíntotas oblicuas:

    Como no hay asíntotas horizontales, analizamos que pueda haber asíntotas oblicuas.

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2+2}{x-2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2}{x^2-2x} = +1$$



El valor de m es un real no nulo, así que hallamos el valor de n:

$$n = \lim_{x\to\infty}(f(x) - 1\cdot x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2}{x-2} - x\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2-x^2+2x}{x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x+2}{x-2} = 2$$

Por tanto, $y = x + 2$ es una asíntota oblicua.

La representación gráfica confirma los resultados obtenidos

Autora: Leticia González Pascual
Revisores: Álvaro Valdés y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

1.2. Información extraída de la primera y segunda derivada

Monotonía. Crecimiento y decrecimiento

Recuerda que:

Una función $y = f(x)$ es **creciente** en un intervalo (a, b) cuando para todo par de puntos $x_1, x_2 \in (a,b)$, si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Si la función es creciente en un intervalo, la tasa de variación media para dos puntos cualesquiera del mismo es mayor que cero, es decir:

Si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

luego:

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$ y, por tanto, la derivada es no negativa.

Una función $y = f(x)$ es **decreciente** en un intervalo (a, b) cuando para todo par de puntos $x_1, x_2 \in (a,b)$, si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Si la función es decreciente en un intervalo, la tasa de variación media para dos puntos cualesquiera del mismo es menor que cero, es decir:

Si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

luego:

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$ y, por tanto, la derivada es negativa o cero.

Por tanto, dada una función $y = f(x)$, derivable en el intervalo (a, b):

Si $f'(x) > 0 \ \forall x \in (a,b)$, $f(x)$ es creciente en el intervalo.

Si $f'(x) < 0 \ \forall x \in (a,b)$, $f(x)$ es decreciente en el intervalo.

Si $f'(x) = 0 \ \forall x \in (a,b)$, $f(x)$ es constante en el intervalo.

La observación de la gráfica de una función no permite determinar con precisión los intervalos donde la función es creciente o donde es decreciente. Por ello, para calcular los intervalos de monotonía de una función $y = f(x)$, supuesta la existencia de la derivada conviene seguir estos pasos:

1. Calculamos $f'(x)$.
2. Hallamos los puntos que anulan $f'(x)$, que determinarán los intervalos de monotonía en el dominio de la función.
3. Calculamos el signo de $f'(x)$ en dichos intervalos. En los intervalos donde $f'(x) > 0$ la función es creciente, y donde $f'(x) < 0$, es decreciente.

Autora: Leticia González Pascual
Revisores: Álvaro Valdés y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

Ejemplo

- *Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función* $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 5$.

Seguimos los pasos que acabamos de enumerar:

1. Calculamos la derivada: $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$
2. Hallamos los valores de x que anulan la primera derivada:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 18x + 12 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$$

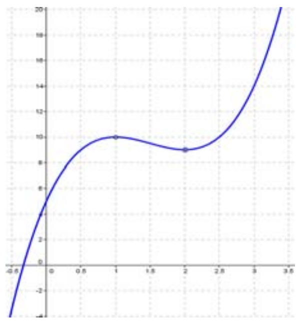
Estos puntos determinarán los intervalos de crecimiento, que son: $(-\infty, 1)$, $(1, 2)$ y $(2, +\infty)$.

3. Estudiamos el signo que toma la primera derivada en cada uno de los intervalos que hemos determinado. Para ello basta con tomar un valor cualquiera para x dentro de cada intervalo:
   - $(-\infty, 1) \rightarrow$Consideramos el punto $x = 0 \Rightarrow$ $f'(0) = 12 > 0 \Rightarrow$ $f(x)$ es creciente.
   - $(1, 2) \rightarrow$ Consideramos el punto $x = 1'5 \Rightarrow$ $f'(1'5) = -1'5 < 0 \Rightarrow$ $f(x)$ es decreciente.
   - $(2, +\infty) \rightarrow$ Consideramos el punto $x = 3 \Rightarrow$ $f'(3) = 12 > 0 \Rightarrow$ $f(x)$ es creciente.

4. Podemos resumir la información anterior en una tabla:

Intervalo	$(-\infty, 1)$	$(1, 2)$	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	> 0	< 0	> 0
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

que, como no puede ser de otro modo, coincide con lo que encontramos al representar la función con GeoGebra:



Puntos críticos. Máximos y mínimos

En el capítulo anterior hemos visto las aplicaciones de la derivada, entre las que se explica qué ocurre cuando la derivada es nula:

Una función $y = f(x)$ derivable en $x = a$ tiene un **máximo o mínimo relativo** en el punto $x = a$ cuando $f'(a) = 0$.

La función tiene un máximo relativo en el punto $x = a$ si $f(a) > f(x)$ para valores de x en un entorno reducido de a, y tiene un **mínimo relativo** en el punto $x = a$ si $f(a) < f(x)$ para valores de x en un entorno reducido de a.

La recta tangente a la función en los máximos o mínimos relativos es horizontal, su pendiente vale 0, ya que la derivada de la función en dichos puntos es igual a cero.

Autora: Leticia González Pascual
Revisores: Álvaro Valdés y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

Ejemplo

- *Determina los máximos y mínimos relativos de la función* $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 5$.

Ya calculamos la derivada en el ejemplo anterior: $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$, y hallamos los valores de x que la anulan:

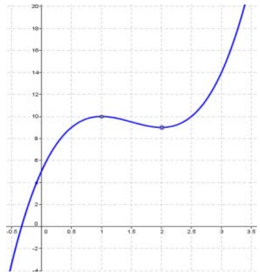
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 18x + 12 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$$

Por tanto, $x = 1$ y $x = 2$ son los puntos críticos de la función.

Aunque ya tenemos la gráfica de $f(x)$ en la página anterior, vamos a analizar qué ocurre en un entorno de ambos puntos:

x	0’9	0’95	1	1’05	1’1
$f(x)$	9’968	9’99225	10	9’99275	9’972

x	1’9	1’95	2	2’05	2’1
$f(x)$	9’028	9’00725	9	9’00775	9’032

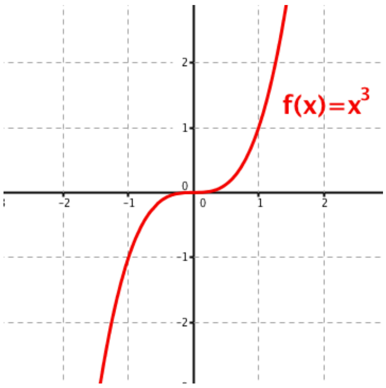


Por tanto, (1, 10) es un máximo relativo y (2, 9) es un mínimo relativo.

A la derecha tenemos la representación de la gráfica de la función, y es fácil observar que el mínimo relativo **no** es el punto más bajo de la gráfica, es mínimo *sólo en relación con los puntos muy próximos* a él.

De la misma forma, el máximo relativo **no** es el punto más alto de la gráfica *sólo en relación con los puntos muy próximos* a él.

Hemos visto en el ejemplo que la condición de anular la derivada no hace que dichos puntos sean los valores más altos o bajos que toma la función en todo su dominio, ni siquiera asegura que cambie la monotonía de la función. Es por eso que se les da el nombre de **máximos y mínimos relativos**.



Pero la derivada puede anularse en un punto y la función puede no tener en él máximo ni mínimo relativo. Es decir, ni siquiera que la derivada se anule en un punto garantiza que cambie la monotonía de la función. Así sucede con la función $f(x) = x^3$, cuya derivada es $f'(x) = 3x^2$.

$f'(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^*$, de modo que la función es siempre creciente.

$f'(x)$ se anula en el punto $x = 0$, pero en la gráfica (a la derecha) vemos que no tiene máximo relativo ni mínimo relativo en ese punto.

Los puntos del dominio en los cuales la derivada es cero o bien no está definida, se llaman **puntos críticos**.

Por tanto, los posibles máximos y mínimos relativos se encuentran necesariamente en el conjunto de puntos críticos.

Para caracterizar un punto crítico disponemos de dos criterios:

- ***Criterio de la derivada primera:***

Al analizar el signo de la derivada determinamos los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función. Sea la función $y = f(x)$ derivable en el punto $x = a$:

- Si para valores muy próximos a a por la izquierda se verifica que $f'(x) > 0$ (la función es creciente) y para valores muy próximos a a por la derecha se cumple que $f'(x) < 0$ (la función es decreciente), entonces la función tiene un máximo relativo en el punto $x = a$.
- Si para valores muy próximos a a por la izquierda se verifica que $f'(x) < 0$ (la función es decreciente) y para valores muy próximos a a por la derecha se cumple que $f'(x) > 0$ (la función es creciente), entonces la función tiene un mínimo relativo en el punto $x = a$.
- Si tanto para valores muy próximos a a por la izquierda como para valores muy próximos a a por la derecha, $f'(x)$ no cambia de signo, la función no tiene ni máximo ni mínimo relativo en $x = a$.

- ***Criterio de la derivada segunda:***

El criterio de la derivada segunda para determinar los máximos y mínimos relativos permite obtener la naturaleza del punto crítico con un único cálculo.

Sea la función $y = f(x)$ derivable dos veces en el punto $x = a$ y con $f'(a) = 0$:

- Si $f''(a) < 0$, la función tiene un máximo relativo en el punto $x = a$.
- Si $f''(a) > 0$, la función tiene un mínimo relativo en el punto $x = a$.
- Si $f''(a) = 0$, todavía no podremos afirmar nada acerca de la función en el punto $x = a$.

Ejemplo

- *Determina la naturaleza de los puntos críticos de la función* $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 5$.

Criterio de la derivada primera:

Al analizar el signo de la derivada, $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$, determinamos los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

Intervalo	$(-\infty, 1)$	(1, 2)	(2, +∞)
$f'(x)$	> 0	< 0	> 0
$f(x)$	↗	↘	↗

Por tanto, en $x = 1$ la función tiene un máximo relativo y en $x = 2$ un mínimo relativo

Criterio de la derivada segunda:

Hallamos la derivada segunda: $f''(x) = 12x - 18$ y sustituimos los valores obtenidos:

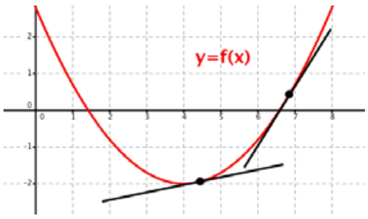
- $f''(1) = -6 < 0 \Rightarrow x = 1$ es un máximo relativo
- $f''(2) = +6 > 0 \Rightarrow x = 2$ es un mínimo relativo

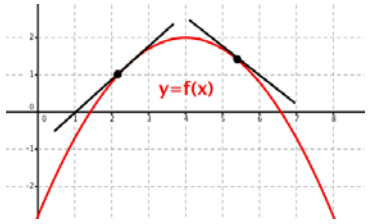
Autora: Leticia González Pascual
Revisores: Álvaro Valdés y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

Curvatura. Concavidad y convexidad

Una función $y = f(x)$ es **cóncava** en un intervalo (a,b) si en todos los puntos del intervalo la curva está por encima de las tangentes en dichos puntos.

Una función $y = f(x)$ es **convexa** en un intervalo (a,b) si en todos los puntos del intervalo la curva está por debajo de las tangentes en dichos puntos.





El proceso de trazar tangentes y comprobar su posición respecto a la función es demasiado laborioso para determinar la curvatura de $f(x)$.

Por ello, para determinar los intervalos de concavidad y convexidad de una función $y = f(x)$, supuesta la existencia de la derivada segunda, seguiremos estos pasos:

1. Calculamos $f''(x)$.
2. Hallamos los puntos que anulan $f''(x)$, que determinarán los intervalos de cambio de curvatura en el dominio de la función.
3. Calculamos el signo de $f''(x)$ en dichos intervalos. En los intervalos donde $f''(x) > 0$ la función es cóncava, y donde $f''(x) < 0$, es convexa.

Ejemplo

- *Analiza la concavidad y convexidad de la función* $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 5$.

Ya hallamos antes la derivada segunda: $f''(x) = 12x - 18$, y la igualamos a cero:

$$f''(x) = 12x - 18 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

Definimos dos intervalos, $(-\infty, \frac{3}{2})$ y $(\frac{3}{2}, +\infty)$. Como con la derivada primera, para analizar el signo de la derivada segunda tomamos un valor en cada intervalo:

- $(-\infty, \frac{3}{2}) \to$ Consideramos el punto $x = 0 \Rightarrow f''(0) = -18 < 0 \Rightarrow f(x)$ es convexa.
- $(\frac{3}{2}, +\infty) \to$ Consideramos el punto $x = 2 \Rightarrow f''(2) = +6 > 0 \Rightarrow f(x)$ es cóncava.

Como antes, podemos recopilar la información en una tabla:

Intervalo	$(-\infty, \frac{3}{2})$	$(\frac{3}{2}, +\infty)$
$f''(x)$	< 0	> 0
$f(x)$		

Autora: Leticia González Pascual
Revisores: Álvaro Valdés y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

Puntos de inflexión

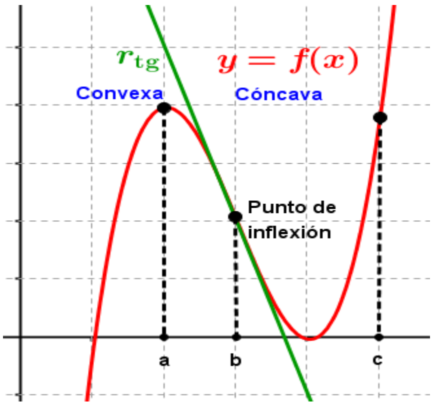
Se llaman **puntos de inflexión** de una curva a aquellos en los que se produce un cambio de concavidad. La curva pasa de ser cóncava a ser convexa o viceversa, y la tangente en dichos puntos atraviesa a la curva.

Cuando una función es cóncava en un intervalo, su derivada segunda es positiva, y cuando es convexa, su derivada segunda es negativa, por tanto, en un punto de inflexión el valor de la derivada segunda debe ser igual a 0. Las raíces de la derivada segunda *pueden* ser las abscisas de los puntos de inflexión.

Si observamos la gráfica adjunta, vemos que en el punto de abscisa a la recta tangente estaría por encima de la curva, por lo que la función es convexa.

En el punto de abscisa c la recta tangente estaría por debajo de la curva, por lo que la función es cóncava.

Sin embargo, en el punto b la recta tangente atraviesa a la curva, por lo que b será un punto de inflexión.



La condición de anulación de la derivada segunda es necesaria pero no suficiente. Para confirmar la existencia de un punto de inflexión en $x = a$ podemos seguir dos caminos:

1. Comprobamos que hay cambio de signo de $f''(x)$ cuando x toma valores a la izquierda y a la derecha de a.
2. Calculamos la tercera derivada, $f'''(x)$, y comprobamos que $f'''(a) \neq 0$. Si $f'''(a) = 0$ estaremos ante un caso dudoso y se deben estudiar las derivadas de orden superior.

Ejemplo

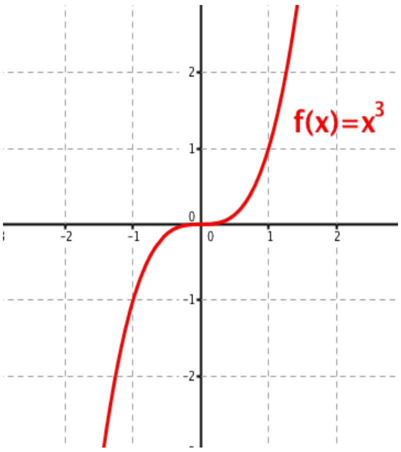
- *Si retomamos el caso de la función* $f(x) = x^3$, cuyas derivadas sucesivas son:

$f'(x) = 3x^2$ $\quad f''(x) = 6x$ $\quad$ y $\quad f'''(x) = 6$

$f'(x) > 0 \ \forall\, x \in \mathbb{R}^*$, así que la función es siempre creciente.

$f''(x)$ se anula en el punto $x = 0$, y $f'''(x) \neq 0$, luego (0, 0) es un punto de inflexión. Su tangente es la recta $y = 0$. Además:

- $f''(x) > 0$ si $x > 0$, $f(x)$ es cóncava en $\mathbb{R}^+$.
- $f''(x) < 0$ si $x < 0$, $f(x)$ es convexa en $\mathbb{R}^-$.



Autora: Leticia González Pascual
Revisores: Álvaro Valdés y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

1.3. Estudio de regiones

Una última fuente de información para realizar la representación gráfica de una función es el estudio de las regiones del plano en las que está definida. Se trata de determinar el signo de la función en los diferentes intervalos encontrados al hallar el dominio y los puntos de intersección con el eje OX.

Para hacer este estudio se consideran los factores correspondientes a los puntos de corte con el eje OX y las asíntotas verticales. En el caso de que alguno de estos factores esté elevado a exponente par no es necesario considerarlo, pues no cambia el signo en la función al pasar de la izquierda a la derecha del punto correspondiente a dicho factor.

Imaginemos una función racional $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, para la que habremos factorizado tanto el numerador como el denominador. Podremos, por ejemplo, expresarla de la forma:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{(x-a)(x-b)^2 \ldots (x-k)^3}{(x-m)(x-n)^2 \ldots (x-r)}$$

Y dividimos la recta real de la forma:

		a		m		n		b		k		r		$\mathbb{R}$
$f(x)$	+		−		+		+		−		+		−	

y vamos analizando el signo de la función en cada intervalo que se ha definido.

Ejemplo

- *Estudia las regiones en las que está definida la función* $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2}{x^2 - 4}$.

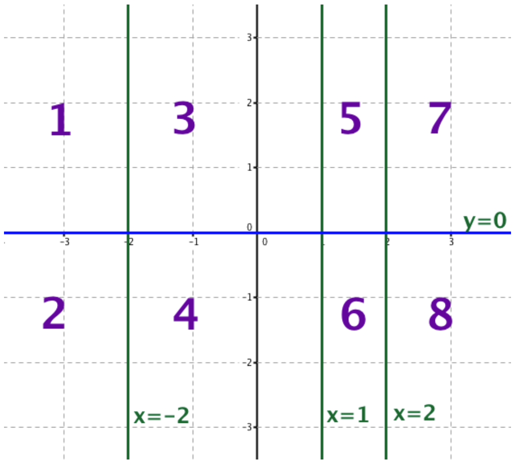
  Factorizamos el numerador y el denominador:

  $$f(x) = \frac{x^2(x-1)}{(x+2)(x-2)}$$

  Entre los factores del numerador aparece el correspondiente a la raíz $x = 0$ elevado al cuadrado. Por tanto, no lo consideramos para el estudio del signo, ya que este factor siempre es positivo.

  El plano nos queda dividido en ocho regiones por las rectas $x = -2$, $x = 1$ y el eje OX de la siguiente forma:

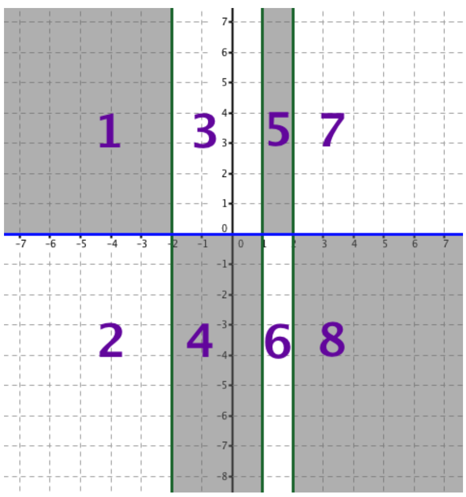
Autora: Leticia González Pascual
Revisores: Álvaro Valdés y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

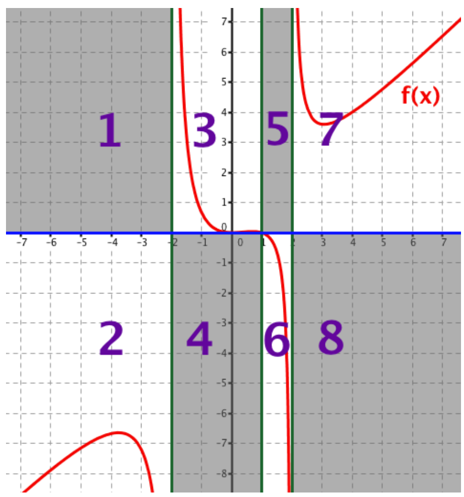


Para determinar el signo de la función en cada intervalo, se toma cualquier valor del mismo y se sustituye en la función.

Intervalo	$(-\infty,-2)$	$(-2,+1)$	$(+1,+2)$	$(+2,+\infty)$
$f(x_0)$	$f(-3)=\frac{-36}{5}$	$f(-1)=\frac{2}{3}$	$f(1'5)=\frac{-9}{14}$	$f(3)=\frac{18}{5}$
$f(x)$	Negativa	Positiva	Negativa	Positiva

Este punto, combinado con todos los estudiados anteriormente, nos será de una gran utilidad a la hora de representar gráficamente una función. En nuestro caso, la función tendrá la siguiente representación gráfica:





Autora: Leticia González Pascual
Revisores: Álvaro Valdés y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

2. ESTUDIO DE LOS DIFERENTES TIPOS DE FUNCIONES

Llegados a este punto, es conveniente tener un conocimiento previo de las características y aspecto de ciertos tipos de funciones.

2.1. Funciones polinómicas

Son de la forma: $y = a\,x^n + b\,x^{n-1} + c\,x^{n-2} + \ldots + k$

- Su dominio es $\mathbb{R}$.
- Son continuas y derivables en todo $\mathbb{R}$.
- Si todos sus términos son de grado par, son simétricas respecto al eje Y, y si todos sus términos son de grado impar son simétricas respecto al origen de coordenadas.
- No son periódicas.
- No tienen asíntotas de ningún tipo. Por tanto, tienen ramas parabólicas.

Actividad resuelta

Representa la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

- Dominio: $\text{Dom}\, f(x) = \mathbb{R}$
- Cortes con los ejes:
  - Eje X: $x^3 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = +1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-2,\,0) \\ (+1,\,0) \end{cases}$
  - Eje Y: $x = 0 \Rightarrow f(0) = +2 \Rightarrow (0,\,+2)$
- Simetría: Las potencias de x son impares, pero hay un término independiente (x^0, las constantes, tienen simetría par), luego no tiene simetría.
- Regiones de existencia:

Con los cortes con los ejes, consideramos los intervalos (–∞, –2), (–2, +1) y (+1, +∞)

Intervalo	(–∞, –2)	(–2, +1)	(+1, +∞)
$f(x_0)$	$f(-3) = 16$	$f(0) = 2$	$f(2) = 4$
$f(x)$	Positiva	Negativa	Positiva

- Monotonía: Hallamos la derivada: $f(x) = x^3 - 3x + 2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3$

e igualamos a cero: $3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = +1 \end{cases}$

Consideramos los intervalos: $(-\infty,-1)$, $(-1,+1)$ y $(+1,+\infty)$.

Intervalo	(–∞, –1)	(–1, +1)	(+1, +∞)
$f'(x_0)$	$f'(-2) = 9 > 0$	$f'(0) = -3 < 0$	$f'(2) = 9 > 0$
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

Autora: Leticia González Pascual
Revisores: Álvaro Valdés y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

- Máximos y mínimos:

A partir de la tabla anterior deducimos que la función tiene un máximo en el punto de abscisa $x = -1$ y un mínimo en el de $x = +1$.

- o Si $x = -1 \Rightarrow f(-1) = 4 \rightarrow$ Máximo en (–1, 4)
- o Si $x = +1 \Rightarrow f(+1) = 0 \rightarrow$ Mínimo en (+1, 0)

Comprobamos con la derivada segunda $f'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow f''(x) = 6x$. Entonces:

- o $f''(-1) = -6 < 0 \rightarrow$ Se confirma el máximo en (–1, 4)
- o $f''(+1) = +6 > 0 \rightarrow$ Se confirma el mínimo en (+1, 0)

- Curvatura: Ya hallamos antes la derivada segunda, la igualamos a cero:

$$6x = 0 \Rightarrow x = 0$$

Consideramos los intervalos: (–∞, 0) y (0, +∞).

Intervalo	(–∞, 0)	(0, +∞)
$f''(x_0)$	$f''(-1) = -6 < 0$	$f''(1) = +6 > 0$
$f(x)$	Convexa	Cóncava

- Puntos de inflexión:

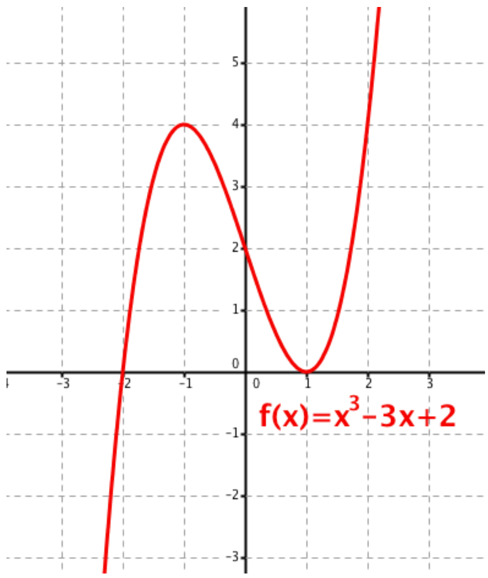
A partir de la tabla deducimos que la función tiene un punto de inflexión en $x = 0$. Ya hallamos antes el valor de f cuando $x = 0 \Rightarrow f(0) = +2 \Rightarrow (0, +2)$.

Podemos comprobar su naturaleza con la derivada tercera:

$$f''(x) = 6x \Rightarrow f'''(x) = 6 \neq 0$$

Es, por tanto, un punto de inflexión.

Con toda la información recopilada podemos dibujar la gráfica de $f(x)$:



Autora: Leticia González Pascual
Revisores: Álvaro Valdés y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

2.2. Funciones racionales

Son de la forma: $y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ con $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios.

- No están definidas en los puntos que anulan el denominador.
- Tienen las siguientes asíntotas:
    - Una asíntota vertical en los puntos que hacen $Q(x) = 0$, excepto si $P(x) = 0$, para el que deberemos resolver la indeterminación.
    - Una asíntota horizontal $y = 0$ si grado $P(x) <$ grado $Q(x)$.
    - Una asíntota horizontal $y = k \neq 0$ si grado $P(x) =$ grado $Q(x)$.
    - Una asíntota oblicua si grado $P(x) =$ grado $Q(x) + 1$.
    - Ramas parabólicas si grado $P(x) >$ grado $Q(x) + 1$.
- Si $P(x)$ y $Q(x)$ tienen la misma simetría, $f(x)$ es simétrica respecto al eje Y; y si $P(x)$ y $Q(x)$ tienen diferente simetría, $f(x)$ es simétrica respecto al origen de coordenadas. Si una de ellas no es simétrica, $f(x)$ tampoco lo es.

Actividad resuelta

- *Representa gráficamente la función* $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$.

  - Dominio: Anulamos el denominador:

$$x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$$

    Por tanto, $\mathrm{Dom}\, f(x) = \mathbb{R} - \{1\}$.

  - Cortes con los ejes:
    - Eje X: $f(x) = \dfrac{2x}{x+1} = 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (0,\,0)$
    - Eje Y: ya hemos visto que $y = 0$ cuando $x = 0$.

  - Simetría: Las potencias de x son impares, pero hay un término independiente, luego no tiene simetría. Podemos comprobarlo:

$$f(-x) = \frac{2\cdot(-x)}{(-x)+1} == \frac{-2x}{-x+1} = \frac{2x}{x-1}\begin{cases} \neq f(x) \\ \neq -f(x) \end{cases}$$

  - Regiones de existencia:

    Los cortes con los ejes y el dominio definen los intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$ y $(0, +\infty)$.

Intervalo	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, +\infty)$
$f(x_0)$	$f(-2) = 4$	$f(-0'5) = -2$	$f(1) = 1$
$f(x)$	Positiva	Negativa	Positiva

  - Asíntotas:
    - Horizontales: analizamos el límite en el infinito

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x+1} = 2 \Rightarrow y = 2 \text{ es una asíntota horizontal}$$

Autora: Leticia González Pascual
Revisores: Álvaro Valdés y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

- o Verticales: analizamos qué ocurre en $x = -1$:

$$\lim_{x\to -1} \frac{2x}{x+1} = \frac{-2}{"0"} = \pm\infty \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-} \frac{2x}{x+1} = \frac{-2}{0^-} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to -1^+} \frac{2x}{x+1} = \frac{-2}{0^+} = -\infty \end{cases} \Rightarrow x = -1 \text{ es una asíntota vertical}$$

- o Como tiene asíntotas horizontales, no tendrá asíntotas oblicuas.

- Monotonía: hallamos la derivada: $f(x) = \frac{2x}{x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$

y vemos que nunca se anula. Del dominio definimos los intervalos: $(-\infty,-1)$ y $(-1,+\infty)$.

Intervalo	$(-\infty, -1)$	$(-1, +\infty)$
$f'(x_0)$	$f'(-2) = 2 > 0$	$f'(0) = 2 > 0$
$f(x)$	Creciente ↗	Creciente ↗

- Máximos y mínimos: Como la derivada no se anula, no hay máximos ni mínimos relativos.
- Curvatura: Hallamos la derivada segunda:

$$f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{-4}{(x+1)^3}$$

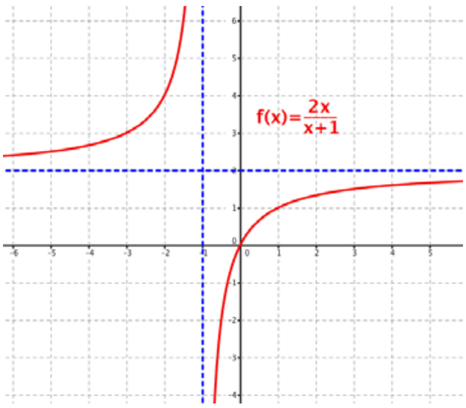
que tampoco se anula en el dominio de la función. Consideramos, como antes, los intervalos: $(-\infty, -1)$ y $(-1,+\infty)$.

Intervalo	$(-\infty, -1)$	$(-1,+\infty)$
$f''(x_0)$	$f''(-2) = +4 > 0$	$f''(0) = -4 < 0$
$f(x)$	Cóncava	Convexa

- Puntos de inflexión:

Como la derivada segunda no se anula, no hay puntos de inflexión.

Con toda la información recopilada podemos dibujar la gráfica de $f(x)$:



Autora: Leticia González Pascual
Revisores: Álvaro Valdés y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

2.3. Funciones con radicales

Son funciones de la forma: $f(x) = \sqrt[n]{F(x)}$

- Si el índice es par, solo estarán definidas cuando el radicando sea mayor o igual que cero.
- La función $f(x)$ conserva el resto de aspectos analizables en $F(x)$: dominio, cortes, monotonía,…

Actividad resuelta

- *Representa gráficamente la función* $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$.
  - Dominio: Al tener índice par, el radicando ha de ser mayor o igual que cero:

$$x^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 4 \Rightarrow \begin{cases} x \leq -2 \\ x \geq +2 \end{cases}$$

También podemos factorizar el radicando y analizar los signos:

$$x^2 - 4 = (x+2)\cdot(x-2)$$

Intervalo	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(+2, +\infty)$
$(x - 2)$	–	–	+
$(x + 2)$	–	+	+
$x^2 - 4$	+	–	+
$f(x)$	Existe	———	Existe

Por tanto, $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - (-2, +2) = (-\infty, -2] \cup [+2, +\infty)$

  - Cortes con los ejes:
    - Eje X: $f(x) = \sqrt{x^2 - 4} = 0 \Rightarrow x = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} (-2,\ 0) \\ (+2,\ 0) \end{cases}$
    - Eje Y: $x = 0$ no pertenece al dominio, por tanto no corta al eje OY.
  - Simetría: $x^2 - 4$ es par, luego $f(x)$ también lo es:

$$f(-x) = \sqrt{(-x)^2 - 4} = \sqrt{x^2 - 4} = f(x) \Rightarrow f(x) \text{ es par}$$

  - Regiones de existencia:

Como $f(x)$ es una raíz de orden par, es siempre positiva en su dominio:

Intervalo	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(+2, +\infty)$
$f(x)$	Positiva	———	Positiva

  - Asíntotas:
    - Verticales: No tiene, ya que $x^2 - 4$ es continua en todo $\mathbb{R}$.
    - Horizontales: analizamos los límites en el infinito

$$\lim_{x \to \pm\infty} \sqrt{x^2 - 4} = +\infty \Rightarrow \text{no tiene asíntotas horizontales}$$

Autora: Leticia González Pascual
Revisores: Álvaro Valdés y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

- Como no tiene asíntotas horizontales, analizamos las asíntotas oblicuas:

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt{x^2-\dots}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{|x|}{x} = \begin{cases} +1 \text{ si } x\to+\infty \\ -1 \text{ si } x\to-\infty \end{cases}$$

Entonces:

$$n = \lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-mx] = \lim_{x\to\pm\infty}[\sqrt{x^2-4}\mp x] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(\sqrt{x^2-4}\mp x)(\sqrt{x^2-4}\pm x)}{(\sqrt{x^2-4}\pm x)}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-4-x^2}{\left(\sqrt{x^2-4}\pm x\right)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-4}{\left(\sqrt{x^2-4}\pm x\right)} = 0$$

Entonces, hay **dos** asíntotas oblicuas:

$y = x$ cuando $x \to +\infty$ e $y = -x$ cuando $x \to -\infty$

- Monotonía: hallamos la derivada:

$$f(x) = \sqrt{x^2-4} \Rightarrow f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$$

Al intentar anularla, obtendríamos $x = 0$, que no pertenece al dominio. Entonces:

Intervalo	$(-\infty,-2)$	$(+2,+\infty)$
$f'(x_0)$	$f'(-3) = \frac{-3}{\sqrt{5}} < 0$	$f'(3) = \frac{+3}{\sqrt{5}} > 0$
$f(x)$	Decreciente ↘	Creciente ↗

- Máximos y mínimos:

Como la derivada no se anula en el dominio, no hay máximos ni mínimos relativos.

- Curvatura: Hallamos la derivada segunda:

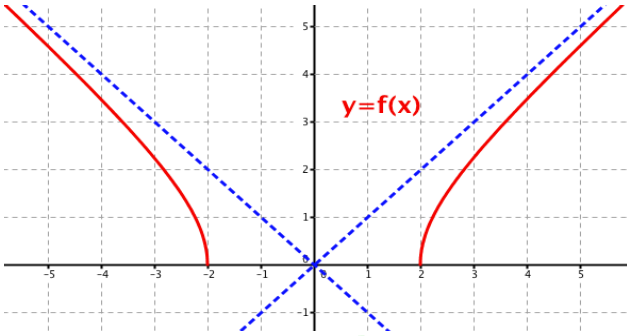
$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} \Rightarrow f''(x) = \frac{\sqrt{x^2-4} - x\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}}{\left(\sqrt{x^2-4}\right)^2} = \dots = \frac{-4}{\left(\sqrt{x^2-4}\right)^3}$$

que tampoco se anula en el dominio de la función, y se ve fácilmente que es siempre negativa ya que el signo de la raíz cuadrada es positivo. Por tanto, $f(x)$ es siempre convexa ⋂

- Puntos de inflexión:

Como la derivada segunda no se anula, no hay puntos de inflexión.

Con toda la información recopilada podemos dibujar la gráfica de $f(x)$:



2.4. Funciones exponenciales

Son de la forma: $f(x) = e^{F(x)}$

- $f(x)$ nunca se anula y es siempre positiva: $f(x) > 0 \ \forall \ x \in \text{Dom } f$.
- La función $f(x)$ conserva varios aspectos de $F(x)$: dominio, monotonía, curvatura,…

Actividad resuelta

- *Estudia y representa gráficamente la función* $f(x) = e^{-x^2+2x}$.
  - Dominio: El exponente es un polinomio, por tanto, $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R}$
  - Cortes con los ejes:
    - Eje X: $f(x) = e^{-x^2+2x} = 0$, no hay puntos de corte
    - Eje Y: $x = 0 \Rightarrow f(0) = e^0 = 1$, corta al eje OY en $(0,\ 1)$
  - Simetría: $x^2 - 2x$ no tiene simetría, luego $f(x)$ tampoco es par o impar:

$$f(-x) = e^{-(-x)^2+2(-x)} = e^{-x^2-2x} \begin{cases} \neq f(x) \\ \neq -f(x) \end{cases}$$

  - Asíntotas:
    - Verticales: No tiene, ya que $x^2 - 2x$ es continua en todo $\mathbb{R}$.
    - Horizontales: analizamos los límites en el infinito

$$\lim_{x \to \pm\infty} e^{-x^2+2x} = e^{-\infty} = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ es una asíntota horizontal en } \pm\infty$$

    - Como tiene asíntotas horizontales, no tendrá asíntotas oblicuas.
  - Monotonía: hallamos la derivada:

$$f(x) = e^{-x^2+2x} \Rightarrow f'(x) = (-2x+2)\cdot e^{-x^2+2x}$$

y la anulamos:

$$(-2x+2)\cdot e^{-x^2+2x} = 0 \Rightarrow -2x+2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

Así, definimos los intervalos: $(-\infty, 1)$ y $(1, +\infty)$.

Intervalo	$(-\infty, +1)$	$(+1, +\infty)$
$f'(x_0)$	$f'(0) = 2 > 0$	$f'(2) = -2 < 0$
$f(x)$	Creciente ↗	Decreciente ↘

  - Máximos y mínimos:

A partir de la tabla anterior deducimos que la función tiene un máximo en $x = +1$.

$$f(+1) = e \rightarrow \text{Máximo en } (+1,\ e)$$

Comprobamos con la derivada segunda:

$$f'(x) = (-2x+2)\cdot e^{-x^2+2x} \Rightarrow f''(x) = (4x^2 - 8x + 2)\cdot e^{-x^2+2x}.$$

Entonces:

$$f''(+1) = -2e < 0 \rightarrow \text{Se confirma el máximo en } (+1,\ e)$$

- Curvatura: Ya hallamos antes la derivada segunda, la igualamos a cero:

$$\left(4x^2-8x+2\right)\cdot e^{-x^2+2x}=0 \Rightarrow 4x^2-8x+2=0 \Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}$$

Entonces:

Intervalo	$\left(-\infty, 1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$
$f''(x_0)$	$f''(0)=2>0$	$f''(1)=-2e<0$	$f''(2)=2>0$
$f(x)$	Cóncava	Convexa	Cóncava

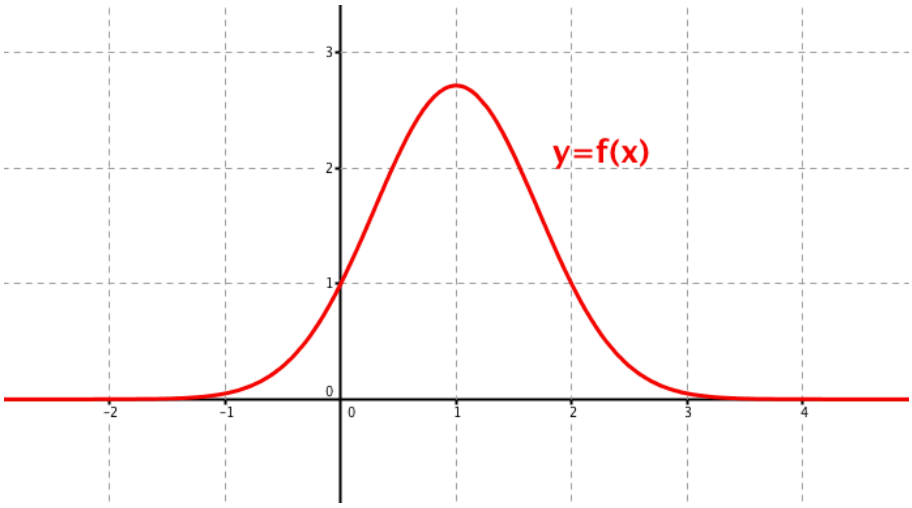
- Puntos de inflexión:

Hay dos puntos de inflexión, en $x=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ y $x=\frac{2+\sqrt{2}}{2}$:

o $f\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=e^{-\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}=\sqrt{e} \Rightarrow \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{e}\right)$

o $f\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=e^{-\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+2\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}=\sqrt{e} \Rightarrow \left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{e}\right)$

Con toda la información recopilada podemos dibujar la gráfica de $f(x)$:



Actividades propuestas

1. Estudia las diferencias del comportamiento en el infinito de las funciones:

$$f(x)=x^2e^{-x^2}\ ,\ g(x)=5x\cdot e^{x-1}\ \text{ y }\ h(x)=\frac{e^x}{x}$$

2. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ verificando que $f'(x)>0\ \forall\, x\in\mathbb{R}$.

a) Analiza el crecimiento y decrecimiento de la función $g(x)=f\left(e^x\right)$.

b) ¿Tiene algún extremo relativo la función $h(x)=e^{-f(x)}$? Justifica las respuestas.

2.5. Funciones logarítmicas

Son funciones de la forma: $f(x) = \ln[F(x)]$

- Sólo están definidas cuando el argumento es estrictamente mayor que cero.
- Teniendo en cuenta que $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$, las raíces de $F(x)$ son asíntotas verticales de $f(x)$.
- Los ceros de $f(x)$ son aquellos valores para los que $F(x) = 1$.
- La función $f(x)$ conserva el resto de aspectos analizables en $F(x)$: dominio, monotonía,…

Actividad resuelta

- *Estudia y representa gráficamente la función* $f(x) = \ln\left(x^2 - 3\right)$.
  - Dominio: El argumento debe ser positivo, por tanto:

$$x^2 - 3 > 0 \Rightarrow x^2 > 3 \Rightarrow |x| > \sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} x < -\sqrt{3} \\ x > +\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \left[-\sqrt{3}, +\sqrt{3}\right] = \left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(+\sqrt{3}, +\infty\right)$$

  - Cortes con los ejes:
    - Eje X: $\ln\left(x^2 - 3\right) = 0 \Rightarrow x^2 - 3 = 1 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$.
    - Eje Y: $x = 0 \notin \text{Dom } f$.
  - Simetría: $x^2 - 3$ es par, luego $f(x)$ también lo es:

$$f(-x) = \ln\left[(-x)^2 - 3\right] = \ln\left(x^2 - 3\right) = f(x) \Rightarrow f(x) \text{ es par}$$

  - Regiones de existencia:

Con el dominio de $f(x)$ y con los cortes con los ejes, tenemos:

Intervalo	$(-\infty, -2)$	$\left(-2, -\sqrt{3}\right)$	$\left(+\sqrt{3}, +2\right)$	$(+2, +\infty)$
$f(x_0)$	$f(-3) = \ln 6 > 0$	$f(-1'9) = -0'5$	$f(1'9) = -0'5$	$f(3) = \ln 6 > 0$
$f(x)$	Positiva	Negativa	Negativa	Positiva

  - Asíntotas:
    - Verticales: Como dijimos, las raíces de $F(x)$ son asíntotas verticales de $f(x)$:

$$\lim_{x \to -\sqrt{3}^-} f(x) = \lim_{x \to -\sqrt{3}^-} \ln\left(x^2 - 3\right) = \ln 0^+ = -\infty \Rightarrow x = -\sqrt{3}$$

$$\lim_{x \to \sqrt{3}^+} f(x) = \lim_{x \to \sqrt{3}^+} \ln\left(x^2 - 3\right) = \ln 0^+ = -\infty \Rightarrow x = +\sqrt{3}$$

    - Horizontales: analizamos los límites en el infinito

$$\lim_{x \to \infty} \ln\left(x^2 - 3\right) = +\infty \Rightarrow \text{No tiene asíntota horizontal}$$

    - Buscamos asíntotas oblicuas.

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\ln\left(x^2 - 3\right)}{x} = 0$$, porque x es dominante frente al logaritmo.

Como $m = 0$, **NO** tiene sentido buscar el valor de n.

Autora: Leticia González Pascual
Revisores: Álvaro Valdés y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

Entonces, $f(x)$ NO tiene asíntotas oblicuas (ni horizontales). Tiene rama parabólica.

- Monotonía: hallamos la derivada:

$$f(x)=\ln\left(x^2-3\right)\Rightarrow f'(x)=\frac{2x}{x^2-3}$$

y la anulamos:

$$f'(x)=\frac{2x}{x^2-3}=0\Rightarrow 2x=0\Rightarrow x=0\notin \text{Dom } f.$$

Así, definimos los intervalos:

Intervalo	$\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)$	$\left(+\sqrt{3},+\infty\right)$
$f'(x_0)$	$f'(-2)=-4<0$	$f'(2)=4>0$
$f(x)$	Decreciente ↘	Creciente ↗

- Máximos y mínimos:

Como $x = 0 \notin \text{Dom } f$, la función no tiene un máximo ni mínimo relativo.

- Curvatura: Hallamos la derivada segunda:

$$f'(x)=\frac{2x}{x^2-3}\Rightarrow f''(x)=\frac{-2x^2-6}{\left(x^2-3\right)^2}$$

e igualamos a cero:

$$\frac{-2x^2-6}{\left(x^2-3\right)^2}=0\Rightarrow -2x^2-6=0\Rightarrow x^2=-3\Rightarrow x\notin\mathbb{R}.$$

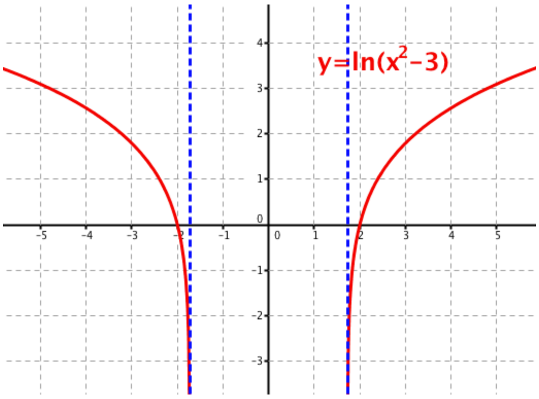
Así, definimos los intervalos:

Intervalo	$\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)$	$\left(+\sqrt{3},+\infty\right)$
$f''(x_0)$	$f''(-2)=-14<0$	$f''(2)=-14<0$
$f(x)$	Convexa	Convexa

- Puntos de inflexión:

Como la derivada segunda no se anula, no hay puntos de inflexión.

Con toda la información recopilada podemos dibujar la gráfica de $f(x)$:



Autora: Leticia González Pascual
Revisores: Álvaro Valdés y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

2.6. Funciones trigonométricas

En cursos anteriores se estudiaron las gráficas de las seis funciones trigonométricas *básicas*, $y = \cos x$, $y = \text{sen } x$, $y = \sec x$, $y = \text{cosec } x$, $y = \text{tg } x$ e $y = \text{cotg } x$, así que no lo repetiremos aquí. Dependiendo de la función analizada, nos encontramos no sólo con los problemas de la función argumento, sino también con las propias peculiaridades de las trigonométricas.

Son tantas las situaciones posibles que pueden darse, que nos limitaremos a casos sencillos.

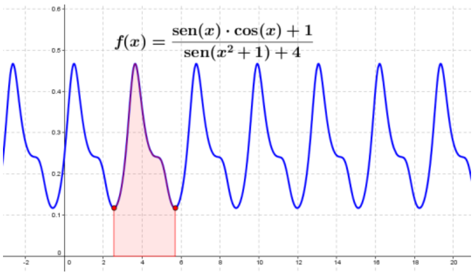
- Para $f(x) = \cos F(x)$ y $f(x) = \text{sen } F(x)$, el dominio de $f(x)$ coincide con el de $F(x)$.

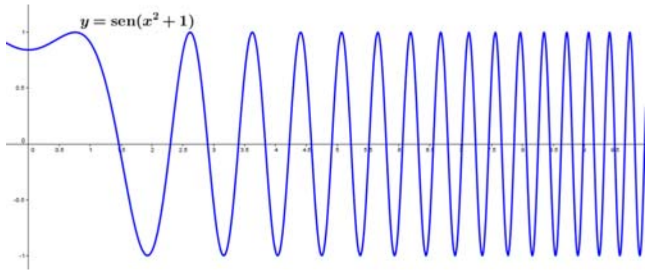
  Para el resto, a las discontinuidades de $F(x)$ se suman las intrínsecas a las trigonométricas:

♦ $f(x) = \text{cosec } F(x)$ y $f(x) = \text{cotg } F(x)$, encontramos asíntotas verticales cuando $F(x) = k\pi$, con $k \in Z$

♦ $f(x) = \sec F(x)$ y $f(x) = \text{tg } F(x)$, encontramos asíntotas verticales cuando $F(x) = \frac{\pi}{2} + k\pi$, con $k \in Z$

- Las funciones serán periódicas, como ya se explicó antes, si solo hay trigonométricas cuyo argumento sean funciones lineales, como vimos en los ejemplos del tema:





  En caso de encontrar periodicidad, podremos analizar únicamente uno de los tramos.

No obstante, con las gráficas de los ejemplos vemos que sólo se pueden analizar dando todos los pasos las funciones muy sencillas. En otro caso, debemos recurrir a las herramientas informáticas.

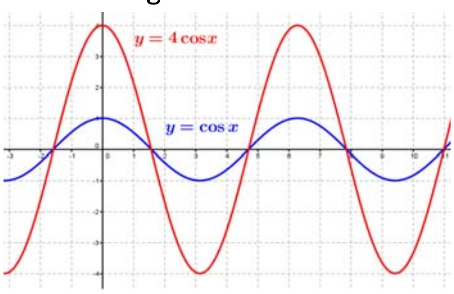
Actividades resueltas

- *Estudia y representa gráficamente la función* $f(x) = 2\cdot\cos 3x$.

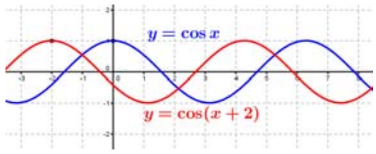
  Método 1:

  El curso pasado analizamos cómo se modificaba la gráfica de las funciones trigonométricas al añadir tres parámetros: $y = \cos x \longrightarrow f(x) = A\cdot\cos(kx+b)$

  - El valor de A modifica la amplitud de la gráfica: $-1 \le \cos x \le 1 \longrightarrow -A \le f(x) \le A$:

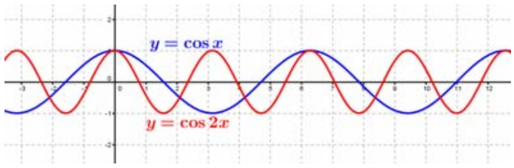


  - "b" desplaza la función b unidades a la izquierda (a la derecha si $b < 0$) en el eje OX:

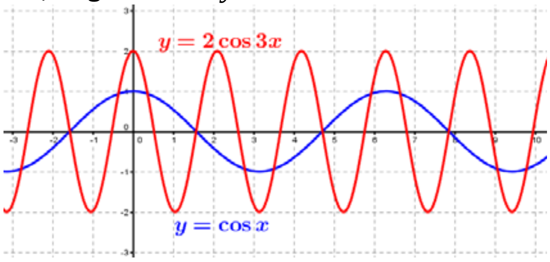


- El valor de k cambia la periodicidad de la función:

$$y = \cos x \,,\, T = 2\pi \longrightarrow f(x) = A \cdot \cos(kx + b) \,,\, T = \frac{2\pi}{k}$$



Combinando todos los pasos, la gráfica de $y = 2\cos 3x$ es:



Método 2:

Seguimos el procedimiento habitual:

- Dominio: La función coseno y el argumento existen para todo $\mathbb{R}$, por tanto:

$$\text{Dom}\, f(x) = \mathbb{R}$$

- Periodicidad: aplicamos la definición

$$f(x) = f(x+T) \Rightarrow 2 \cdot \cos 3x = 2 \cdot \cos 3(x+T)$$
$$\cos 3x = \cos(3x + 3T)$$

Las funciones trigonométricas son periódicas de período 2π, por tanto:

$$3x + 3T = 3x + 2\pi \Rightarrow 3T = 2\pi \Rightarrow T = \frac{2\pi}{3}$$

- Cortes con los ejes:
  - Eje X: $2 \cdot \cos 3x = 0 \Rightarrow \cos 3x = 0 \Rightarrow 3x = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pm\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$, con $k \in Z$.
  - Eje Y: $x = 0 \Rightarrow f(0) = 2 \cdot \cos 0 = 2$.

- Simetría: La función coseno es par, por tanto:

$$f(-x) = 2 \cdot \cos 3(-x) = 2 \cdot \cos(-3x) = 2 \cdot \cos 3x = f(x) \;\rightarrow\; f(x) \text{ también es par.}$$

- Regiones de existencia:

Como la función es periódica, nos basta con estudiar el intervalo $\left(0, \frac{2\pi}{3}\right)$:

Intervalo	$\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$	$\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right)$
$f(x_0)$	$f\left(\frac{\pi}{9}\right) = 2\cos\frac{\pi}{3} > 0$	$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\cos\frac{3\pi}{4} < 0$	$f\left(\frac{5\pi}{9}\right) = 2\cos\frac{5\pi}{3} > 0$
$f(x)$	Positiva	Negativa	Positiva

Autora: Leticia González Pascual
Revisores: Álvaro Valdés y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

- Asíntotas: La función coseno no tiene asíntotas, así que $f(x)$ NO tiene asíntotas.
- Monotonía: hallamos la derivada:

$$f(x) = 2 \cdot \cos 3x \Rightarrow f'(x) = -6 \cdot \operatorname{sen} 3x$$

y la anulamos:

$$-6 \cdot \operatorname{sen} 3x = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} 3x = 0 \Rightarrow 3x = k\pi \Rightarrow x = \tfrac{k\pi}{3}, \text{ con } k \in Z .$$

Así, definimos los intervalos:

Intervalo	$\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$	$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$
$f'(x_0)$	$f'\left(\frac{\pi}{9}\right) = -6 \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} < 0$	$f'\left(\frac{5\pi}{9}\right) = -6 \operatorname{sen} \frac{5\pi}{3} > 0$
$f(x)$	Decreciente ↘	Creciente ↗

- Máximos y mínimos:

En este caso, los puntos en los que se anula la derivada primera son $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{3}$, para los que vemos que son, respectivamente, máximo y mínimo relativo.

Los confirmamos con la derivada segunda:

$$f'(x) = -6 \cdot \operatorname{sen} 3x \Rightarrow f''(x) = -18 \cdot \cos 3x$$

y vemos que:

$$f''(0) = -18 < 0 \Rightarrow \text{Máximo} \quad \text{y} \quad f''\left(\tfrac{\pi}{3}\right) = +18 > 0 \Rightarrow \text{mínimo}$$

- Curvatura: Calculamos la derivada segunda y la igualamos a cero:

$$-18 \cos 3x = 0 \Rightarrow \cos 3x = 0 \Rightarrow 3x = \pm\tfrac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow x = \pm\tfrac{\pi}{6} + \tfrac{2k\pi}{3}, \text{ con } k \in Z .$$

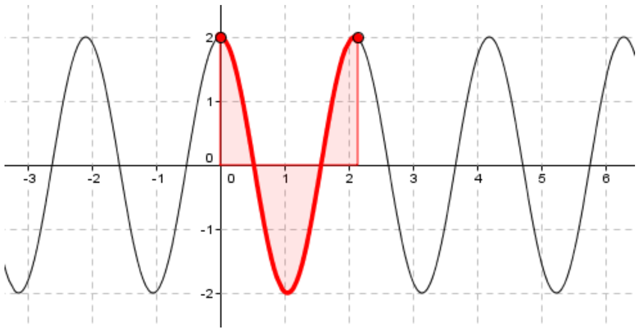
Así, definimos los intervalos:

Intervalo	$\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$	$\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right)$
$f''(x_0)$	$f''\left(\frac{\pi}{9}\right) > 0$	$f''\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0$	$f''\left(\frac{5\pi}{9}\right) > 0$
$f(x)$	Cóncava	Convexa	Cóncava

- Puntos de inflexión:

Las raíces de la función son los puntos de inflexión de abscisa: $x = 0, \pi/6, \pi/2\ldots$

Con toda la información recopilada podemos dibujar la gráfica de $f(x)$, aprovechando la periodicidad. A partir del recinto coloreado, obtenemos la función completa:



Igual que con las funciones polinómicas de grado dos (parábolas), es más cómodo seguir el procedimiento particular que el general.

Autora: Leticia González Pascual
Revisores: Álvaro Valdés y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

2.7. Funciones definidas a trozos

Para representar una función definida a trozos, hay que estudiar cada una de las funciones que la definen en los intervalos correspondientes.

Actividad resuelta

- *Estudia y representa gráficamente la función*

$$f(x)=\begin{cases} -x & \text{si} \quad x\le -1 \\ x^2 & \text{si} \quad -1\le x\le 1 \\ x & \text{si} \quad x\ge 1 \end{cases}.$$

- Análisis general: Las tres funciones implicadas existen y son continuas para cualquier valor de x, así que basta con analizar los puntos donde cambia la definición de la función:
- Veamos si la función es continua. Estudiamos la continuidad en $x = -1$ y en $x = +1$:

Continuidad en $x = -1$	**Continuidad en $x = +1$**
$\exists\ f(-1)\,?\qquad f(-1)=1$	$\exists\ f(+1)\,?\qquad f(+1)=1$
$\exists \lim\limits_{x\to -1} f(x)\,?$	$\exists \lim\limits_{x\to +1} f(x)\,?$
$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}(-x)=+1\\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\left(x^2\right)=+1\end{array}\right\}\Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to -1} f(x)$	$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to +1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to +1^-}\left(x^2\right)=+1\\ \lim\limits_{x\to +1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to +1^+} x=+1\end{array}\right\}\Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to +1} f(x)$
$f(-1)=\lim\limits_{x\to -1} f(x)\,?$	$f(+1)=\lim\limits_{x\to +1} f(x)\,?$
$f(-1)=\lim\limits_{x\to -1} f(x)=1$	$f(+1)=\lim\limits_{x\to +1} f(x)=1$
$\Rightarrow f(x)$ es continua en $x = -1$	$\Rightarrow f(x)$ es continua en $x = +1$

Tenemos que $f(x)$ es continua en $x = -1$ y en $x = +1$, luego es continua en todo $\mathbb{R}$. Para representarla, aprovechamos las características especiales de las tres funciones:

- Si $x \le -1$, la función es una recta decreciente. Para representarla, basta con tomar un par de puntos, siendo uno de ellos el extremo derecho:

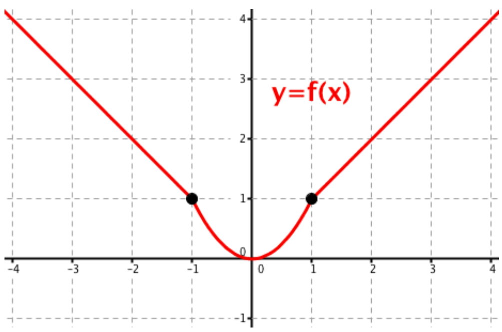
x	-4	$+4$
y	-4	$+4$

- Si $-1 \le x \le +1$, la función es una parábola. Tiene el vértice en el origen, y es abierta por arriba.

x	-1	0	$+1$
y	$+1$	0	$+1$

- Si $x \ge +1$, la función es una recta creciente. Tomamos un par de puntos:

x	$+1$	$+4$
y	$+1$	$+4$

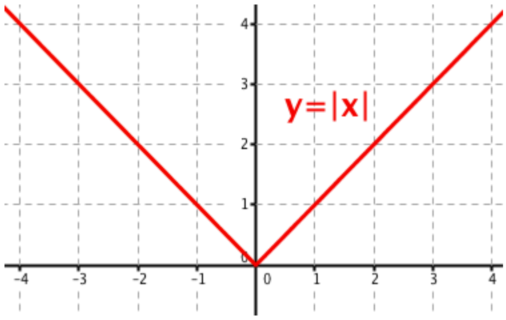


Autora: Leticia González Pascual
Revisores: Álvaro Valdés y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

2.9. Funciones con valor absoluto

La función **valor absoluto** es una función definida a trozos:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{si} \quad x < 0 \\ +x & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$



Y su característica principal es que nunca es negativa. La generalización de la función:

$$f(x) = |F(x)| = \begin{cases} -F(x) & \text{si} \quad F(x) < 0 \\ +F(x) & \text{si} \quad F(x) \geq 0 \end{cases}$$

implica analizar cada uno de los *trozos* para determinar cuándo $F(x)$ es negativa o, si el valor absoluto afecta a toda la expresión algebraica, bastará dibujar la gráfica de la función sin el valor absoluto y transformar su parte negativa en positiva.

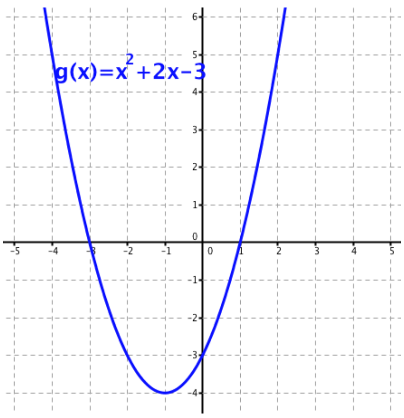
Actividad resuelta

- *Estudia y representa gráficamente la función* $f(x) = |x^2 + 2x - 3|$
  - Como el valor absoluto afecta a toda la función, representamos la función sin él:

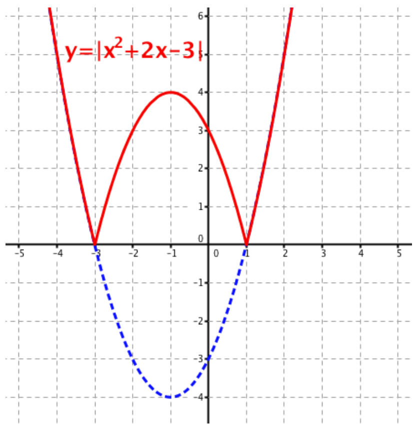
$$g(x) = x^2 + 2x - 3$$

  - Su representación gráfica es una parábola, por tanto:
    - Calculamos el vértice: $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2 \cdot 1} = -1 \Rightarrow g(-1) = -4 \Rightarrow V : (-1, -4)$
    - Como el término principal es positivo, $a = 1 > 0$, la parábola tiene forma de “U”.
    - Corta a los ejes en:
      - Eje OY: $x = 0 \Rightarrow g(0) = -3 \Rightarrow (0, -3)$
      - Eje OX: $g(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = +1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-3,\ 0) \\ (+1,\ 0) \end{cases}$
    - Hallamos $f(-2)$ con la simetría respecto a la vertical que pasa por el vértice:

X	–3	–2	**–1**	0	+1
Y	0	–3	**–4**	–3	0



Una vez representada la función sin el valor absoluto, dibujamos las partes negativas como positivas, haciendo una simetría respecto del eje X:



Autora: Leticia González Pascual
Revisores: Álvaro Valdés y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

CURIOSIDADES. REVISTA

María Gaetana Agnesi (1718 - 1799)

María Gaetana Agnesi es una matemática italiana cuya obra más importante, *Instituciones Analíticas*, fue traducida a varios idiomas y utilizada para aprender Matemáticas durante más de cincuenta años en muchos países de Europa. En ella trataba con sencillez y claridad temas, tan novedosos entonces, como el Cálculo Diferencial e Integral. Al final de su vida era famosa en toda Europa como una de las mujeres de ciencia más capaces del siglo XVIII. Un cráter de Venus lleva su nombre en su honor. En la Biblioteca Ambrosiana de Milán se guardan sus obras inéditas que ocupan veinticinco volúmenes.

Nació en Milán, en su país, al contrario que en otros países europeos, sí se aceptaba que las mujeres recibieran educación, y ella tuvo una esmerada formación. Fue una niña precoz y dotada, que con cinco años hablaba francés, y con nueve, conocía siete lenguas: italiano, latín, francés, griego, hebreo, alemán y español, por lo que recibió el apelativo de "Oráculo de siete idiomas".

Su padre, D. Pietro, era profesor en la Universidad de Bolonia. Tuvo 21 hijos e hijas, siendo María, la mayor. A D. Pietro le gustaba mostrar el talento de sus hijos en las reuniones que organizaba en sus salones. Muy pronto los sabios y eruditos y los intelectuales locales, empezaron a asistir al salón de los Agnesi para oír las disertaciones de María sobre temas filosóficos, científicos y matemáticos. A la edad de nueve años María estuvo durante una hora, ante una asamblea culta hablando en latín sobre el derecho de la mujer a estudiar ciencias y sobre cómo las artes liberales no eran contrarias al sexo femenino.

María nunca se casó. A los 21 años, quiso entrar en un convento. A instancias de su padre decidió quedarse en casa y consagrarse a las Matemáticas. El álgebra y la geometría, declaraba, son las únicas partes del pensamiento donde reina la paz.

Se considera a María la primera profesora de universidad ya que en 1748 se encargó de los cursos de su padre y dos años más tarde, en otoño de 1750, después de publicar su obra de las *Instituciones analíticas*, el Papa le dio el nombramiento para ocupar la cátedra de matemáticas superiores y filosofía natural de la Universidad de Bolonia.

Su libro, ***Instituzioni Analitiche***, fruto de diez años de trabajo, lo había comenzado con 20 años y lo terminó antes de cumplir los 30, con un total de unas mil páginas.

Autora: Leticia González Pascual
Revisores: Álvaro Valdés y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

La curva de Agnesi

María, como hemos visto, fue reconocida como matemática en su época, y sin embargo su reputación histórica fue distorsionada por el hecho de que, en sus *Instituzioni Analitiche,* trabajara con la "*curva de Agnesi*" o curva sinusoidal versa, "*versiera*" en italiano, que significa "virar", "girar", que se tradujo al inglés, por un error del traductor, por "*avversiera*", como la "*bruja de Agnesi*". Colson, profesor de Cambridge, *"encontró este trabajo tan excelente que, a una edad avanzada, decidió aprender italiano con el único fin de traducir ese libro y que la juventud inglesa pudiera beneficiarse de él, como lo hacen los jóvenes de Italia"*, tan excelente juzgaba la obra.

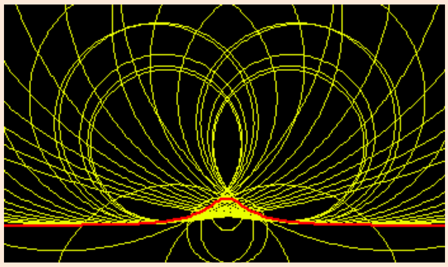
La curva de Agnesi es el lugar geométrico de los puntos P que están a igual distancia de la recta u que el punto M, y a la misma distancia de la recta r que el punto N, cuando M recorre la circunferencia.

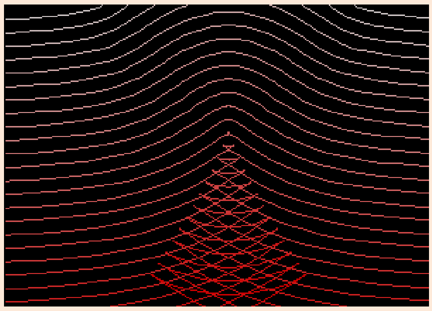
Su ecuación es:

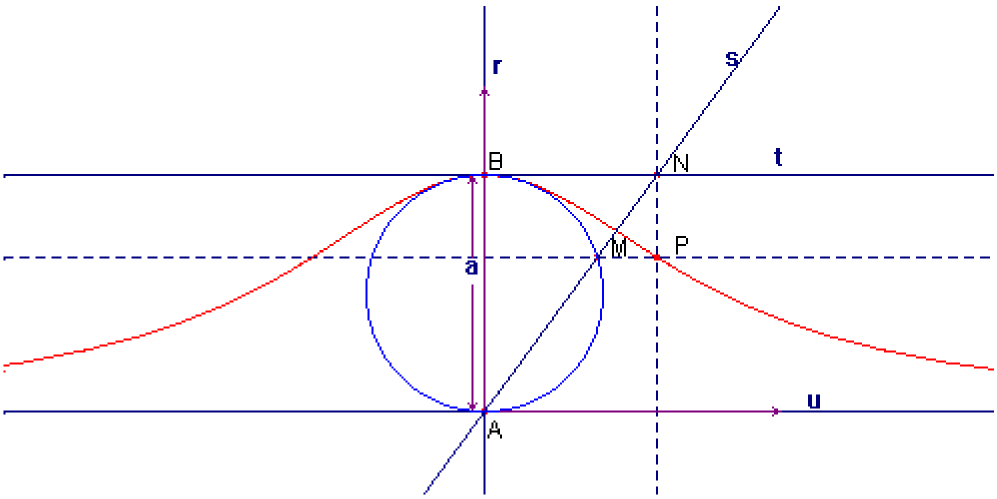
$$y = \frac{a^3}{x^2 + a^2}$$

Función que ya sabes dibujar. Es una función par, creciente para $x < 0$ y decreciente para $x > 0$, por lo que tiene un máximo en el punto $(0, a)$.

Tiene a $y = 0$ como asíntota horizontal.







Esta curva, fue discutida por *Fermat* en 1703.

Se ha establecido recientemente que es una aproximación de la distribución del espectro de la energía de los rayos X y de los rayos ópticos, así como de la potencia disipada en los circuitos de alta frecuencia de resonancia.

Autora: Leticia González Pascual
Revisores: Álvaro Valdés y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

Función de Dirichlet

La **función de Dirichlet** es una función que **no es continua** en ninguno de sus puntos.

Se define: $f(x) = \begin{cases} 1 & para\ x\ racional \\ 0 & para\ x\ irracional \end{cases}$

Dirichlet

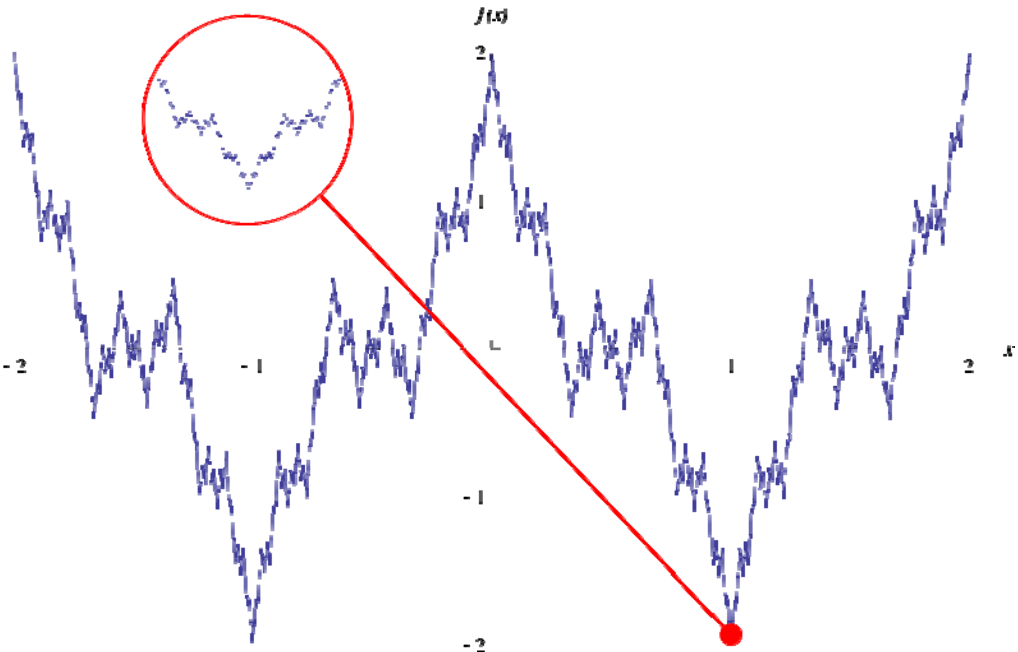
Dirichlet (1805 – 1859) es un matemático alemán que trabajó con *Fourier* para intentar explicar cómo era posible que una función pudiera representarse como una suma infinita de funciones trigonométricas, lo que *Fourier* había demostrado experimentalmente en sus estudios sobre el calor, pero que todavía no se podía explicar matemáticamente.

Fourier

Función de Weierstrass

La **función de *Weierstrass*** es **continua** en todo punto y **no es derivable** en ningún punto.

Tiene dimensión fractal mayor que uno.



Función de Weierstrass. Fuente: Wikipedia

Autora: Leticia González Pascual
Revisores: Álvaro Valdés y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

RESUMEN

Para representar una función seguiremos los siguientes pasos:	
1. Dominio	Descartaremos denominadores nulos, raíces de orden par de números negativos y logaritmos cuyo argumento sea menor o igual que cero.
2. Cortes con los ejes	Intentaremos resolver: • Corte con el eje OY: Si $x = 0 \in \text{Dom}\, f \Rightarrow (0, f(0))$ • Corte/s con el eje OX: $y = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow \{(x_1,0),(x_2,0),\ldots,(x_k,0)\}$
3. Simetría	Diremos que: • $f(x)$ es **par** si $f(-x) = f(x)$, y $f(x)$ tiene simetría especular respecto a OY. • $f(x)$ es **impar** si $f(-x) = -f(x)$, y $f(x)$ es simétrica respecto al origen.
4. Periodicidad	$f(x) = f(x+T)\ \forall x \in \text{Dom}\, f$
5. Asíntotas	• **Verticales**: $x = a$ es una asíntota vertical si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ • **Horizontales**: $y = k$ es una asíntota horizontal si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = k \in \mathbb{R}$. • **Oblicuas**: $y = m \cdot x + n$ es una asíntota oblicua si $m = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \in \mathbb{R}^*$ $\quad n = \lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - m \cdot x] \in \mathbb{R}$
6. Monotonía	• $f(x)$ es **creciente** en los intervalos donde $f'(x) > 0$. • $f(x)$ es **decreciente** en los intervalos donde $f'(x) < 0$.
7.Puntos críticos	Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) > 0$ entonces $(a, f(a))$ es un mínimo relativo. Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) < 0$ entonces $(a, f(a))$ es un máximo relativo.
8. Curvatura	• $f(x)$ es **cóncava** en los intervalos donde $f''(x) > 0$. • $f(x)$ es **convexa** en los intervalos donde $f''(x) < 0$.
9. Puntos de inflexión	Si la función $y = f(x)$ tiene un **punto de inflexión** en $x = a$, y existe la segunda derivada, entonces $f''(a) = 0$

En los casos *degenerados* en los que se anulan las derivadas sucesivas $f'(a)$ y $f''(a)$, seguiremos derivando hasta encontrar una derivada n–sima no nula, $f^{n)}(a) \neq 0$. Entonces:

- Si n = par, $x = a$ es un **máximo relativo** si $f^{n)}(a) < 0$ y un **mínimo relativo** si $f^{n)}(a) > 0$.
- Si n = impar, $x = a$ es un **punto de inflexión**.

Autora: Leticia González Pascual
Revisores: Álvaro Valdés y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

1.- Estudia y representa las siguientes funciones:

a) $f(x)=x^3-3x^2+2$ b) $f(x)=x^4+2x^3$ c) $f(x)=-x^4+2x^2+3$

d) $f(x)=x-\dfrac{1}{x}$ e) $f(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$ f) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$

g) $f(x)=\dfrac{0{,}5x^3}{x^2-4}$ h) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-4}$ i) $f(x)=x^2e^x$

j) $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$ k) $f(x)=x^2e^{-x}$ l) $f(x)=\sqrt{x^2-1}$

m) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$ n) $f(x)=\ln(x^2+1)$ ñ) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

2.- Considera la función $f(x)=2x^3+9x^2+12x+1$

a) Estudia su crecimiento y halla sus máximos y mínimos.

b) Estudia su curvatura y obtén sus puntos de inflexión.

3.- Halla los máximos, mínimos y puntos de inflexión de la función $f(x)=(x-2)^2(x+1)$. Indica dónde es creciente, decreciente, cóncava y convexa.

4.- Representa gráficamente y estudia la continuidad de la función:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x<-\dfrac{1}{2}\\ -x^2+3x & \text{si} \quad -\dfrac{1}{2}\le x\le 3\\ |x+3| & \text{si} \quad x>3\end{cases}$$

5.- Representa gráficamente la función $f(x)=\dfrac{|x-2|}{|x-1|}-1$, estudiando su continuidad.

6.- Un heladero ha comprobado que, a un precio de 50 céntimos de euro la unidad, vende una media de 200 helados diarios. Por cada céntimo que aumenta el precio, vende dos helados menos al día. Si el coste por unidad es de 40 céntimos, ¿a qué precio de venta es máximo el beneficio diario que obtiene el heladero? ¿Cuál será ese beneficio?

7.- La producción de cierta hortaliza en un invernadero ($Q(x)$ en kg) depende de la temperatura (x en °C) según la expresión $Q(x)=(x+1)^2(32-x)$.

a) Calcula razonadamente cuál es la temperatura óptima a mantener en el invernadero.

b) ¿Qué producción de hortaliza se obtendría?

8.- Una huerta tiene actualmente 24 árboles, que producen 600 frutos cada uno. Se calcula que por cada árbol adicional plantado, la producción de cada árbol disminuye en 15 frutos. ¿Cuál debe ser el número total de árboles que debe tener la huerta para que la producción sea máxima? ¿Cuál será esa producción?

9.- Un depósito abierto de latón con base cuadrada y capacidad para 4000 litros, ¿qué dimensiones debe tener para que su fabricación sea lo más económica posible?

10.- Se quiere fabricar una caja de volumen máximo que sea el doble de larga que de ancha y que, además, la suma del ancho más el largo más el alto sea igual a un metro. Calcula las medidas que debe tener la caja y cuál será su volumen.

11.- Se desea construir el marco de una ventana rectangular de 6 m^2 de superficie. El metro lineal de tramo horizontal cuesta 2,50 euros y el del tramo vertical 3 euros.

a) Calcula las dimensiones de la ventana para que el coste del marco sea mínimo.

b) ¿Cuál será ese coste mínimo?

12.- Se quiere construir un recipiente cónico cuya generatriz mida 10 cm y que tenga capacidad máxima. ¿Cuál debe ser el radio de la base?

13.- Dos postes de 12 m y 18 m de altura distan entre sí 30 m. Se desea tender un cable que una un punto del suelo entre los dos postes con los extremos de estos. ¿Dónde hay que situar el punto del suelo para que la longitud total del cable sea mínima?

14.- Determina el radio de la base y la altura de un cilindro de 54 cm^2 de área total para que su volumen sea máximo.

15.- En la oficina central de Correos de cierto país están expuestas las tarifas del servicio de cartas, que son las siguientes:

– Cartas hasta 20 gramos de peso: 17 céntimos de euro.

– Por cada 10 g o fracción de exceso de peso hay que añadir 5 céntimos más.

a) Escribe la fórmula de la función $y = f(x)$ (donde x representa el peso de cada carta en gramos e y el precio que se tiene que pagar para enviarla), hasta 50 g.

b) Representa gráficamente la función e indica en qué puntos de su dominio es discontinua y por qué.

16.- El coste total de producción de x unidades de un producto es $C(x) = \frac{1}{3}x^2 + 6x + 192$. Se define la función coste medio por unidad como:

$$C_m(x) = \frac{C(x)}{x}$$

¿Cuántas unidades hay que producir para que el coste por unidad sea mínimo?

Autora: Leticia González Pascual
Revisores: Álvaro Valdés y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

17.- Una franquicia de tiendas de moda ha estimado que sus beneficios semanales (en miles de euros) dependen del número de tiendas que tiene en funcionamiento (n) de acuerdo con la expresión:

$$B(n) = -8n^3 + 60n^2 - 96n\,.$$

Determinar razonadamente:

a) El número de tiendas que debe tener para maximizar sus beneficios.

b) El valor de dichos beneficios máximos.

18.- Sea la función $y = 2\sqrt{\dfrac{2}{x} - 1}$

a) Indica dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento, puntos de inflexión y asíntotas.

b) Realiza la representación gráfica de la misma.

19.- Sea la función $f(x) = \begin{cases} -(x+4)^2 + 4 & si \quad x < -2 \\ x^2 - 4 & si \quad x \geq -2 \end{cases}$

a) Dibuja su gráfica aproximada y analiza su continuidad y derivabilidad.

b) Calcula los máximos y mínimos absolutos y relativos de la función en el intervalo $[-8,8]$.

20.- Obtén y representa una función polinómica de tercer grado $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tal que tenga un mínimo en el punto $(1,1)$ y un punto de inflexión en el punto $(0,3)$.

21.- La puntuación obtenida por un estudiante en un examen depende del tiempo que haya dedicado a su preparación (x, expresado en horas) en los siguientes términos:

$$G(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{3} & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 15 \\ \dfrac{2x}{0{,}2x + 3} & \text{si} \quad x > 15 \end{cases}$$

a) Estudia y representa la función. Si un estudiante ha dedicado menos de 15 horas a preparar el examen, justifica que no aprobará, esto es, que obtendrá menos de 5 puntos.

b) Justifica que la puntuación nunca puede ser superior a 10 puntos.

AUTOEVALUACIÓN

1. El dominio de definición de la función $f(x) = 2^{\frac{sen(x+3)}{x^2-4}}$ es:

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-2, +2\}$ b) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-3\}$ c) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{4\}$ d) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{\pi/2\}$

2. Los puntos de intersección con los ejes coordenados de la función $f(x) = \dfrac{(x-1)(x+4)}{(x-3)}$ son:

a) (–1, 0), (4, 0), (0, –4/3) b) (3, 0), (0, 4) c) (1, 0), (–4, 0), (0, 4/3) d) (1, 0), (4, 0), (0, –4/3)

3. Indica cuál de las siguientes funciones no tiene ningún tipo de simetría:

a) $y = x^2$ b) $y = x^3$, c) $y = e^x$ d) $y = sen(x)$

4. Las asíntotas de la función $f(x) = \dfrac{(x-2)(x-1)}{(x-3)(x-4)}$ son:

a) $x = 3$, $x = 4$, $y = 1$ b) $x = 2$, $x = 1$, $y = 1$ c) $x = -3$, $x = -4$, $y = 1/6$ d) $x = 3$, $x = 4$, $y = x-2$

5. La función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & x < 0 \\ x^3 - 12x + 1 & x \geq 0 \end{cases}$ tiene máximos y mínimos en los puntos de abscisa siguientes:

a) $x = 0$, $x = 2$ b) $x = 2$ c) $x = 3$, $x = 2$ d) $x = 0$, $x = 2$, $x = -2$

6. La función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & x < 0 \\ x^3 - 6x^2 + 1 & x \geq 0 \end{cases}$ tiene un punto de inflexión en el punto de abscisa:

a) $x = 2$ b) $x = 0$ c) $x = 3$ d) $x = -2$

7. Indica cuál de las siguientes afirmaciones es falsa:

a) El dominio de las funciones polinómicas es siempre toda la recta real

b) Las funciones definidas a trozos nunca son continuas

c) Las funciones exponenciales están definidas en la misma región que su exponente

d) Las funciones: $y = e^x$; $y = sen(x)$; $y = cos(x)$ están definidas en toda la recta real

8. La función $f(x) = \sqrt{\dfrac{(x-2)(x-1)}{(x-3)(x-4)}}$ no está definida en los intervalos indicados:

a) (1, 2), (3, 4) b) [1, 2], [3, 4] c) [1, 2], (3, 4) d) (1, 2), [3, 4]

9. La función $f(x) = \ln\left(\dfrac{(x-2)(x-1)}{(x-3)(x-4)}\right)$ tiene como asíntota horizontal:

a) $y = 0$ b) $y = 1$ c) No tiene d) $y = 1/6$

10. La función $f(x) = 2 \cdot \cos 3x$ tiene como amplitud y periodo:

a) $A = 2$, $T = 2\pi/3$ b) $A = 3$, $T = \pi$ c) $A = 4$, $T = 2\pi/3$ d) $A = 2$, $T = 2\pi$

Autora: Leticia González Pascual
Revisores: Álvaro Valdés y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

Apéndice: Problemas de funciones en las P.A.A.U.

(1) Considera la función:

$$f(x)=\frac{x^3+3x^2-4}{x^2}$$

a) Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus extremos relativos.

b) Determina sus asíntotas.

c) Dibuja la gráfica de $y=f(x)$.

(2) Dada la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^2e^{-x^2}$

a) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

b) Halla, si existen, los máximos y mínimos de la función.

c) Dibuja aproximadamente su gráfica.

(3) Se considera la función real $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$, donde a, b y c son números reales. Encuentra los valores de a, b y c para los que las rectas tangentes a la gráfica de $f(x)$ en los puntos de abscisas $x=2$ y $x=4$ sean paralelas al eje OX, sabiendo además que el punto de inflexión de la gráfica de $f(x)$ está en el eje OX.

(4) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por: $f(x)=\begin{cases} x^3-x^2 & si \quad x\le 1 \\ ax+b & si \quad x>1 \end{cases}$

a) Calcula los valores de a y b para que la función sea derivable en todos los números reales.

b) Para esos valores de a y b halle los extremos de la función y dibuje su gráfica.

(5) Sea la función $f(x)=\begin{cases} x^2+6x+8 & si \quad x\le -2 \\ 2x+4 & si \quad -2<x\le 0 \\ a\cos x & si \quad x>0 \end{cases}$

a) Estudia su continuidad en toda la recta real en función de a.

b) Estudia su derivabilidad en toda la recta real en función de a.

c) Para $a=4$, haz un dibujo aproximado de su gráfica.

(6) Se considera la función $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2}$

a) Estudia el dominio de definición y calcule las asíntotas.

b) Estudia los intervalos de crecimiento, decrecimiento, concavidad y convexidad.

c) Halla los máximos, mínimos y puntos de inflexión.

d) Esboza la gráfica de la función.

Autora: Leticia González Pascual
Revisores: Álvaro Valdés y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

(7) Sabiendo que $f(x)=\begin{cases} 4 & si \quad x\le 0 \\ 4-x^2 & si \quad x>0 \end{cases}$

a) Estudia su continuidad en el punto $x=0$.

b) Usando la definición de derivada calcula, si existe, la derivada de la función *f* en $x=0$.

c) Dibuja la gráfica de la función.

(8) Dada la función $y=5x\cdot e^{x-1}$

a) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

b) Halla, si existen, los máximos, mínimos y puntos de inflexión.

c) Dibuja aproximadamente su gráfica.

(9) Sea $f(x)=\dfrac{x^2-5x+7}{x-3}$

a) Determina el dominio de definición, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos, mínimos y puntos de inflexión.

b) Halla las asíntotas y represente aproximadamente la gráfica de la función.

(10) Sea la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{(x-1)^2(x+1)}{x^2-1} & si \quad x<1 \quad x\ne -1 \\ -x^2+3x-2 & si \quad x\ge 1 \end{cases}$.

a) Halla un valor de la función en $x=-1$ que la haga continua en ese punto.

b) Analiza su continuidad y derivabilidad en toda la recta real.

c) Traza su gráfica aproximada.

(11) Representa la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x-3}$ analizando el dominio de existencia, el crecimiento y el decrecimiento, los máximos y los mínimos, la concavidad y la convexidad, los puntos de inflexión y las asíntotas.

(12) a) Representa gráficamente las funciones $f(x)=x^2-4x+3$ y $g(x)=|x|$.

b) Utiliza las gráficas anteriores para obtener las de las funciones $y=f(g(x))$ e $y=g(f(x))$.

(13) Un modelo simplificado de la altura a la que se encuentra un proyectil conduce a la siguiente expresión ($f(x)$ representa la altura, en metros, a la que se encuentra el proyectil a los *x* segundos de ser lanzado):

$$f(x)=250-\frac{250}{x+1}-10x, \quad 0\le x\le 24$$

a) Dibuja la gráfica de la función. ¿En qué instante el proyectil empieza a caer?

b) ¿Podríamos derribar con él un objeto que vuela a 250 metros de altura?

Autora: Leticia González Pascual
Revisores: Álvaro Valdés y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

(14) a) Calcula para qué valor de α la función $f(x)=(x-\alpha)^2+\cos(x)$ tiene un extremo en el punto de abscisa $x=0$. ¿De qué tipo de extremo se trata?

b) Para el valor de α calculado, determina los cortes de la curva con los ejes y los dominios de monotonía.

(15) El tiempo que un empleado tarda en realizar una tarea varía durante los cuatro primeros meses de contrato según su experiencia. Así, la función que relaciona el tiempo empleado en realizar la tarea con la experiencia del operario es ($f(x)$ representa el tiempo, en horas, que tarda en realizar la tarea un empleado que lleva contratado un tiempo x, medido en meses):

$$f(x)=\begin{cases} 12-x^2 & si \quad 0<x\le 2 \\ (x-4)^2+4 & si \quad 2<x\le 4 \end{cases}$$

a) Representa gráficamente la función *f*. ¿Es el tiempo necesario para realizar la tarea una función continua del tiempo de experiencia?

b) ¿En qué momento el tiempo necesario para realizar la tarea es mínimo? ¿Cuánto tiempo le lleva finalizar la tarea en ese instante? ¿Consigue el empleado finalizar la tarea en menos de 3 horas en algún momento durante los primeros cuatro meses de contrato?

(16) Para un determinado modelo de coche la relación existente entre la velocidad a la que circula y el consumo viene dada a través de la siguiente expresión ($f(x)$ representa el consumo en litros cada 100 km a una velocidad de x km/h):

$$f(x)=2+\frac{x}{90}+\frac{90}{x}, x>10$$

a) Dibuja la gráfica de la función. ¿Cuál es la velocidad óptima a la que se debe circular para consumir la menor cantidad de combustible posible?

b) ¿En algún instante el consumo aumenta al aumentar la velocidad? ¿Es posible conducir con un consumo de 3 litros cada 100 km?

(17) El porcentaje de ocupación de una cafetería entre las 13 y las 21 horas se explica bastante bien por la siguiente función ($P(x)$ representa el porcentaje de ocupación a las x horas).

$$P(x)=(x^2-55x)\cdot(x+1)+1015x-5542, \quad 13\le x\le 21$$

a) Indica los intervalos de tiempo en que la ocupación crece y aquellos en que decrece.

b) Dibuja la función. ¿Cuándo se alcanza el porcentaje de ocupación más alto? ¿y el más bajo? ¿Cuánto valen?

c) ¿La función tiene algún máximo o mínimo relativo que no sea absoluto?

(18) Dado $a\in\mathbb{R}$, se considera la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x^2-3ax-6}{x-3} & si \quad x<3 \\ x^2-1 & si \quad x\ge 3 \end{cases}$.

a) Determina los valores de a para los que la función es continua.

b) Representa gráficamente la función para los valores hallados en el apartado a).

Autora: Leticia González Pascual
Revisores: Álvaro Valdés y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP