Matemáticas II. 2º Bachillerato. Capítulo 4: Geometría en el espacio – Vectores

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Leticia González Pascual y Álvaro Valdés Menéndez

Revisora: Milagros Latasa

Todas las imágenes han sido creadas por los autores utilizando *sofware* libre (GeoGebra y GIMP)

Índice

Resumen

En este capítulo vamos a estudiar los vectores en el espacio de dimensión tres, que tienen muchas aplicaciones tanto en Geometría como en Física.

Ya conoces de los vectores en dimensión dos, el módulo de un vector que usábamos para calcular distancias, y el ángulo entre dos vectores, que usábamos para medir ángulos. Volveremos a estudiarlos ahora en dimensión tres.

Mediante el producto vectorial, que sólo es posible en dimensión tres, calcularemos áreas, y con el producto mixto, volúmenes.

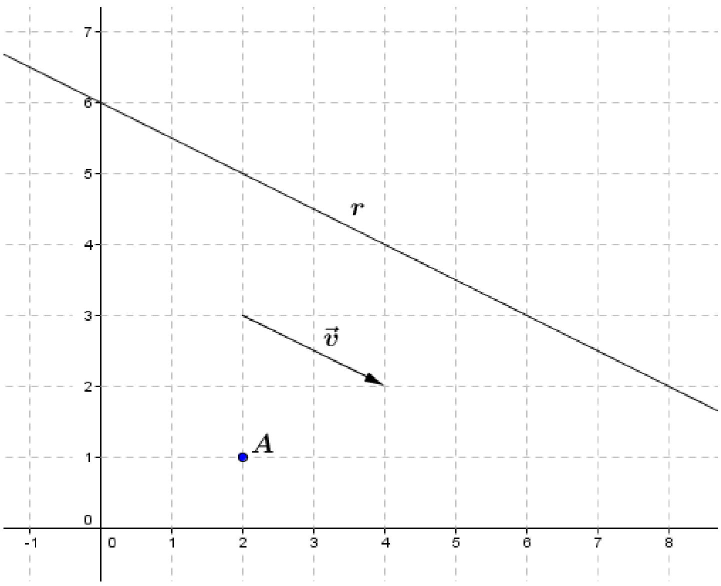
Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

1. GEOMETRÍA DEL PLANO

A lo largo de los cursos pasados estudiamos la geometría del plano, con los siguientes elementos fundamentales:

- **Punto**: Posición en el plano que, por convenio, definimos como adimensional (no tiene largo, ancho ni profundidad). Para representarlo algebraicamente utilizamos letras mayúsculas, por ejemplo hablamos de un punto A, y se caracteriza mediante dos valores que denominamos x e y, representados por el par ordenado: (x, y). y que llamamos **coordenadas** del punto.
- **Vector (o vector libre)**: Viene dado por un par de valores llamados **componentes** (o coordenadas) del vector que escribimos como (v_1, v_2) en general o (v_x, v_y) si estamos en un sistema cartesiano. Lo caracteriza su módulo, dirección y sentido.
- **Recta**: figura en el plano que únicamente tiene longitud, no tiene anchura ni profundidad. Se suele representar con una letra minúscula, habitualmente r, y se define a partir de un punto P (x_P, y_P) y un vector $\vec{v} = (v_x, v_y)$. Algebraicamente se obtienen diferentes ecuaciones:
    - Vectorial: $(x, y) = (x_P, y_P) + \lambda \cdot (v_x, v_y)$
    - Paramétricas: $\begin{cases} x = x_P + \lambda \cdot v_x \\ y = y_P + \lambda \cdot v_y \end{cases}$
    - Continua: $\dfrac{x - x_P}{v_x} = \dfrac{y - y_P}{v_y}$
    - General o implícita: $A\,x + B\,y + C = 0$

Ejemplo



En la imagen vemos el punto A, de coordenadas $(2, 1)$, el vector $\vec{v}$, de componentes $(2, -1)$, y la recta r, de ecuación $x + 2y = 12$.

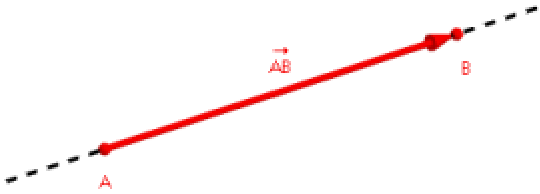
En este capítulo y los siguientes ampliaremos esos elementos hacia las tres dimensiones, generalizando los conceptos anteriores y añadiendo otros nuevos.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

2. VECTORES EN EL ESPACIO

2.1. Definición

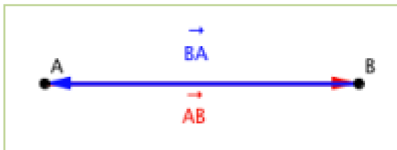
Un **vector fijo** en el espacio es un segmento orientado que viene determinado por un par de puntos, el origen A y el extremo B.



Los elementos de un vector son los siguientes:

- **Módulo:** Es la longitud del segmento orientado que lo define. El módulo de un vector será un número positivo, a excepción del vector nulo, que tendrá módulo cero.
- **Dirección:** Es la dirección de la recta que contiene al vector o cualquier recta paralela a ella. Dos vectores tendrán la misma dirección si están situados sobre la misma recta o sobre rectas paralelas.
- **Sentido:** Es la forma de recorrer el segmento AB, es decir, de fijar qué punto es el origen y cuál el extremo.

En el conjunto de los vectores libres podemos definir una relación de equivalencia, diciendo que pertenecen a la misma clase aquellos vectores fijos de igual módulo, dirección y sentido. Todos los vectores fijos de igual módulo, dirección y sentido forman un mismo **vector libre**.



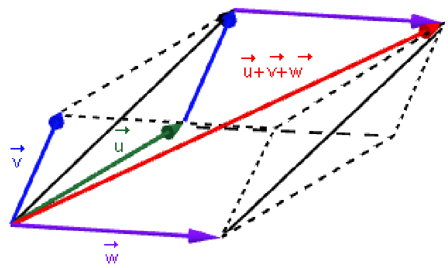
Dos puntos A y B determinarán dos vectores fijos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$, con el mismo módulo, la misma dirección y sentido opuesto.

2.2. Operaciones con vectores

Suma de vectores

Dados dos vectores en el espacio $\vec{u}$ y $\vec{v}$, su suma es otro vector $\vec{u}+\vec{v}$.

Para sumar dos vectores gráficamente, se toman vectores equivalentes a ellos de manera que el extremo del primero coincida con el origen del segundo.



Este procedimiento se puede usar para sumar varios vectores. En este caso, se toman vectores equivalentes tales que el extremo de cada uno coincida con el origen del siguiente. El vector suma tiene como origen, el origen del primer vector, y como extremo, el extremo del último vector.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

Opuesto de un vector

Dado un vector en el espacio $\vec{v}$, su vector opuesto se denota por $-\vec{v}$ u $\mathrm{Op}(\vec{v})$ y es otro vector con el mismo módulo, la misma dirección pero sentido contrario a $\vec{v}$.

Resta de vectores

Dados dos vectores en el espacio $\vec{u}$ y $\vec{v}$, su diferencia es otro vector $\vec{u}-\vec{v}$.

Restar un vector es lo mismo que sumar el vector opuesto.

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$$

Producto de un vector por una constante

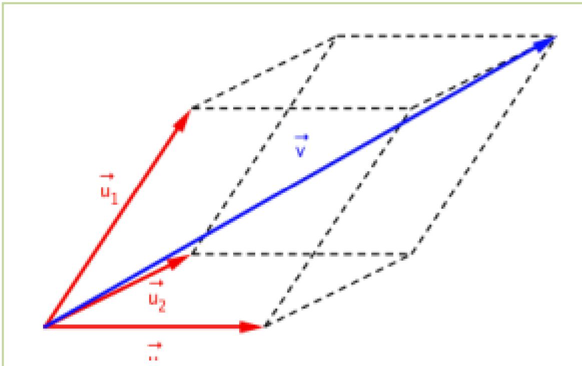
Dada una constante k y un vector $\vec{v}$, su producto es otro vector con la misma dirección, el mismo sentido si $k > 0$ o sentido contrario si $k < 0$, y cuyo módulo es k veces el módulo del vector $\vec{v}$.

$$k \cdot \vec{v} = \overrightarrow{k \cdot v}$$

Combinación lineal de vectores

Un vector $\vec{v}$ es **combinación lineal** del los vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ cuando existen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \Re$ tales que $\vec{v} = \lambda_1 \cdot \vec{u}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{u}_2 + \ldots + \lambda_n \cdot \vec{u}_n$.

Los vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ son linealmente **independientes** cuando ninguno de ellos se puede escribir como combinación lineal de los demás.



Ejemplo

- *El vector $\vec{v}$ es combinación lineal de los vectores $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ y $\vec{u}_3$.*

Ya que se obtiene como suma de los vectores $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ y $\vec{u}_3$

2.3. Base de un sistema de vectores

Definición:

Se dice que el conjunto de vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ forman una **base** del espacio de dimensión *n*, y se denota por $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ cuando verifican:

- Los vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ son linealmente independientes.
- Cualquier otro vector del espacio $\vec{v}$ se puede escribir como **combinación lineal** de ellos, es decir, $\exists\ \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \Re$ tales que $\vec{v} = \lambda_1 \cdot \vec{u}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{u}_2 + \ldots + \lambda_n \cdot \vec{u}_n$.

Los números $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ son las **componentes** del vector $\vec{v}$ respecto de la base $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \cdots \vec{u}_n\}$, y se escribe $\vec{v} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ o bien $\vec{v} = \lambda_1 \cdot \vec{u}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{u}_2 + \ldots + \lambda_n \cdot \vec{u}_n$.

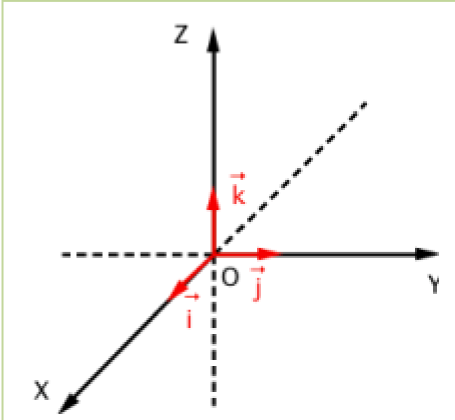
En el espacio de dimensión tres, todas las bases tienen tres elementos: $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ por lo que en el conjunto de los vectores libres del espacio de dimensión tres cada vector tiene tres componentes: $\vec{v} = \lambda_1 \cdot \vec{u}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{u}_2 + \lambda_3 \cdot \vec{u}_3$.

2.4. Sistema de referencia

Definición

Un **sistema de referencia** en el espacio de dimensión tres es un par formado por un punto fijo O y una base $B = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$. Se escribe $R \equiv \{O, \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}\}$

Un sistema de referencia nos permite asociar a cada punto del espacio P un vector $\overrightarrow{OP}$, llamado **vector de posición del punto**.



Las coordenadas del punto P serán las coordenadas del vector $\overrightarrow{OP}$ respecto de la base $B = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$.

El **sistema de referencia canónico** en el espacio de dimensión tres es aquel cuyo punto fijo es el origen de coordenadas $O(0, 0, 0)$ y cuya base $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ está formada por vectores de módulo 1 y perpendiculares entre sí.

Lo representamos por $R \equiv \{O, \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}\}$.

Componentes (o coordenadas) de un vector

Consideramos el sistema de referencia canónico $R \equiv \{O, \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}\}$.

Dados dos puntos $A(a_1, a_2, a_3)$ y $B(b_1, b_2, b_3)$, sus vectores de posición son $\overrightarrow{OA} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\overrightarrow{OB} = (b_1, b_2, b_3)$, entonces las componentes del vector $\overrightarrow{AB}$ son las coordenadas del extremo menos las coordenadas del origen:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$$

Módulo de un vector

Consideramos el sistema de referencia canónico $R \equiv \{O, \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}\}$.

Dado el vector $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, el módulo de $\vec{v}$ viene dado por la siguiente expresión:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

resultado de aplicar el teorema de Pitágoras en tres dimensiones.

Ejemplo

- *Calcula las componentes y el módulo de un vector de origen* $A(-2, 3, 7)$ *y extremo* $B(2, 0, -4)$.

Las componentes del vector $\overrightarrow{AB}$ son: $\overrightarrow{AB} = (2 - (-2), 0 - 3, -4 - 7) = (4, -3, -11)$.

El módulo del vector $\overrightarrow{AB}$ es: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4^2 + (-3)^2 + (-11)^2} = \sqrt{16 + 9 + 121} = \sqrt{146}$.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

Operaciones con vectores usando componentes

A partir de ahora se supone que se ha fijado el sistema de referencia canónico: $R \equiv \left\{O, \left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}\right\}$.

Suma, resta y opuesto de vectores

Dados dos vectores en el espacio $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$:

- Su suma es otro vector $\vec{u}+\vec{v}$ cuyas componentes son:

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$$

- El opuesto del vector $\vec{v}$ es:

$$\mathrm{Op}\ (\vec{v}) = -\vec{v} = -(v_1, v_2, v_3) = (-v_1, -v_2, -v_3)$$

- La resta es otro vector $\vec{u}-\vec{v}$ cuyas componentes son:

$$\vec{u} - \vec{v} = (u_1, u_2, u_3) - (v_1, v_2, v_3) = (u_1 - v_1, u_2 - v_2, u_3 - v_3)$$

Ejemplo

- *Dados los vectores* $\vec{u} = (1, -3, 5)$, $\vec{v} = (-6, 3, 0)$ *y* $\vec{w} = (7, 2, -1)$ *tenemos:*

$\vec{u} + \vec{v} = (1, -3, 5) + (-6, 3, 0) = (-5, 0, 5)$

$\vec{v} - \vec{w} = (-6, 3, 0) - (7, 2, -1) = (-13, 1, 1)$

$\vec{u} - \vec{v} + \vec{w} = (1, -3, 5) - (-6, 3, 0) + (7, 2, -1) = (14, -4, 4)$

Producto de un vector por una constante

Dada una constante k y un vector $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, su producto será otro vector $k \cdot \vec{v}$ cuyas componentes son:

$$k \cdot \vec{v} = k \cdot (v_1, v_2, v_3) = (k \cdot v_1, k \cdot v_2, \cdots k \cdot v_3)$$

Suma de un punto más un vector

Estrictamente hablando *no se puede* sumar un vector a un punto. Lo que hacemos es sumar al vector el vector de posición del punto.

Dado un punto $A\,(a_1, a_2, a_3)$ y un vector $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, para sumar el punto A y el vector $\vec{v}$ trabajamos con el vector de posición del punto A y el vector $\vec{v}$. Lo que obtenemos es otro punto B, cuyo vector de posición es:

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \vec{v} = (a_1, a_2, a_3) + (v_1, v_2, v_3) = (a_1 + v_1, a_2 + v_2, a_3 + v_3)$$

Ejemplo

- *Dado el punto* $A\,(1, 2, 3)$ *y los vectores* $\vec{u} = (-2, 5, 0)$ *y* $\vec{v} = (9, -7, 3)$, *tenemos:*

$-3\vec{u} = -3(-2, 5, 0) = (6, -15, 0)$

$2\vec{u} - 4\vec{v} = 2(-2, 5, 0) - 4(9, -7, 3) = (-40, 38, -12)$

$\left(\overrightarrow{OA} + \vec{u}\right) + \vec{v} = [(1, 2, 3) + (-2, 5, 0)] + (9, -7, 3) = (-1, 7, 3) + (9, -7, 3) = (8, 0, 6)$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

2.5. Estudio de la dependencia e independencia lineal de vectores mediante sus componentes

Dados n vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$, se dice que son **linealmente independientes** cuando ningún vector del conjunto puede expresarse como combinación lineal del resto.

Análogamente, se dice que n vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ son **linealmente dependientes** cuando cualquiera de ellos puede expresarse como combinación lineal del resto.

Ejemplos

- *Dado el conjunto de vectores* $V_1 = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$, *con* $\vec{u} = (1, 2, 3)$, $\vec{v} = (3, 0, 1)$ *y* $\vec{w} = (4, 2, 4)$, vemos fácilmente que $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$, por lo que V es un conjunto de vectores linealmente dependientes.
- *En el conjunto de vectores* $V_2 = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$, *con* $\vec{u} = (1, 2, 3)$, $\vec{v} = (3, 0, 1)$ *y* $\vec{w} = (3, -6, -7)$, **no** es evidente que $\vec{w} = -3\vec{u} + 2\vec{v}$, por lo que debemos buscar otra forma de proceder.

Los n vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ de un conjunto son **linealmente independientes** cuando al resolver el sistema homogéneo $\lambda_1 \cdot \vec{v}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{v}_2 + \ldots + \lambda_n \cdot \vec{v}_n = \vec{0}$ sólo es posible la solución trivial:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$$

Teniendo en cuenta lo aprendido en el capítulo 3, podemos concluir que:

- $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ son **linealmente independientes** cuando la matriz que forman sus componentes tiene de rango n.
- $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ son **linealmente dependientes** cuando la matriz que forman sus componentes tiene un rango estrictamente menor que n.

Actividades resueltas

- *Determina si son linealmente independientes o no los vectores de los siguientes conjuntos:*
- $V_2 = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$, con $\vec{u} = (1, 2, 3)$, $\vec{v} = (3, 0, 1)$ y $\vec{w} = (3, -6, -7)$.

Planteamos el determinante formado por las componentes de los tres vectores:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & -6 & -7 \end{vmatrix} = 0 + (-54) + 6 - 0 - (-42) + (-6) = -54 + 6 + 42 + 6 = 0$$

Por lo que el rango de la matriz de las componentes es menor que 3, y los vectores del sistema son linealmente dependientes.

- $V_3 = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$, con $\vec{u} = (1, 2, 3)$, $\vec{v} = (3, 0, 1)$ y $\vec{w} = (2, 2, 2)$.

Planteamos el determinante formado por las componentes de los tres vectores:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 + 18 + 4 - 0 - 12 - 2 = 22 - 14 = 8 \neq 0$$

Por lo que el rango de la matriz de las componentes es 3, y los vectores del sistema son linealmente independientes

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

- $V_4 = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{x}\}$, con $\vec{u} = (1, 2, 3)$, $\vec{v} = (3, 0, 1)$, $\vec{w} = (2, 2, 2)$ y $\vec{x} = (-1, 0, 2)$.

En este caso no podemos plantear directamente el determinante, sino que debemos plantear el sistema y la matriz del mismo:

$$\lambda_1 \cdot \vec{u} + \lambda_2 \cdot \vec{v} + \lambda_3 \cdot \vec{w} + \lambda_4 \cdot \vec{x} = \vec{0}$$
$$\lambda_1 \cdot (1, 2, 3) + \lambda_2 \cdot (3, 0, 1) + \lambda_3 \cdot (2, 2, 2) + \lambda_4 \cdot (-1, 0, 2) = \vec{0}$$
$$(\lambda_1, 2\lambda_1, 3\lambda_1) + (3\lambda_2, 0, \lambda_2) + (2\lambda_3, 2\lambda_3, 2\lambda_3) + (-\lambda_4, 0, 2\lambda_4) = \vec{0}$$
$$(\lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 - \lambda_4, 2\lambda_1 + 2\lambda_3, 3\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 + 2\lambda_4) = (0, 0, 0)$$

es decir:

$$\left.\begin{array}{r} \lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 - \lambda_4 = 0 \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 + 2\lambda_4 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_3 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz del sistema es a lo sumo tres, por los que los vectores del sistema son linealmente dependientes.

De este resultado podemos inferir que un sistema de n vectores en el espacio tridimensional SIEMPRE será linealmente dependiente si $n > 3$.

- $V_5 = \{\vec{u}, \vec{v}\}$, con $\vec{u} = (-2, 1, 3)$ y $\vec{v} = (2, 1, 1)$.

Como antes, planteamos el sistema y la matriz del mismo:

$$\lambda_1 \cdot \vec{u} + \lambda_2 \cdot \vec{v} = \vec{0}$$
$$\lambda_1 \cdot (-2, 1, 3) + \lambda_2 \cdot (2, 1, 1) = \vec{0}$$
$$(-2\lambda_1, \lambda_1, 3\lambda_1) + (2\lambda_2, \lambda_2, \lambda_2) = \vec{0}$$
$$(-2\lambda_1 + 2\lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2, 3\lambda_1 + \lambda_2) = (0, 0, 0)$$

es decir:

$$\left.\begin{array}{r} -2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Cualquiera de los determinantes que podemos construir es no nulo, por tanto es un sistema de vectores linealmente independientes.

De este resultado podemos deducir que dos vectores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ son **paralelos** si y sólo si son linealmente dependientes, es decir, sus coordenadas son proporcionales.

$$\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} = \frac{u_3}{v_3}$$

Ejemplo

- *Comprueba si los vectores $\vec{u} = (2, -8, 1)$ y $\vec{v} = (-4, 16, -2)$ son paralelos.*

$$\frac{2}{-4} = \frac{-8}{16} = \frac{1}{-2} \Rightarrow \text{Son paralelos.}$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

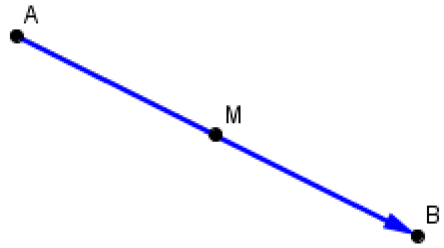
2.6. Aplicaciones de los vectores

Punto medio de un segmento

Dados dos puntos del espacio $A\,(a_1, a_2, a_3)$ y $B\,(b_1, b_2, b_3)$, el **punto medio** del segmento AB es:

$$M\left(\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}, \frac{a_3+b_3}{2}\right)$$

Esta fórmula se comprueba fácilmente. Observando la imagen:



Se deduce fácilmente que los vectores $\overrightarrow{AM}$ y $\overrightarrow{MB}$ son iguales, por tanto:

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} \Rightarrow (m_1 - a_1, m_2 - a_2, m_3 - a_3) = (b_1 - m_1, b_2 - m_2, b_3 - m_3)$$

Igualando componentes:

$$\left.\begin{array}{r} m_1 - a_1 = b_1 - m_1 \\ m_2 - a_2 = b_2 - m_2 \\ m_3 - a_3 = b_3 - m_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2m_1 = b_1 + a_1 \\ 2m_2 = b_2 + a_2 \\ 2m_3 = b_3 + a_3 \end{array}\right\} \Rightarrow M\,(m_1, m_2, m_3) = \left(\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}, \frac{a_3+b_3}{2}\right)$$

Ejemplo

- *Dados los puntos* $A\,(4, -2, 6)$ *y* $B\,(3, 8, -5)$*, calcula el punto medio del segmento AB:*

$$M\left(\frac{4+3}{2}, \frac{-2+8}{2}, \frac{6-5}{2}\right) \Rightarrow M\left(\frac{7}{2}, 3, \frac{1}{2}\right)$$

Condición de puntos alineados

Se dice que tres puntos en el espacio $A\,(a_1, a_2, a_3)$, $B\,(b_1, b_2, b_3)$ y $C\,(c_1, c_2, c_3)$ están **alineados** si los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son proporcionales, es decir:

$$\frac{b_1 - a_1}{c_1 - a_1} = \frac{b_2 - a_2}{c_2 - a_2} = \frac{b_3 - a_3}{c_3 - a_3}$$

Ejemplo

- Comprueba si los puntos $A\,(3, 2, 1)$, $B\,(4, 4, -2)$ y $C\,(4, -1, 6)$ están alineados.

$$¿\frac{4-3}{4-3} = \frac{4-2}{-1-2} = \frac{-2-1}{6-1}? \quad \Rightarrow \quad 1 \neq -\frac{2}{3} \neq -\frac{3}{5} \quad \Rightarrow \text{No están alineados.}$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa

Actividades propuestas

1. Calcula las componentes y el módulo de un vector de origen $A\,(-1, 1, 2)$ y extremo $B\,(3, 1, -4)$.

2. Dados los puntos $P = (2,\ 2, 3)$, $Q = (1,\ 0, 5)$ y $R = (-2,\ 3, 4)$ y los vectores $\vec{v} = (1, -1, 3)$, $\vec{w} = (0, -2, 1)$ calcula, indicando si el resultado es punto o vector:

a) $\overrightarrow{QP}$ b) $3\vec{v} - 2\vec{w}$ c) $\vec{v} - \overrightarrow{RP}$ d) $P + \vec{v}$ e) $R + \overrightarrow{PQ} + \vec{w}$

3. Dados tres puntos genéricos, $P = (p_1,\ p_2,\ p_3)$, $Q = (q_1, q_2, q_3)$ y $R = (r_1, r_2, r_3)$, demuestra:

a) $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$ b) $\overrightarrow{PQ} = (-1)\overrightarrow{QP}$ c) $\overrightarrow{PP} = \vec{0}$ d) $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PQ} = 2\overrightarrow{PQ}$

4. Dados los vectores $\vec{u} = (1, -3, 5)$, $\vec{v} = (-6, 3, 0)$ y $\vec{w} = (7, 2, -1)$ calcula:

a) $3\vec{u} - 2\vec{v} + 5\vec{w}$
b) $2\vec{u} - 2\vec{v} + 2\vec{w}$
c) $3(\vec{u} - 2\vec{v}) + 3\vec{w}$
d) $3\vec{u} - 2(\vec{v} + \vec{w})$

5. Dados los puntos $A\,(0, -2, 6)$ y $B\,(4, 8, -4)$, determina el punto medio del segmento AB.

6. Comprueba si los puntos $A\,(3, 2, 1)$, $B\,(4, 4, -2)$ y $C\,(4, -1, 3)$ están alineados.

7. Determina si son linealmente independientes o no los conjuntos de vectores siguientes:

$A = \{\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}\}$, con $\vec{u} = (1, 2, 0)$, $\vec{v} = (3, 0, 1)$ y $\vec{w} = (4, 2, -7)$.

$B = \{\vec{u},\ \vec{v}\ \}$, con $\vec{u} = (1, 2, 0)$ y $\vec{v} = (2, 4, 0)$.

$C = \{\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}, \vec{x}\}$, con $\vec{u} = (1, 2, 0)$, $\vec{v} = (4, 1, 3)$, $\vec{w} = (4, 2, -7)$ y $\vec{x} = (0, 0, 1)$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

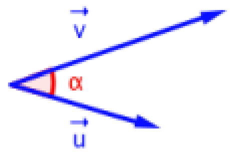
3. PRODUCTO ESCALAR

3.1. Definición

El ángulo que forman dos vectores libres es el menor de los ángulos que forman dos de sus representantes con un origen común.

Dados dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, se llama **producto escalar** de $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y se denota por $\vec{u}\cdot\vec{v}$, al **número real** que resulta al multiplicar el producto de sus módulos por el coseno del ángulo que forman.

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha$$



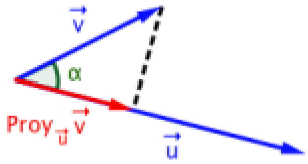
Ejemplo

- *Dados los vectores* $\vec{u}=(1,3,0)$ *y* $\vec{v}=(1,1,-1)$, *que forman un ángulo de* 43'1°, *calcula su producto escalar.*

$$\left.\begin{array}{l}|\vec{u}|=\sqrt{1^2+3^2+0^2}=\sqrt{10}\\ |\vec{v}|=\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}=\sqrt{3}\end{array}\right\}\Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha=\sqrt{30}\cdot\cos 43'1^{\circ}=\sqrt{30}\cdot 0'73=4$$

3.2. Interpretación geométrica

El producto escalar de dos vectores no nulos $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es igual al producto del módulo de uno de ellos por la proyección del otro sobre él.



Observamos en la figura un triángulo rectángulo, donde la hipotenusa es $\vec{v}$ y uno de los catetos es la proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$. Aplicando la definición de coseno de un ángulo agudo, tenemos:

$$\cos\alpha=\frac{\text{Proy}_{\vec{u}}\vec{v}}{|\vec{v}|}\Rightarrow \text{Proy}_{\vec{u}}\vec{v}=|\vec{v}|\cdot\cos\alpha$$

De aquí tenemos:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha=|\vec{u}|\cdot\text{Proy}_{\vec{u}}\vec{v}$$

Análogamente, se tiene que: $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha=|\vec{v}|\cdot|\vec{u}|\cdot\cos\alpha=|\vec{v}|\cdot\text{Proy}_{\vec{v}}\vec{u}$

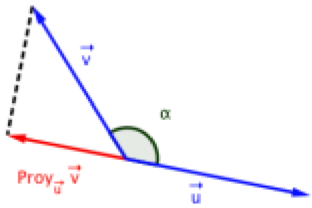
Ejemplo

- *Dados los vectores* $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$, *calcula* $\text{Proy}_{\vec{u}}\vec{v}$, *sabiendo que* $\vec{v}=(5,1,-3)$ *y que forman un ángulo de* 30°

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot\text{Proy}_{\vec{u}}\vec{v}\Rightarrow\text{Proy}_{\vec{u}}\vec{v}=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|}\Rightarrow\text{Proy}_{\vec{u}}\vec{v}=\frac{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha}{|\vec{u}|}=|\vec{v}|\cdot\cos\alpha=\sqrt{5^2+1^2+(-3)^2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{35}}{2}$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

Cuando la proyección sobre el vector es un número negativo, esto significa que el vector y la proyección tienen sentido contrario.



3.3. Propiedades del producto escalar

1. El producto escalar de un vector no nulo por sí mismo es siempre positivo e igual al cuadrado de su módulo.

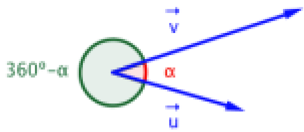
Demostración:

$$\vec{u}\cdot\vec{u}=|\vec{u}|\cdot|\vec{u}|\cdot\cos 0^{\circ}=|\vec{u}|\cdot|\vec{u}|\cdot 1=|\vec{u}|\cdot|\vec{u}|=|\vec{u}|^{2}\geq 0$$

2. Propiedad conmutativa: $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$

Demostración:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha=|\vec{v}|\cdot|\vec{u}|\cdot\cos\alpha=|\vec{v}|\cdot|\vec{u}|\cdot\cos(360^{\circ}-\alpha)=\vec{v}\cdot\vec{u}$$



3. Propiedad asociativa con el producto por un número real: $k\cdot(\vec{u}\cdot\vec{v})=(k\cdot\vec{u})\cdot\vec{v}$

Demostración:

$$k\cdot(\vec{u}\cdot\vec{v})=k\cdot|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha=|k\cdot\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha=(k\cdot\vec{u})\cdot\vec{v}$$

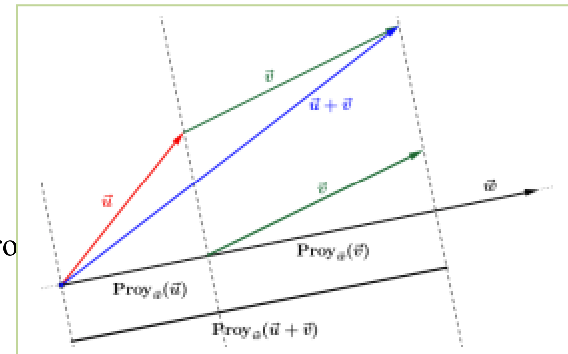
4. Propiedad distributiva respecto de la suma: $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}=\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$

Demostración:

La demostración analítica de esta propiedad es bastante complicada, por lo que lo veremos gráficamente.

$$(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}=|\vec{w}|\cdot\text{Proy}_{\vec{w}}(\vec{u}+\vec{v})$$

$$\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}=|\vec{w}|\cdot\text{Proy}_{\vec{w}}\vec{u}+|\vec{w}|\cdot\text{Proy}_{\vec{w}}\vec{v}=|\vec{w}|\cdot(\text{Proy}_{\vec{w}}\vec{u}+\text{Pro}$$



Basta observar en el gráfico que:

$$\text{Proy}_{\vec{w}}(\vec{u}+\vec{v})=\text{Proy}_{\vec{w}}\vec{u}+\text{Proy}_{\vec{w}}\vec{v}$$

5. El producto escalar de dos vectores no nulos es cero si y sólo si los vectores son perpendiculares.

Demostración:

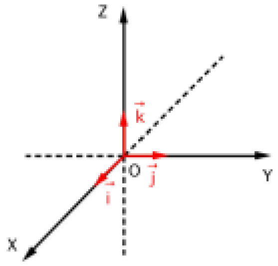
Si $\vec{u}\neq\vec{0}$ y $\vec{v}\neq\vec{0}\;\Rightarrow\;|\vec{u}|>0$ y $|\vec{v}|>0$.

$\vec{u}\cdot\vec{v}=0\Leftrightarrow|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha=0\Leftrightarrow\cos\alpha=0\Leftrightarrow\alpha=90^{\circ}\Leftrightarrow\vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

3.4. Expresión analítica del producto escalar

Consideramos el **sistema de referencia canónico** en el espacio de dimensión tres: $R \equiv \{O, \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}\}$.



Sean $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, el producto escalar de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es igual a:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (u_1, u_2, u_3) \cdot (v_1, v_2, v_3) = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$$

Demostración:

Si multiplicamos los vectores de la base canónica $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ tenemos:

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = |\vec{i}| \cdot |\vec{i}| \cdot \cos 0^{\circ} = |\vec{i}| \cdot |\vec{i}| \cdot 1 = |\vec{i}|^2 = 1^2 = 1 \qquad \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = |\vec{i}| \cdot |\vec{j}| \cdot \cos 90^{\circ} = |\vec{i}| \cdot |\vec{j}| \cdot 0 = 0$$

$$\vec{j} \cdot \vec{j} = |\vec{j}| \cdot |\vec{j}| \cdot \cos 0^{\circ} = |\vec{j}| \cdot |\vec{j}| \cdot 1 = |\vec{j}|^2 = 1^2 = 1 \qquad \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = |\vec{i}| \cdot |\vec{k}| \cdot \cos 90^{\circ} = |\vec{i}| \cdot |\vec{k}| \cdot 0 = 0$$

$$\vec{k} \cdot \vec{k} = |\vec{k}| \cdot |\vec{k}| \cdot \cos 0^{\circ} = |\vec{k}| \cdot |\vec{k}| \cdot 1 = |\vec{k}|^2 = 1^2 = 1$$

$$\vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{j} = |\vec{j}| \cdot |\vec{k}| \cdot \cos 90^{\circ} = |\vec{j}| \cdot |\vec{k}| \cdot 0 = 0$$

De aquí tenemos:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (u_1 \cdot \vec{i} + u_2 \cdot \vec{j} + u_3 \cdot \vec{k}) \cdot (v_1 \cdot \vec{i} + v_2 \cdot \vec{j} + v_3 \cdot \vec{k}) =$$
$$= u_1 \cdot v_1 \cdot \vec{i} \cdot \vec{i} + u_1 \cdot v_2 \cdot \vec{i} \cdot \vec{j} + u_1 \cdot v_3 \cdot \vec{i} \cdot \vec{k} + u_2 \cdot v_1 \cdot \vec{j} \cdot \vec{i} + u_2 \cdot v_2 \cdot \vec{j} \cdot \vec{j} + u_2 \cdot v_3 \cdot \vec{j} \cdot \vec{k} + u_3 \cdot v_1 \cdot \vec{k} \cdot \vec{i} +$$
$$+ u_3 \cdot v_2 \cdot \vec{k} \cdot \vec{j} + u_3 \cdot v_3 \cdot \vec{k} \cdot \vec{k} =$$
$$= u_1 \cdot v_1 \cdot 1 + u_1 \cdot v_2 \cdot 0 + u_1 \cdot v_3 \cdot 0 + u_2 \cdot v_1 \cdot 0 + u_2 \cdot v_2 \cdot 1 + u_2 \cdot v_3 \cdot 0 + u_3 \cdot v_1 \cdot 0 + u_3 \cdot v_2 \cdot 0 + u_3 \cdot v_3 \cdot 1 =$$
$$= u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$$

Ejemplo

- *Dados los vectores* $\vec{u} = (3, 2, -4)$ *y* $\vec{v} = (-1, 3, 7)$ *calcula su producto escalar.*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (3, 2, -4) \cdot (-1, 3, 7) = 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 + (-4) \cdot 7 = -3 + 6 - 28 = -25$$

Actividades propuestas

8. Calcula el producto escalar de los vectores $\vec{u} = (0, 1, -3)$ *y* $\vec{v} = (-3, 4, 6)$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

3.5. Aplicaciones del productos escalar

3.5.1. Ángulo entre dos vectores

A partir de la definición del producto escalar, tenemos:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$$

Si consideramos $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ y $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$, tenemos:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}\cdot\vec{v}=(u_1,u_2,u_3)\cdot(v_1,v_2,v_3)=u_1\cdot v_1+u_2\cdot v_2+u_3\cdot v_3\\ |\vec{u}|=\sqrt{u_1^{\,2}+u_2^{\,2}+u_3^{\,2}}\\ |\vec{v}|=\sqrt{v_1^{\,2}+v_2^{\,2}+v_3^{\,2}}\end{array}\right\}\Rightarrow \cos\alpha=\frac{u_1\cdot v_1+u_2\cdot v_2+u_3\cdot v_3}{\sqrt{u_1^{\,2}+u_2^{\,2}+u_3^{\,2}}\cdot\sqrt{v_1^{\,2}+v_2^{\,2}+v_3^{\,2}}}$$

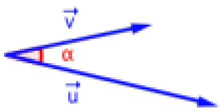
Y de aquí tenemos:

$$\alpha=\arccos\frac{u_1\cdot v_1+u_2\cdot v_2+u_3\cdot v_3}{\sqrt{u_1^{\,2}+u_2^{\,2}+u_3^{\,2}}\cdot\sqrt{v_1^{\,2}+v_2^{\,2}+v_3^{\,2}}}$$

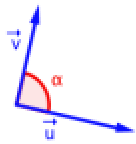
Para cada número real $0\le k\le 1$, existen dos ángulos cuyo coseno vale k. Tomaremos el menor de ellos.

Observando la expresión dada por el coseno del ángulo, y dado que los módulos de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son positivos, el signo del coseno vendrá determinado por el signo del producto escalar de $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Así:

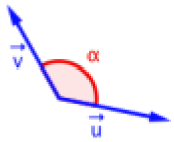
- Si el producto escalar es **positivo**, el ángulo determinado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es agudo.



- Si el producto escalar es **cero**, los vectores formarán un ángulo de 90°, son perpendiculares.



- Si el producto escalar es **negativo**, el ángulo determinado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es obtuso.



Vectores ortogonales

Dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son **ortogonales** cuando determinan un ángulo de noventa grados $\alpha=90^{\circ}$ (es decir, son perpendiculares) y por tanto, $\cos\alpha=0$.

De aquí se tiene que el producto escalar $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot 0=0$

Se obtiene, por tanto, la siguiente condición de perpendicularidad entre dos vectores:

$$\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=0$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

Esta condición será uno de los tres conceptos básicos para resolver casi cualquier problema de geometría en el espacio.

Ejemplo

- *Calcula un vector ortogonal al vector* $\vec{u} = (2, -3, 1)$.

Sea dicho vector $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Para que $\vec{u} \perp \vec{v}$ se debe verificar que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow (2, -3, 1) \cdot (v_1, v_2, v_3) = 0 \Leftrightarrow 2v_1 - 3v_2 + v_3 = 0 \Leftrightarrow v_3 = -2v_1 + 3v_2$$

Escribimos la solución en forma paramétrica:

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = \lambda \\ v_2 = \mu \\ v_3 = -2\lambda + 3\mu \end{array}\right\} \text{ con } \lambda \text{ y } \mu \in \mathbb{R}$$

De aquí, podemos expresar la solución como:

$$(v_1, v_2, v_3) = (\lambda, \mu, -2\lambda + 3\mu) = (\lambda, 0, -2\lambda) + (0, \mu, 3\mu) = \lambda(1, 0, -2) + \mu(0, 1, 3)$$

Por tanto, todos los vectores ortogonales al vector $\vec{u}$ serán combinación lineal de los vectores $\{(1, 0, -2), (0, 1, 3)\}$.

3.5.2. Cosenos directores

En una base ortonormal, se llaman **cosenos directores** del vector $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ a los cosenos de los ángulos que forma el vector $\vec{u}$ con los vectores de la base:

$$\cos\alpha = \frac{v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}, \quad \cos\beta = \frac{v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{v_3}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}$$

Ejemplo

- *Calcula los cosenos directores del vector* $\vec{u} = (2, -3, 1)$.

Expresando el vector como combinación lineal de los vectores de la base:

$$\vec{u} = (2, -3, 1) = 2 \cdot \vec{i} - 3 \cdot \vec{j} + \vec{k}$$

Podemos hallar los cosenos directores a partir de los productos escalares con los tres vectores de la base:

$$\left.\begin{array}{r} \vec{u} \cdot \vec{i} = (2 \cdot \vec{i} - 3 \cdot \vec{j} + \vec{k}) \cdot \vec{i} = 2 \cdot \vec{i}\vec{i} - 3 \cdot \vec{j}\vec{i} + \vec{k}\vec{i} = 2 + 0 + 0 = 2 \\ \vec{u} \cdot \vec{i} = |\vec{u}| \cdot |\vec{i}| \cdot \cos\alpha = |\vec{u}| \cdot \cos\alpha = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2} \cdot \cos\alpha = \sqrt{14} \cdot \cos\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow 2 = \sqrt{14} \cdot \cos\alpha$$

Es decir:

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{14}}$$

Del mismo modo podemos hallar:

$$\left.\begin{array}{r} \vec{u} \cdot \vec{j} = -3 \\ \vec{u} \cdot \vec{j} = \sqrt{14} \cdot \cos\beta \end{array}\right\} \Rightarrow -3 = \sqrt{14} \cdot \cos\beta \Rightarrow \cos\beta = \frac{-3}{\sqrt{14}} \quad \text{y:}$$

$$\left.\begin{array}{r} \vec{u} \cdot \vec{k} = 1 \\ \vec{u} \cdot \vec{k} = \sqrt{14} \cdot \cos\gamma \end{array}\right\} \Rightarrow 1 = \sqrt{14} \cdot \cos\gamma \Rightarrow \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{14}}$$

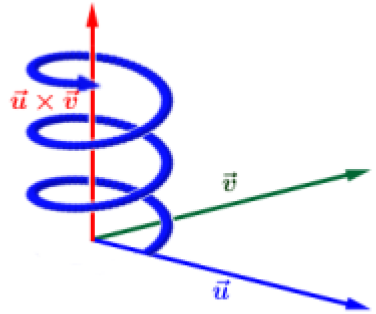
Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

4. PRODUCTO VECTORIAL

4.1. Definición

Dados dos vectores del espacio de dimensión tres: $\vec{u}$ y $\vec{v}$, se llama **producto vectorial** de $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y se denota por $\vec{u}\times\vec{v}$ o $\vec{u}\wedge\vec{v}$, a otro **vector** con las siguientes características:

- **Módulo**: $|\vec{u}\times\vec{v}| = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot \text{sen}\,\alpha$, siendo α el menor ángulo que determinan los dos vectores.
- **Dirección**: es la perpendicular de cualquier plano generado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
- **Sentido**: es el de avance de un sacacorchos que gira de $\vec{u}$ a $\vec{v}$ (regla de *Maxwell*).



Ejemplo

- *Dados los vectores* $\vec{u} = (-3, 3, 0)$ *y* $\vec{v} = (0, 4, 4)$, *que forman un ángulo de* 60°, *calcula el producto vectorial.*

Dado que el producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es un vector $\vec{u}\times\vec{v}$, calculamos sus elementos:

Módulo:

$$\left.\begin{array}{l} |\vec{u}| = \sqrt{(-3)^2+3^2+0^2} = \sqrt{18} \\ |\vec{v}| = \sqrt{0^2+4^2+4^2} = \sqrt{32} \\ \text{sen } 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow |\vec{u}\times\vec{v}| = \sqrt{18}\cdot\sqrt{32}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{576}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 24\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$$

Dirección:

Buscamos un vector, al que llamaremos $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$, que sea perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Como vimos en el apartado anterior, eso implica que el producto escalar con ambos vectores debe ser nulo:

$$\vec{u}\cdot\vec{w} = 0 \Rightarrow -3w_1 + 3w_2 + 0w_3 = 0 \Rightarrow -3w_1 + 3w_2 = 0 \Rightarrow w_1 = w_2$$
$$\vec{v}\cdot\vec{w} = 0 \Rightarrow 0w_1 + 4w_2 + 4w_3 = 0 \Rightarrow 4w_2 + 4w_3 = 0 \Rightarrow w_3 = -w_2$$

El vector es, por tanto, de la forma

$$\vec{w} = (w_1, w_2, w_3) = (w_2, w_2, -w_2)$$

siendo el más sencillo:

$$\vec{w} = (1,1,-1)$$

Sentido:

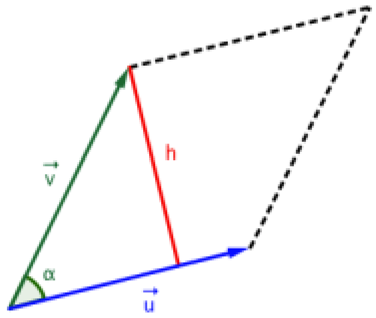
Será el sentido de avance de un sacacorchos que gira de $\vec{u}$ a $\vec{v}$.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

4.2. Interpretación geométrica del producto vectorial

Geométricamente, el módulo del producto vectorial de dos vectores coincide con el área del paralelogramo que tiene por lados esos vectores.

Dados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, tenemos:



Área del paralelogramo definido por $\vec{u}$ y $\vec{v} = \left|\vec{u} \times \vec{v}\right|$

Demostración:

En la figura anterior podemos ver que

$$\text{Área} = \left|\vec{u}\right| \cdot h$$

Por otro lado, aplicando la definición de seno:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{h}{\left|\vec{v}\right|} \Rightarrow h = \left|\vec{v}\right| \cdot \operatorname{sen}\alpha$$

De aquí tenemos:

$$\text{Área} = \left|\vec{u}\right| \cdot h = \left|\vec{u}\right| \cdot \left|\vec{v}\right| \cdot \operatorname{sen}\alpha = \left|\vec{u} \times \vec{v}\right|$$

4.3. Propiedades del producto vectorial

1. El producto vectorial de un vector por sí mismo es cero.

Demostración:

El ángulo que forma un vector consigo mismo es cero. De aquí:

$$\left|\vec{u} \times \vec{u}\right| = \left|\vec{u}\right| \cdot \left|\vec{u}\right| \cdot \operatorname{sen} 0^{\circ} = \left|\vec{u}\right|^2 \cdot 0 = 0$$

2. Propiedad anticonmutativa: $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$

Demostración:

Los vectores $\vec{u} \times \vec{v}$ y $\vec{v} \times \vec{u}$ tienen el mismo módulo, la misma dirección y sentido (el giro del sacacorchos) contrario, luego son opuestos.

3. Producto por un número real: $\lambda(\vec{u} \times \vec{v}) = (\lambda\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\lambda\vec{v})$

Demostración:

Es evidente teniendo el cuenta que al multiplicar un vector por un escalar su módulo queda multiplicado por dicho escalar, es decir, $\left|\lambda\vec{u}\right| = \lambda\left|\vec{u}\right|$.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

4. Propiedad distributiva respecto de la suma: $\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\times\vec{v}+\vec{u}\times\vec{w}$

5. El producto vectorial de dos vectores no nulos es el vector cero si y sólo si los vectores son paralelos. $\vec{u}\times\vec{v}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{u}\,//\,\vec{v}$

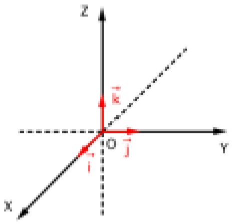
Demostración:

$$\vec{u}\times\vec{v}=\vec{0}\Leftrightarrow|\vec{u}\times\vec{v}|=0\Leftrightarrow|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\operatorname{sen}\alpha=0\Leftrightarrow\operatorname{sen}\alpha=0\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=0^{o}\\ \alpha=180^{o}\end{cases}$$

6. En general, el producto vectorial no cumple la propiedad asociativa. $\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})\neq(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}$

4.4. Expresión analítica del producto vectorial

Consideramos el **sistema de referencia canónico** en el espacio, $R\equiv\{O,\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}\}$.



Sean $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ y $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$, el producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se puede expresar mediante el siguiente determinante:

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\u_1&u_2&u_3\\v_1&v_2&v_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}u_2&u_3\\v_2&v_3\end{vmatrix}\cdot\vec{i}-\begin{vmatrix}u_1&u_3\\v_1&v_3\end{vmatrix}\cdot\vec{j}+\begin{vmatrix}u_1&u_2\\v_1&v_2\end{vmatrix}\cdot\vec{k}=\begin{vmatrix}u_2&u_3\\v_2&v_3\end{vmatrix}\cdot\vec{i}+\begin{vmatrix}u_3&u_1\\v_3&v_1\end{vmatrix}\cdot\vec{j}+\begin{vmatrix}u_1&u_2\\v_1&v_2\end{vmatrix}\cdot\vec{k}$$

Demostración:

Como los vectores de la base canónica $B=\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ tienen módulo 1 y son perpendiculares entre sí:

$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{0}$ $\quad\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$ $\quad\vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}$ $\quad\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}$ $\quad\vec{j}\times\vec{j}=\vec{0}$ $\quad\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}$ $\quad\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$ $\quad\vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}$
$\vec{k}\times\vec{k}=\vec{0}$

De aquí tenemos, aplicando la propiedad distributiva respecto de la suma:

$$\vec{u}\times\vec{v}=(u_1\vec{i}+u_2\vec{j}+u_3\vec{k})\times(v_1\vec{i}+v_2\vec{j}+v_3\vec{k})=$$

$$=u_1\vec{i}\times(v_1\vec{i}+v_2\vec{j}+v_3\vec{k})+u_2\vec{j}\times(v_1\vec{i}+v_2\vec{j}+v_3\vec{k})+u_3\vec{k}\times(v_1\vec{i}+v_2\vec{j}+v_3\vec{k})=$$

$$=(u_1\vec{i})\times(v_1\vec{i})+(u_1\vec{i})\times(v_2\vec{j})+(u_1\vec{i})\times(v_3\vec{k})+(u_2\vec{j})\times(v_1\vec{i})+(u_2\vec{j})\times(v_2\vec{j})+(u_2\vec{j})\times(v_3\vec{k})+$$

$$+(u_3\vec{k})\times(v_1\vec{i})+(u_3\vec{k})\times(v_2\vec{j})+(u_3\vec{k})\times(v_3\vec{k})=$$

Aplicando la propiedad del producto de números reales:

$$=u_1v_1(\vec{i}\times\vec{i})+u_1v_2(\vec{i}\times\vec{j})+u_1v_3(\vec{i}\times\vec{k})+u_2v_1(\vec{j}\times\vec{i})+u_2v_2(\vec{j}\times\vec{j})+u_2v_3(\vec{j}\times\vec{k})+$$

$$+u_3v_1(\vec{k}\times\vec{i})+u_3v_2(\vec{k}\times\vec{j})+u_3v_3(\vec{k}\times\vec{k})=$$

$$=u_1v_2\vec{k}+u_1v_3(-\vec{j})+u_2v_1(-\vec{k})+u_2v_3\vec{i}+u_3v_1\vec{j}+u_3v_2(-\vec{i})=u_1v_2\vec{k}-u_1v_3\vec{j}-u_2v_1\vec{k}+u_2v_3\vec{i}+u_3v_1\vec{j}-u_3v_2\vec{i}=$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

$$= (u_2v_3 - u_3v_2)\vec{i} + (u_3v_1 - u_1v_3)\vec{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\vec{k} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}\vec{i} + \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}\vec{k} =$$

$$= \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

Ejemplo

- *Halla el producto vectorial de los vectores* $\vec{u} = (3, 1, 0)$ *y* $\vec{v} = (-1, 4, 2)$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}\vec{i} + \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}\vec{k} = 2\vec{i} - 6\vec{j} + 13\vec{k} = (2, -6, 13)$$

4.5. Aplicaciones del producto vectorial

Vector perpendicular a otros dos vectores

Dados dos vectores no nulos $\vec{u}$ y $\vec{v}$ linealmente independientes, su producto vectorial es un vector perpendicular a ambos.

4.5.1. Base de vectores ortogonales

Dados dos vectores no nulos $\vec{u}$ y $\vec{v}$ linealmente independientes, podemos conseguir una base de vectores ortogonales $B = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$considerando:

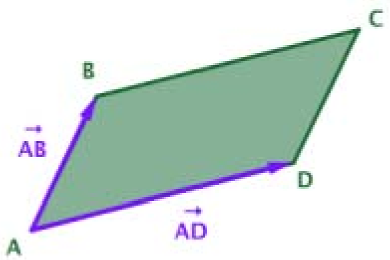
$$\left.\begin{array}{l} \vec{w}_1 = \vec{u} \\ \vec{w}_2 = \vec{u} \times \vec{v} \\ \vec{w}_3 = \vec{u} \times (\vec{u} \times \vec{v}) \end{array}\right\} \Rightarrow B = \{\vec{u}, \vec{u} \times \vec{v}, \vec{u} \times (\vec{u} \times \vec{v})\}$$

4.5.2. Área de figuras planas en el espacio

Área de un paralelogramo

Hemos visto que el módulo del producto vectorial de dos vectores coincide con el área del paralelogramo que tiene por lados esos vectores. En el paralelogramo $ABCD$ podemos calcular su área:

$$\text{Área} = \left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} \right|$$



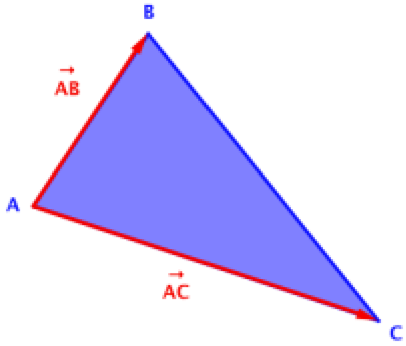
Evidentemente, el área no variará independientemente de los vectores elegidos.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

Área de un triángulo

Dado un triángulo ABC, el área viene dada por la siguiente expresión:

$$\text{Área} = \left|\frac{\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}}{2}\right|$$



Demostración:

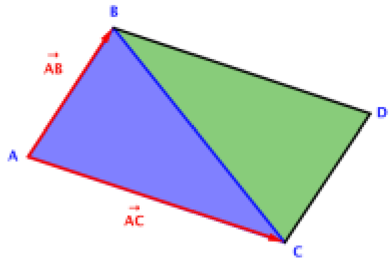
El triángulo ABC está formado por tres puntos no alineados. Añadimos un cuarto punto para construir el paralelogramo $ABCD$.

Este paralelogramo está formado por dos triángulos iguales: el triángulo ABC de partida, y el triángulo BCD.

El área del paralelogramo es igual a: $\text{Área} = \left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$

Como el área del triángulo es la mitad del área del paralelogramo, tenemos:

$$\text{Área} = \left|\frac{\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}}{2}\right|$$



Ejemplo

- *Halla el área del triángulo de vértices* $A\,(-1,2,3)$, $B\,(1,-2,1)$ *y* $C\,(2,1,-4)$.

Consideramos dos vectores con origen A y extremos B y C respectivamente.

$$\overrightarrow{AB} = (2,-4,-2)\quad \overrightarrow{AC} = (3,-1,-7)$$

El área del triángulo es la mitad del módulo del producto vectorial $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$.

Calculamos el producto vectorial:

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -4 & -2 \\ 3 & -1 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -1 & -7 \end{vmatrix}\vec{i} + \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -7 & 3 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}\vec{k} = 26\vec{i} + 8\vec{j} + 10\vec{k} = (26,8,10)$$

Calculamos el módulo:

$$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = |(26,8,10)| = \sqrt{26^2+8^2+10^2} = \sqrt{676+64+100} = \sqrt{840} = 2\sqrt{210}$$

De aquí: $$\text{Área} = \frac{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|}{2} = \frac{2\sqrt{210}}{2} = 210\ \text{u}^2.$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

5. PRODUCTO MIXTO DE VECTORES

5.1. Definición

Dados tres vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$, se llama **producto mixto** de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$, y se denota por $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$ al **número** que se obtiene al calcular el producto escalar del primer vector por el producto vectorial de los otros dos.

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = \vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$$

Ejemplo

- *Calcula el producto mixto de los vectores* $\vec{u} = (1, 3, -2)$, $\vec{v} = (-1, 0, 4)$ *y* $\vec{w} = (2, 1, -5)$.

$$\vec{v}\times\vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}\vec{i} + \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\vec{k} = -4\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k} = (-4, 3, -1)$$

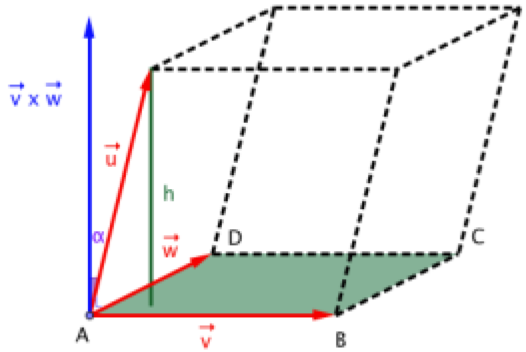
$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = \vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) = (1, 3, -2)\cdot(-4, 3, -1) = -4 + 9 + 2 = 7$$

5.2. Interpretación geométrica del producto mixto

Geométricamente, el valor absoluto del producto mixto de tres vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ coincide con el volumen del paralelepípedo definido por ellos.

Demostración:

Consideramos el paralelepípedo definido por tres vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ no nulos y no coplanarios.



La fórmula del volumen es:

$$\text{Volumen} = \text{Área de la base}\cdot\text{Altura} = \text{Área } ABCD \cdot h$$

La base es un paralelogramo, por tanto:

$$\text{Área } ABCD = |\vec{v}\times\vec{w}|$$

De aquí tenemos:

$$\text{Volumen} = |\vec{v}\times\vec{w}|\cdot h$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

Por otro lado, aplicando las definiciones de las razones trigonométricas:

$$\operatorname{sen}(90^{\text{o}}-\alpha)=\frac{h}{|\vec{u}|}\Rightarrow h=|\vec{u}|\cdot\operatorname{sen}(90^{\text{o}}-\alpha)\Rightarrow h=|\vec{u}|\cdot\cos\alpha$$

Entonces:

$$\text{Volumen}=|\vec{v}\times\vec{w}|\cdot h=|\vec{v}\times\vec{w}|\cdot|\vec{u}|\cdot\cos\alpha=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}\times\vec{w}|\cdot\cos\alpha=[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$$

5.3. Propiedades del producto mixto

1. El producto mixto no varía si se permutan circularmente sus factores.

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=[\vec{v},\vec{w},\vec{u}]=[\vec{w},\vec{u},\vec{v}]$$

2. El producto mixto cambia de signo si se trasponen dos de sus factores.

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=-[\vec{v},\vec{u},\vec{w}]=-[\vec{w},\vec{v},\vec{u}]=-[\vec{u},\vec{w},\vec{v}]$$

3. Propiedad respecto al producto por números reales.

$$[\lambda\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=[\vec{u},\lambda\vec{v},\vec{w}]=[\vec{u},\vec{v},\lambda\vec{w}]=\lambda[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$$

4. Propiedad distributiva respecto de la suma.

$$[\vec{u}_1+\vec{u}_2,\vec{v},\vec{w}]=[\vec{u}_1,\vec{v},\vec{w}]+[\vec{u}_2,\vec{v},\vec{w}]$$
$$[\vec{u},\vec{v}_1+\vec{v}_2,\vec{w}]=[\vec{u},\vec{v}_1,\vec{w}]+[\vec{u},\vec{v}_2,\vec{w}]$$
$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}_1+\vec{w}_2]=[\vec{u},\vec{v},\vec{w}_1]+[\vec{u},\vec{v},\vec{w}_2]$$

6. El producto mixto de tres vectores es nulo si y sólo si los vectores son linealmente dependientes (son coplanarios).

$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=0\Leftrightarrow\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=0\Leftrightarrow\vec{u}\perp(\vec{v}\times\vec{w})\Leftrightarrow\vec{u}$ es combinación lineal de $\vec{v}$ y $\vec{w}$

5.4. Expresión analítica del producto mixto

Consideramos el **sistema de referencia canónico** en el espacio, $R\equiv\{O,\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}\}$.

Sean $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$, $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ y $\vec{w}=(w_1,w_2,w_3)$. El producto mixto de $\vec{u}$,$\vec{v}$ y $\vec{w}$ se puede expresar mediante el siguiente determinante:

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\begin{vmatrix}u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\\ w_1 & w_2 & w_3\end{vmatrix}$$

Demostración:

Los vectores de la base canónica $B=\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ verifican:

$$[\vec{i},\vec{j},\vec{k}]=1\qquad[\vec{j},\vec{k},\vec{i}]=1\qquad[\vec{k},\vec{i},\vec{j}]=1\qquad[\vec{j},\vec{i},\vec{k}]=-1\qquad[\vec{k},\vec{j},\vec{i}]=-1\qquad[\vec{i},\vec{k},\vec{j}]=-1$$

Y son nulas todas las ternas en las que alguno de ellos está repetido.

Hallamos el producto vectorial aplicando la propiedad distributiva y el producto por números reales:

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\left[\left(u_1\vec{i}+u_2\vec{j}+u_3\vec{k}\right),\left(v_1\vec{i}+v_2\vec{j}+v_3\vec{k}\right),\left(w_1\vec{i}+w_2\vec{j}+w_3\vec{k}\right)\right]=$$

$$=u_1v_2w_3\left[\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right]+u_1v_3w_2\left[\vec{i},\vec{k},\vec{j}\right]+u_2v_1w_3\left[\vec{j},\vec{i},\vec{k}\right]+u_2v_3w_1\left[\vec{j},\vec{k},\vec{i}\right]+u_3v_1w_2\left[\vec{k},\vec{i},\vec{j}\right]+u_3v_2w_1\left[\vec{k},\vec{j},\vec{i}\right]=$$

$$=u_1v_2w_3-u_1v_3w_2-u_2v_1w_3+u_2v_3w_1+u_3v_1w_2-u_3v_2w_1=\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Ejemplo

- *Calcula el producto mixto de los vectores* $\vec{u}=(-1,2,-4)$, $\vec{v}=(2,0,-3)$ *y* $\vec{w}=(1,-1,5)$.

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\begin{vmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix}=-6+8-(-3+20)=2-17=-15$$

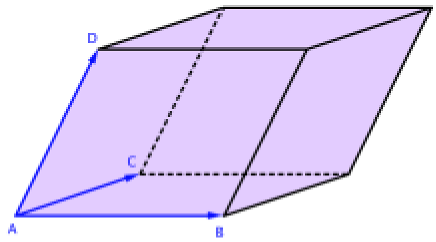
5.5. Aplicaciones del producto mixto

Volumen de un paralelepípedo

Hemos visto que el valor absoluto del producto mixto de tres vectores coincide con el volumen del paralelepípedo definido por ellos.

Sea el paralelepípedo definido por los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$, entonces su volumen viene dado por:

$$\text{Volumen}=\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]\right|$$



Actividad resuelta

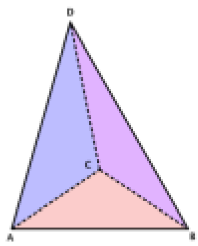
- *Calcula el volumen del paralelepípedo definido por los vectores* $\vec{a}=(1,1,1)$, $\vec{b}=(0,1,2)$ *y* $\vec{c}=(2,1,0)$

$$V=\left|\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]\right|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}=\left|0+4+0-(3+0+0)\right|=1\ \text{u}^3.$$

Volumen de un tetraedro

El volumen de un tetraedro de vértices A, B, C y D es igual a un sexto del producto mixto, en valor absoluto.

$$\text{Volumen}=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]\right|}{6}$$



Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

Actividades resueltas

- *Calcula el volumen del tetraedro de vértices* $A\,(1,\,0,\,-1)$, $B\,(-2,\,3,\,1)$, $C\,(0,\,-3,\,1)$ *y* $D\,(0,\,4,\,-1)$.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(-3,3,2)\\ \overrightarrow{AC}=(-1,-3,2)\\ \overrightarrow{AD}=(-1,4,0)\end{array}\right\}\Rightarrow V=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]\right|}{6}=\frac{1}{6}\cdot\begin{vmatrix}-3 & 3 & 2\\ -1 & -3 & 2\\ -1 & 4 & 0\end{vmatrix}=\frac{1}{6}\cdot\left[-6-8-(6-24)\right]=\frac{1}{6}\cdot 4=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}\ \text{u}^3$$

- *Calcula el volumen del tetraedro que tiene por vértices* $A\,(1,1,1)$, $B\,(3,\,0,\,0)$, $C\,(0,\,2,\,0)$ *y* $D\,(0,\,0,\,6)$*:*

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(2,-1,-1)\\ \overrightarrow{AC}=(-1,1,-1)\\ \overrightarrow{AD}=(-1,-1,5)\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]=\begin{vmatrix}2 & -1 & -1\\ -1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 5\end{vmatrix}=10-1-1-(1+2+5)=8-8=0$$

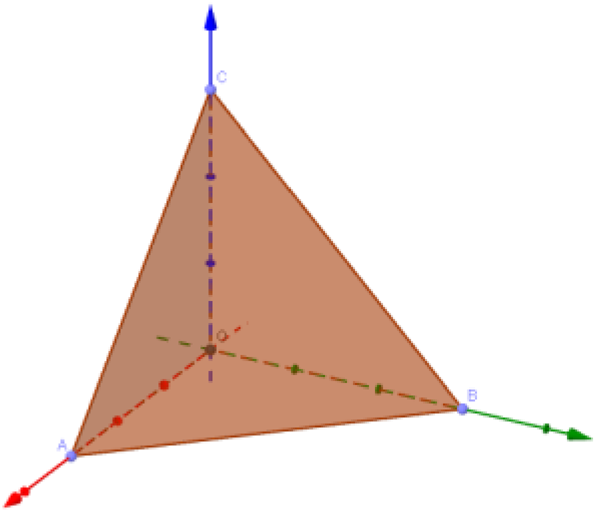
$$V=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]\right|}{6}=\frac{|0|}{6}=0\ \text{u}^3$$

Esto significa que los puntos que nos dan no forman ningún tetraedro, sino que todos pertenecen al mismo plano.

- *Calcula las aristas del tetraedro que tiene un volumen de 36 u³ y cuyos vértices son el origen cartesiano* $O\,(0,\,0,\,0)$ *y los puntos* $A\,(a,\,0,\,0)$, $B\,(0,\,a,\,0)$ *y* $C\,(0,\,0,\,a)$*:*

Hallamos el producto mixto en la forma habitual:

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{OA}=(a,0,0)\\ \overrightarrow{OB}=(0,a,0)\\ \overrightarrow{OC}=(0,0,a)\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right]=\begin{vmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & a & 0\\ 0 & 0 & a\end{vmatrix}=a^3$$



Planteamos el volumen:

$$V=\frac{\left|\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right]\right|}{6}=\frac{a^3}{6}=36\ \text{u}^3$$

Y resolvemos la ecuación:

$$\frac{a^3}{6}=36\Rightarrow a^3=6\cdot 36=216\Rightarrow a=6\ \text{u}$$

Hemos obtenido que las aristas OA, OB y OC miden a unidades, mientras que para obtener las aristas AB, AC y BC debemos hallar el módulo de los correspondientes vectores:

$$\overrightarrow{AB}=(-a,a-0)\Rightarrow\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(-a)^2+a^2+0}=\sqrt{2}\cdot a\ \text{u}$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

CURIOSIDADES. REVISTA

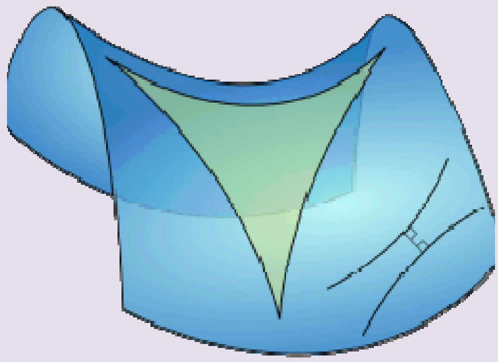
Otras Geometrías

Euclides (325 aC – 265 aC), en Los Elementos, partió de cinco postulados para construir la Geometría. Si alguno de esos postulados no se cumple, entonces tenemos lo que se denomina las **Geometrías No Euclídeas**.

El quinto postulado dice: "Dada una recta y un punto exterior a ella, hay **una única recta** que es paralela a la recta dada y que pasa por el punto".

Cuando a principios del siglo XIX se intentó demostrar el postulado por reducción al absurdo se encontró, con sorpresa, que no se llegaba a una contradicción, que se podían construir geometrías que podían no verificarlo.

De modo independiente, distintos matemáticos (Gauss, Lobachevsky, Bolyai…), en ese intento de demostrar el quinto postulado llegaron a la **Geometría Hiperbólica**.

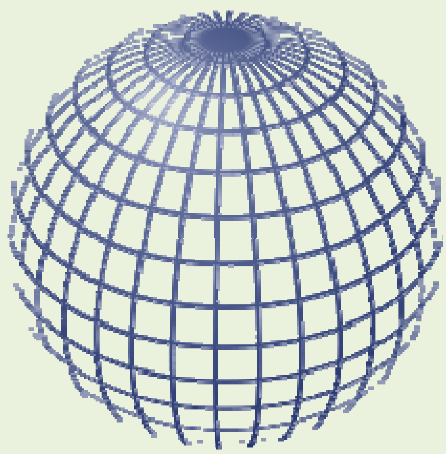


La Geometría Hiperbólica es tan consistente como la Geometría Euclídea, y "su" quinto postulado es: "*Dada una recta y un punto exterior a ella,* **existen al menos dos rectas paralelas** *a la dada que contienen al punto*". En la geometría hiperbólica la suma de los tres ángulos de un triángulo es menor que 180°. Puedes pensar en una geometría hiperbólica si te sitúas sobre una trompeta.

Si reescribimos el quinto postulado como: "*Dada una recta y un punto exterior a ella,* **no existe ninguna recta paralela** *a la dada que contenga al punto*", se obtiene la **Geometría Elíptica**.

Imagina que estás en una esfera. Tendrás que redefinir qué entiendes como "rectas". Si una recta es el camino más corto posible que une dos puntos, tendrás lo que se conoce como **líneas geodésicas** (los meridianos de un globo terráqueo). Entonces, por una de esas *nuevas* rectas y un punto exterior, **todas** las rectas que traces cortan a la primera.

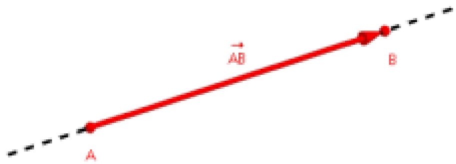
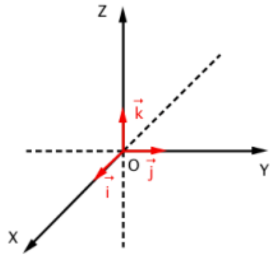
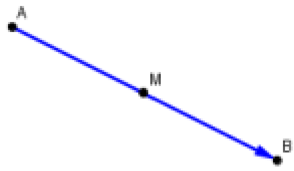
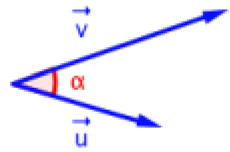
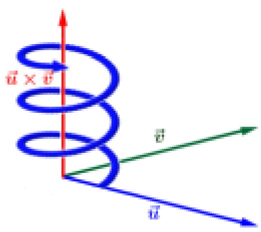
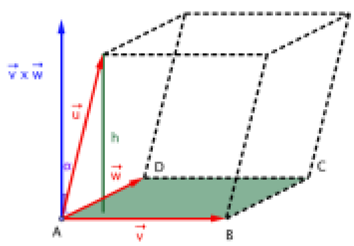
Si lo piensas, cada vez que miras un globo terráqueo estás viendo algo de Geometría Elíptica.

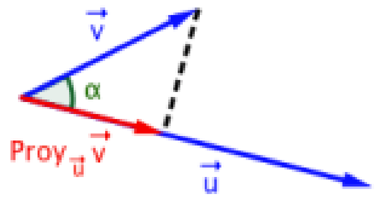
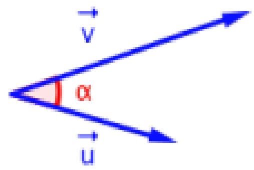
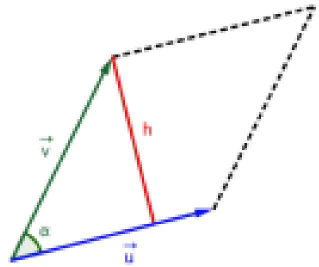
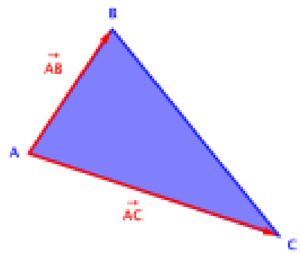
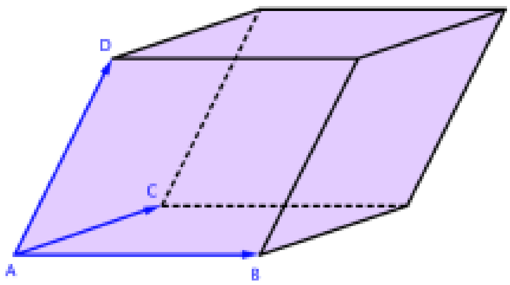
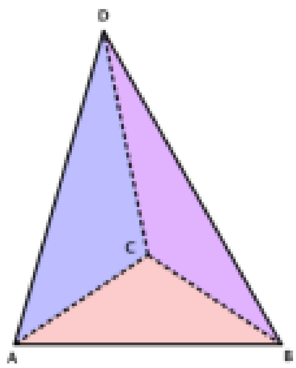


Actualmente las Geometrías No Euclídeas proporcionan otras formas de entender el mundo, siendo utilizadas, por ejemplo, en Teoría de la Relatividad, o en el estudio de fenómenos ópticos y propagación de ondas.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

RESUMEN

		Ejemplos
Punto	Posición en el espacio que no tiene dimensiones (no tiene largo, ancho ni profundidad). Se representa con letras mayúsculas, P, y se caracteriza por sus coordenadas (x,y,z).	
Vector	Segmento orientado que escribimos como $\vec{v}$ y gráficamente se representa por una flecha. Se caracteriza mediante una terna de valores llamados **componentes** (o coordenadas) del vector que escribimos como (v_1, v_2, v_3)	
Base de un sistema de vectores	Se dice que el conjunto de vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ forman una base del espacio, y se denota por $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ cuando verifican: - $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ son linealmente independientes. - Cualquier otro vector se puede escribir como combinación lineal de ellos: $\vec{v} = \lambda_1 \cdot \vec{u}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{u}_2 + \ldots + \lambda_n \cdot \vec{u}_n$.	
Punto medio de un segmento	Dados dos puntos $A\,(a_1, a_2, a_3)$ y $B\,(b_1, b_2, b_3)$, el **punto medio** del segmento AB es: $M\left(\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}, \frac{a_3+b_3}{2}\right)$	
Producto escalar de vectores	Dados dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, se llama **producto escalar**, $\vec{u} \cdot \vec{v}$, al **número real** que resulta al multiplicar el producto de sus módulos por el coseno del ángulo que forman: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \lvert\vec{u}\rvert \cdot \lvert\vec{v}\rvert \cdot \cos\alpha$	
Producto vectorial de vectores	Dados dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, se llama **producto vectorial**, $\vec{u} \times \vec{v}$, al **vector**: - De módulo $\lvert\vec{u} \times \vec{v}\rvert = \lvert\vec{u}\rvert \cdot \lvert\vec{v}\rvert \cdot \operatorname{sen}\alpha$ - Dirección perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$ - Sentido indicado por la **regla de Maxwell**	
Producto mixto de vectores	Se llama **producto mixto de tres vectores**, $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$, al **número real** que resulta de multiplicar escalarmente a $\vec{u}$ por el vector resultante del producto vectorial de $\vec{v}$ y $\vec{w}$: $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$	

Proyección de un vector sobre otro	El producto escalar de dos vectores no nulos $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es igual al producto del módulo de uno de ellos por la proyección del otro sobre él: $$\text{Proy}_{\vec{u}}\vec{v} = \lvert \vec{v} \rvert \cdot \cos\alpha$$	
Ángulo entre vectores	El ángulo entre dos vectores se calcula con la fórmula: $$\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\lvert\vec{u}\rvert\cdot\lvert\vec{v}\rvert} \Rightarrow \alpha = \arccos\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\lvert\vec{u}\rvert\cdot\lvert\vec{v}\rvert}$$	
Área de un paralelogramo	El área del paralelogramo definido por dos vectores se calcula con la fórmula: $$\text{Área} = \lvert \vec{u}\times\vec{v} \rvert$$	
Área de un triángulo	El área del triángulo definido por dos vectores se calcula con la fórmula: $$\text{Área} = \frac{1}{2}\cdot\lvert \vec{u}\times\vec{v} \rvert$$	
Volumen de un prisma	El volumen del paralelepípedo definido por tres vectores se calcula con la fórmula: $$\text{Volumen} = \left\lvert \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right] \right\rvert$$	
Volumen de un tetraedro	El volumen del tetraedro definido por tres vectores se calcula con la fórmula: $$\text{Volumen} = \frac{1}{6}\cdot\left\lvert \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right] \right\rvert$$	

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

1. - Dados los vectores libres:

a) Representa los vectores: $\vec{u} = 2\vec{a} - \vec{c} - 2\vec{b} + 3\vec{d}$, $\vec{v} = -\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c} + 2\vec{d}$ y $\vec{w} = -2\vec{a} - \vec{b} - \frac{5}{2}\vec{c}$.

b) Halla un vector $\vec{d}$ tal que $2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$.

2. - Dados $\vec{a} = (2,-1)$ y $\vec{b} = (-3, m)$, halla el valor de m para que sean linealmente dependientes.

3. - Comprueba si son o no linealmente independientes los siguientes vectores:

a) $\vec{x} = (-2,3)$ e $\vec{y} = (6,-9)$

b) $\vec{x} = (-1,-2,3)$, $\vec{y} = (-2,0,1)$, $\vec{z} = (2,-4,5)$ y $\vec{t} = (3,2,-4)$

c) $\vec{x} = (2,1,0,-1)$, $\vec{y} = (1,-3,-1,0)$ y $\vec{z} = (3,-2,-1,1)$

4. - a) Dados los vectores $\vec{x} = (1,3,-2)$ e $\vec{y} = (3, m,-6)$, halla el valor de m para que los dos vectores sean linealmente independientes.

b) Si $m = -2$, ¿se puede expresar el vector $\vec{z} = (-1,8,1)$ como combinación lineal de $\vec{x}$ e $\vec{y}$?

5. - Dados los vectores $\vec{u} = (-3,4,0)$, $\vec{v} = (1,-2,2)$ y $\vec{w} = (0,-m,1)$, calcula el valor de m para que el vector $\vec{u}$ se pueda expresar como combinación lineal de $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

6. - Dados los vectores $\vec{x} = (1,-2,0)$, $\vec{y} = (3,-1,2)$ y $\vec{z} = (-m,-1,-2)$, halla el valor de m para que los tres vectores sean linealmente dependientes.

En este caso, expresa $\vec{z}$ como combinación lineal de $\vec{x}$ e $\vec{y}$.

7. - Dados los vectores $\vec{u} = (1,1,m)$, $\vec{v} = (0,m,-1)$ y $\vec{w} = (1,2m,0)$, determina el valor de m para que:

a) Sean linealmente independientes.

b) El vector $\vec{v}$ se pueda expresar como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{w}$, y halla dicha combinación.

c) Sean coplanarios.

8. - Los vectores $\vec{x} = (1,0,0)$, $\vec{y} = (-1,0,1)$ y $\vec{z} = (2,1,1)$, ¿forman una base de V^3? En caso afirmativo:

a) Halla las componentes del vector $\vec{u} = (3,-2,5)$ respecto de dicha base.

b) Halla las componentes en la base canónica $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ del vector $\vec{v}$, si sus coordenadas en la base $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ son 2, –3 y 2 respectivamente.

9. - Halla un punto C que esté alineado con A y B, y otro punto D que no lo esté.

10. - De un segmento $\overline{AB}$, el punto B tiene de coordenadas $(-2,0,6)$ y el punto medio del segmento tiene de coordenadas $M\ (-3,2,2)$. Halla las coordenadas del punto A y divide el segmento $\overline{AM}$ en cuatro partes iguales.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

11. - De un segmento $\overline{AB}$, se sabe que $\overrightarrow{AB} = (3,-4,-2)$ y que el punto medio del segmento tiene de coordenadas $M\ (-1,0,3)$. Halla las coordenadas de A y B y dividir el segmento $\overline{AB}$ en 3 partes iguales.

12. - Dados los puntos $A\,(2,0,1)$ y $B\,(0,-2,3)$, halla dos puntos C y D que estén alineados con A y B, de manera que uno de ellos (C) esté situado entre ambos y el otro (D) esté situado a la izquierda de A.

13. - De los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se sabe que $|\vec{u}| = 3$, $\vec{u}\cdot\vec{v} = -12$ y los dos vectores forman un ángulo de 120°. Halla $|\vec{v}|$, $\text{proy}_{\vec{u}}\ \vec{v}$ y $\text{proy}_{2\vec{v}}\ \vec{u}$.

14. - ¿Puede haber dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tales que $\vec{u}\cdot\vec{v} = 8$ siendo $|\vec{u}| = 3$ y $|\vec{v}| = 2$?

15. - Dados los vectores $\vec{u} = (2,-3,6)$ y $\vec{v} = (3,-6,2)$, calcula:

a) El producto escalar $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

b) El módulo de $\vec{u}$ y el módulo de $\vec{v}$.

c) El ángulo formado por ellos.

d) El ángulo formado por $\vec{u}$ y $\vec{u}-\vec{v}$.

e) Un vector perpendicular a $\vec{v}$ que tenga módulo 3. ¿Cuántas soluciones hay?

16. - Dados los vectores $\vec{u} = (1,-2,2)$ y $\vec{v} = (4,-4,-2)$, calcula:

a) El producto escalar $2\vec{u}\cdot 3\vec{v}$.

b) El módulo de $\vec{u}$ y el módulo de $\vec{v}-\vec{u}$.

c) El ángulo formado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{u}+\vec{v}$

d) Los cosenos directores de $\vec{v}$.

e) Un vector perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$ que tenga módulo 6.

17. - Calcula las componentes de un vector $\vec{v}$ que tenga la misma dirección que el vector $\vec{u} = (4,-2,1)$ y su módulo sea 3 y las de otro vector $\vec{w}$ que sea unitario pero con sentido opuesto al vector $\vec{u}$. ¿Cuáles son los cosenos directores de $\vec{u}$?

18. - Los cosenos directores del vector $\vec{u}$ son: $\cos\alpha = 0{,}2$, $\cos\beta = 0{,}3$ y $\cos\gamma = 0{,}87$. Si $|\vec{u}| = 6$, ¿cuáles son sus componentes?

19. - Un vector $\vec{u}$ forma con los vectores $\vec{u}_2$ y $\vec{u}_3$ de la base ortonormal ángulos de 45° y 60°, y con el vector $\vec{u}_1$ un ángulo agudo. Si $|\vec{u}| = 4$, determina las componentes del vector $\vec{u}$.

20. - Determina, si es posible, el valor de m de modo que $\vec{u} = (m,-2,3)$ y $\vec{v} = (-1,m,1)$ sean:

a) Paralelos

b) Perpendiculares

21. - a) Calcula el valor de m para que los vectores $\vec{u} = (-1,m,4)$ y $\vec{v} = (m,-3,2)$ sean perpendiculares.

b) ¿Qué ángulo formarán para $m = 0$ los vectores $(\vec{u} + 2\vec{v})$ y $(\vec{u} - \vec{v})$?

22. - De dos vectores ortogonales se sabe que $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=7$ y $|\vec{u}+\vec{v}|=5$. Halla $|\vec{u}|$ y $|\vec{v}|$.

23. - Dados dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, tales que $|\vec{u}|=16$ y $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=24$, calcula el módulo de $\vec{v}$.

24. - Dados los vectores $\vec{u}=(2,3,8)$ y $\vec{v}=(-1,2,0)$ calcula:

a) Las componentes de un vector unitario de la misma dirección que $\vec{v}$.

b) Un vector de la misma dirección que $\vec{v}$ y cuyo módulo sea igual a la proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$.

c) Un vector perpendicular a ambos y de módulo 2.

25. - Sea $B=\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ una base de vectores tal que $|\vec{u}|=2$, $|\vec{v}|=3$, $|\vec{w}|=1$ y además verifica que $\vec{u}\cdot\vec{v}=4$, $\vec{u}\cdot\vec{w}=3$ y $\vec{v}\cdot\vec{w}=12$. Calcula el valor de m para que los vectores $\vec{a}=11\vec{u}+m\vec{v}+3\vec{w}$ y $\vec{b}=\vec{u}+2\vec{v}+\vec{w}$ sean ortogonales.

26. - Dados los vectores $\vec{a}=(1,0,1)$, $\vec{b}=(2,-1,-2)$ y $\vec{c}=(1,-3,2)$, determina un vector unitario (de módulo 1) que siendo coplanario con $\vec{a}$ y $\vec{b}$, sea ortogonal (perpendicular) a $\vec{c}$.

27. - Dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son tales que $|\vec{u}|=4$, $|\vec{v}|=5$ y $|\vec{u}+\vec{v}|=7$. ¿Qué ángulo forman?

28. - Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores tales que $|\vec{u}|=\sqrt{3}$ y $|\vec{v}|=4$. Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ forman un ángulo de 30°, halla:

a) $\vec{u}\cdot\vec{v}$ y $(\vec{u}-\vec{v})\cdot(2\vec{u}-\vec{v})$

b) $|\vec{u}-\vec{v}|$ y $|2\vec{u}-\vec{v}|$

c) El ángulo que forman los vectores $(\vec{u}-\vec{v})$ y $(2\vec{u}-\vec{v})$

29. - Determina, si es posible, el valor de α de modo que los vectores $\vec{u}=(1,\alpha,2)$ y $\vec{v}=(1,-2,-\alpha)$:

a) Sean paralelos.

b) Sean perpendiculares.

c) Formen un ángulo de 60°.

30. - Halla todos los vectores de módulo 3 que formen un ángulo de 30° con $\vec{u}=(1,-1,1)$ y de 135° con $\vec{v}=(-1,1,0)$.

31. - Halla todos los vectores de módulo 6 que formen un ángulo de 90° con $\vec{u}=(1,-1,0)$ y 45° con $\vec{v}=(-1,0,1)$.

32. - Dados los vectores $\vec{u}=(1,2,-2)$, $\vec{v}=(-1,0,3)$ y $\vec{w}=(2,-1,-2)$, calcula:

a) $|\vec{u}|$, $|\vec{w}\times\vec{v}|$ y $|(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}|$

b) $\vec{v}\cdot(\vec{u}\times\vec{w})$ y $(\vec{u}\times\vec{v})\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$

33. - Dados los vectores $\vec{u}=(1,4,-8)$, $\vec{v}=(1,-1,0)$ y $\vec{w}=(2,1,-1)$ halla:

a) $|\vec{v}|$ y $(\vec{u}\times\vec{v})\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$

b) $|\vec{u}|$, $|\vec{v}\times\vec{w}|$ y $|(\vec{u}\times\vec{w})\times\vec{v}|$

34. - Dados los vectores $\vec{u} = (1,-3,3)$, $\vec{v} = (4,0,-3)$ y $\vec{w} = -2\vec{u} + 3\vec{v}$, calcula:

a) $|\vec{w}|$, $|\vec{w} \times \vec{v}|$ y $|\vec{w} \times (\vec{u} \times \vec{v})|$

b) $\vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{w})$, $\vec{v} \times (\vec{u} - \vec{w})$ y $|(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|$

35. - Dados los vectores $\vec{u} = (1,-1,1)$ y $\vec{v} = (2,3,4)$ calcula:

a) El módulo de $\vec{u}$ y de $\vec{v}$ y el ángulo que forman.

b) El producto vectorial de $\vec{u}$ y de $\vec{v}$.

c) Un vector unitario que sea ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

d) El área del paralelogramo que tiene por lados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

36. - Dados los vectores $\vec{u} = (-1, m, 2)$, $\vec{v} = (2,-1,-4)$ y $\vec{w} = (3,-1,-5)$, se pide:

a) El valor de m para que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tengan distinta dirección.

b) El valor de m para que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean ortogonales.

c) Un vector que tenga módulo $3\sqrt{6}$ y que sea perpendicular a los vectores $\vec{v}$ y $2\vec{v} - \vec{w}$.

37. - Dados los vectores $\vec{u} = (1,1,m)$, $\vec{v} = (0,m,-1)$ y $\vec{w} = (1,2m,0)$, determina el valor de m para que:

a) Sean linealmente independientes.

b) El vector $\vec{v}$ se pueda expresar como combinación lineal de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{w}$.

Halla dicha combinación.

c) Sean coplanarios.

d) El área del paralelogramo determinado por los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ valga 125 u^2.

38. - En un sistema de referencia ortogonal $R = \{O, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$, donde $|\vec{u}_1| = 1$, $|\vec{u}_2| = 2$ y $|\vec{u}_3| = 2$, tenemos los vectores $\vec{a} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 - 2\vec{u}_3$ y $\vec{b} = 2\vec{u}_1 - \vec{u}_2 + \vec{u}_3$. Con estos datos se pide:

a) $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2$, $\vec{u}_3 \cdot \vec{u}_2$, $\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2$, $\vec{u}_3 \cdot \vec{u}_3$

b) $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ y ángulo que forman $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

c) $\vec{u}_2 \times \vec{u}_3$, $\vec{u}_3 \times \vec{u}_1$, $\vec{u}_1 \times \vec{u}_2$, $\vec{b} \times \vec{a}$ y área del triángulo determinado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

d) Repite los apartados anteriores en el caso de ser un sistema de referencia ortonormal.

39. - Encuentra un vector $\vec{x}$ que tenga de módulo 3, y tal que si $\vec{y} = (3,-3,0)$ verifique: $\vec{x} \times \vec{y} = (6,6,3)$.

40. - Sean $A(m-2, m, -5)$, $B(m,1,-5)$ y $C(-1,3,m)$ los vértices de un triángulo ABC. ¿Cuánto vale m para que el triángulo sea rectángulo en B?

41. - Los vértices de un triángulo ABC son $A(\lambda,2,-1)$, $B(5,3,-4)$ y $C(7,\lambda,-2)$. ¿Cuánto vale λ para que el triángulo sea rectángulo en B?

42. - Dos vértices consecutivos de un paralelogramo son $A(1,1,1)$ y $B(0,2,0)$. Si $O(0,0,1)$ es el centro de dicho paralelogramo, halla las coordenadas de los otros dos vértices y el área del paralelogramo.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

43. - Dados los puntos $A(-4,2,-1)$, $B(-1,1,1)$ y $C(2,m,3)$, se pide hallar el valor de m para que los tres puntos:

a) estén alineados.

b) formen un triángulo rectángulo donde $\hat{B}=90^{\circ}$.

c) formen un triángulo isósceles, siendo $\hat{A}$ el ángulo desigual.

d) formen un triángulo de área $\sqrt{52}$ u^2.

44. - Dados los puntos $A(1,1,-1)$, $B(-1,-1,0)$ y $C(3,m,-2)$, se pide:

a) Hallar para qué valores del parámetro m están alineados.

b) Hallar si existen valores de m para los cuales A, B y C son tres vértices de un paralelogramo de área $2\sqrt{5}$ u^2 y, en caso afirmativo, calcularlos.

c) Hallar para qué valor de m formarán un triángulo rectángulo en B, y calcular el área.

45. - Dados los puntos $A(0,0,-1)$, $B(1,0,-2)$, $C(0,1,-2)$ y $D(1,1,1)$ calcula:

a) El área y el perímetro del triángulo de vértices A, B y C.

b) El volumen del tetraedro cuyos vértices son A, B, C y D.

c) El volumen del paralelepípedo determinado por esos cuatro puntos.

d) El área de una de las caras laterales.

46. - Sea la pirámide de vértices $A(0,1,-1)$, $B(1,1,0)$, $C(-1,1,0)$ y $D(1,-2,2)$, calcula:

a) El área del paralelogramo determinado por los puntos A, B y C.

b) El área de cada cara.

c) Su volumen.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

AUTOEVALUACIÓN

1. Dados los vectores de componentes (1, 3, –2) y (3, x, –6), indica el valor de x para que los dos vectores sean linealmente dependientes.

a) 6 b) 9 c) –3 d) –6

2. El módulo del vector de origen A(–2, 3, –2) y extremo B(2, 0, –2) es:

a) $\sqrt{82}$ b) 25 c) $\sqrt{41}$ d) 5

3. Dados los vectores $\vec{u} = (1, -3, 5)$, $\vec{v} = (-6, 3, 0)$ el vector $\vec{w} = 3\vec{u} - 2\vec{v}$ tiene de componentes:

a) (15, –15, 15) b) (9, –15, 15) c) (15, 15, 15) d) (15, –12, 15)

4. Dados los puntos $A(4, -1, 5)$ y $B(2, 7, -5)$, las coordenadas del punto medio del segmento AB son:

a) (3, 3, 0) b) (6, –6, 10) c) (3, 4, 0) d) (6, –4, 10)

5. Dados los vectores $\vec{u} = (1, -3, 5)$, $\vec{v} = (-6, 3, 0)$, su producto escalar es:

a) 15 b) –15 c) –3 d) –6

6. Dado el vector $\vec{v} = (-6, 3, 0)$ indica cuál de los vectores $\vec{u}$ es ortogonal a él:

a) $\vec{u} = (1, -3, 5)$ b) $\vec{u} = (1, -2, 5)$ c) $\vec{u} = (1, 2, 7)$ d) $\vec{u} = (2, 5, 5)$

7. Dados los puntos $A(4, -1, 5)$, $B(2, 7, -5)$ y C(6, –7, 16) el área del triángulo construido sobre ellos es:

a) 150 b) 201 c) 30 d) $\sqrt{201}$

8. Dados los vectores $\vec{u} = (1, -3, 5)$, $\vec{v} = (-6, 3, 0)$, su producto vectorial es:

a) $\vec{u} \times \vec{v} = (-15, -30, -15)$ b) $\vec{u} \times \vec{v} = (15, 15, 15)$ c) $\vec{u} \times \vec{v} = (-15, 30, -15)$ d) $\vec{u} \times \vec{v} = (15, -30, 15)$

9. Dados los vectores $\vec{u} = (1, -3, 5)$, $\vec{v} = (-6, 3, 0)$ y $\vec{w} = (1, 1, 1)$, su producto mixto es:

a) –60 b) 45 c) –15 d) 0

10. Dados los vectores $\vec{u} = (1, -3, 5)$, $\vec{v} = (-6, 3, 0)$ y $\vec{w} = (1, 1, 1)$, el volumen del paralelepípedo construido sobre ellos es:

a) 60 b) 45 c) 15 d) 0

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

Apéndice: Problemas de vectores en las P.A.A.U.

(1) Busca el área del polígono de vértices $A(4,7,8)$, $B(2,3,4)$, $C(-1,-2,1)$ y $D(1,2,5)$.

(2) Las coordenadas de los puntos medios de los lados de un triángulo ABC son $M(1,0,0)$, $N(0,1,0)$ y $P(0,0,1)$.

a) Obtén las coordenadas de los vértices A, B y C del triángulo.

b) Halla el área del triángulo.

(3) Los puntos $P(2,0,0)$ y $Q(0,4,2)$ son dos vértices de un triángulo isósceles. Obtén las coordenadas del tercer vértice sabiendo que el punto es de la forma $R(x,0,20)$. ¿Es única la solución?

(4) Se considera el paralelepípedo cuyos vértices de la cara inferior son los puntos $A(-1,1,0)$, $B(0,1,1)$, $C(3,0,0)$ y $D(2,0,-1)$ con A y C vértices opuestos. Sea $A'(-3,1,0)$ el vértice adyacente a A en la cara superior. Calcule:

a) Los vértices de la cara superior.

b) El volumen del paralelepípedo.

(5) Sean los puntos $A(x,4,3)$, $B(1,2,2)$ y $C(-1,0,1)$.

a) ¿Para qué valores de x los puntos no forman un triángulo?

b) Con $x = 1$ calcula el área del triángulo que forman los puntos.

(6) Si $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son vectores del espacio, indica cuál o cuáles de las siguientes expresiones no tienen sentido:

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c}) \qquad \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) \qquad \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{c} \qquad (\vec{a}\cdot\vec{b})\times\vec{c} \qquad |\vec{a}|\cdot\vec{b} \qquad (\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{c}-\vec{a})$$

(7) Sean $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ tres vectores linealmente independientes. Indica cuál o cuáles de los siguientes productos mixtos vale cero:

$$[\vec{a}+\vec{c},\vec{a}-\vec{c},\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}] \qquad [\vec{a}+\vec{c},\vec{b},\vec{a}+\vec{b}] \qquad [\vec{a}-\vec{c},\vec{b}-\vec{c},\vec{c}-\vec{a}]$$

(8) Señala si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. En caso de ser ciertas, justifícalas; en caso contrario, pon ejemplos que lo confirmen.

a) El producto mixto de tres vectores cualesquiera no nulos es siempre distinto de cero.

b) Si $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son tres vectores del espacio tridimensional $\mathbb{R}^3$ no nulos que satisfacen la condición $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$, entonces se verifica que $\vec{b}=\vec{c}$.

(9) Dados los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$, tales que $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=1$, $|\vec{c}|=4$ y $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ calcula la siguiente suma de productos escalares: $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{c}$.

(10) Dados los puntos $A(2,-2,1)$, $B(0,1,-2)$, $C(-2,0,4)$ y $D(2,-6,2)$:

a) Prueba que el cuadrilátero $ABCD$ es un trapecio (tiene dos lados paralelos) y halla la distancia entre los dos lados paralelos.

b) Halla el área del triángulo ABC.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

(11) ¿Es siempre cierto que $(\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b})=2\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$? En caso afirmativo, justifícalo; en caso contrario, pon un ejemplo que lo confirme.

(12) Dados los puntos $A(2,0,-2)$, $B(3,-4,-1)$, $C(5,4,-3)$ y $D(0,1,4)$ calcula:

a) El área del triángulo de vértices A, B y C.

b) El volumen del tetraedro cuyos vértices son A, B, C y D.

(13) a) Demuestra que si tres vectores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$ son perpendiculares entre sí entonces se verifica:

$$|\vec{v}_1+\vec{v}_2+\vec{v}_3|^2=|\vec{v}_1|^2+|\vec{v}_2|^2+|\vec{v}_3|^2$$

donde $|\vec{w}|$ denota el módulo del vector $\vec{w}$.

b) Dados los vectores $\vec{v}_1=(1,1,-1)$, $\vec{v}_2=(1,0,1)$ halla un vector $\vec{v}_3$ tal que:

$$|\vec{v}_1+\vec{v}_2+\vec{v}_3|^2=|\vec{v}_1|^2+|\vec{v}_2|^2+|\vec{v}_3|^2$$

c) Dado el vector $\vec{v}=(1,2,3)$, halla los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ que cumplan las tres condiciones siguientes:

a) $\vec{v}_1$ tiene sus tres coordenadas iguales y no nulas;

b) $\vec{v}_1$ es perpendicular a $\vec{v}_2$

c) $\vec{v}=\vec{v}_1+\vec{v}_2$

(14) Los puntos $A(1,1,1)$, $B(2,2,2)$ y $C(1,3,3)$ son tres vértices consecutivos de un paralelogramo.

a) Halla las coordenadas del cuarto vértice D y calcula el área de dicho paralelogramo.

b) Clasifica el paralelogramo por sus lados y por sus ángulos.

(15) Sean A, B y C tres puntos del espacio tridimensional que verifican la relación $\overrightarrow{CB}=-3\cdot\overrightarrow{AB}$

a) Calcula el valor que toma k en la expresión $\overrightarrow{AC}=k\cdot\overrightarrow{AB}$

b) Si $A(1,2,-1)$ y $B(3,6,9)$, halla las coordenadas del punto C que cumple la relación de partida.

(16) Se consideran los puntos $A(1,a,0)$, $B(1,1,a-2)$ y $C(1,-1,a)$.

a) Comprueba que no están alineados, cualquiera que sea el valor que tome el parámetro a.

b) Halla el área del triángulo que determinan los tres puntos.

(17) Resuelve la siguiente ecuación vectorial:

$$\vec{x}\times(2,1,-1)=(1,3,5)$$

sabiendo que $|\vec{x}|=\sqrt{6}$.

(18) Dados los vectores $\vec{u}=(a,1+a,2a)$, $\vec{v}=(a,1,a)$ y $\vec{w}=(1,a,1)$, se pide:

a) Determina los valores de a para que los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sean linealmente dependientes.

b) Estudia si el vector $\vec{c}=(3,3,0)$ depende linealmente de los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ para el caso $a=2$.

c) Justifica razonadamente si para $a=0$ se cumple la igualdad $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=0$.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores