# MATEMÁTICAS II 2º Bachillerato Capítulo 10a: Integral indefinida.



**LibrosMareaVerde.tk**

**www.apuntesmareaverde.org.es**



**Autores: Leticia González Pascual y Álvaro Valdés Menéndez**

**Revisores: María Molero y Javier Rodrigo**


Todas las imágenes han sido creadas por los autores utilizando *software* libre (GeoGebra y GIMP)

## Índice



## Resumen

A estas alturas de tu vida estudiantil has aprendido muchos símbolos matemáticos. Posiblemente este sea el último que aprenderás en el instituto, el símbolo de integral:

$$\int$$

Fue introducido por el matemático alemán *Gottfried Leibniz* en 1675, basándose en la palabra latina *summa*, 'suma', escrito ſumma, tomando sólo la inicial. Por tanto, este símbolo es una S, y la integral no deja de representar una suma.

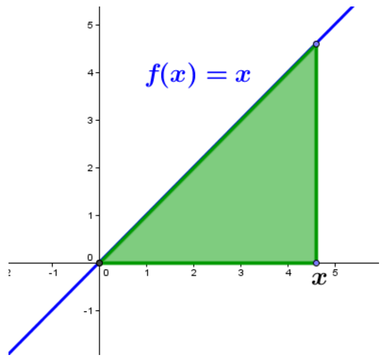
El término "Cálculo integral", por su parte, fue introducido por *Jakob Bernoulli* en 1690.


Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

## Actividades de introducción

- *Calcula el área de la región limitada por la función* $f(x) = x$ *entre el origen de coordenadas y un punto genérico de abscisa* $x$.

**Solución:**




Si representamos la función $f(x) = x$ y dibujamos la superficie entre ella y el eje $OX$, obtenemos el triángulo rectángulo de la figura.

Sabemos que el área del triángulo es: $\text{Área} = \dfrac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}$

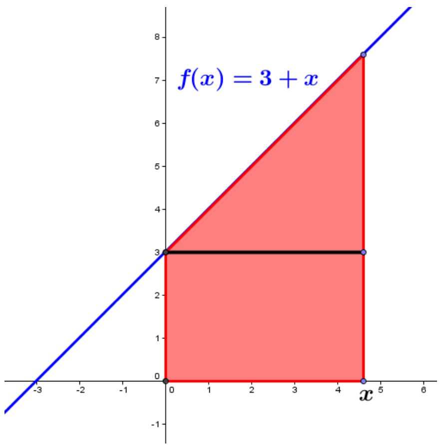
Tanto la base como la altura valen $x$ unidades, por tanto:

$$\text{Área} = \frac{x \cdot x}{2} = \frac{x^2}{2}$$

Por tanto, el área bajo la curva $f(x) = x$ se calcula como $A(x) = \dfrac{x^2}{2}$.

- *Calcula el área de la región limitada por la función* $f(x) = 3 + x$ *entre el origen de coordenadas y un punto genérico de abscisa* $x$.

**Solución:**




Como antes, representamos la función $f(x) = 3 + x$ y dibujamos la superficie entre ella y el eje $OX$. Ahora obtenemos el trapecio rectángulo de la figura.

Si dividimos la figura en un rectángulo de altura 3 $u$ y un triángulo, el área se calcula como:

$$\text{Área} = 3 \cdot x + \frac{x \cdot x}{2} = 3x + \frac{x^2}{2}$$

Por tanto, el área bajo la curva $f(x) = 3 + x$ se calcula como:

$$A(x) = 3x + \frac{x^2}{2}.$$

- *Repite los procedimientos anteriores para calcular el área de la región limitada por las funciones* $f(x) = a$, $f(x) = a \cdot x$ y $f(x) = a \cdot x + b$ (con $a$ y $b \in \mathbb{R}$) *entre el origen de coordenadas y un punto genérico de abscisa* $x$.

**Analiza:**

- Deriva las expresiones obtenidas en los ejercicios anteriores y razona qué relación hay entre las funciones $A(x)$ y $f(x)$.
- Recuerda la interpretación de área como "*suma de las unidades cuadradas encerradas por una figura*". Aplícala para determinar el área de la función $f(x) = 16 - x^2$, representándola en una cuadrícula y contando el número de cuadrados bajo ella para diferentes valores de $x$.
- Razona qué ocurre con el área cuando la función $f(x)$ es negativa en el intervalo analizado.



Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

## 1. PRIMITIVA DE UNA FUNCIÓN. LA INTEGRAL INDEFINIDA

### 1.1. Definición de primitiva

Se llama **función primitiva** de una función $f(x)$ a otra función $F(x)$ tal que la derivada de $F(x)$ es $f(x)$, es decir, $F'(x) = f(x)$

***Ejemplo:***

- *La función* $F(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x$ *es una primitiva de* $f(x) = 3x^2 - x + 3$, *ya que* $F'(x) = f(x)$.

Teniendo en cuenta las propiedades de la derivada, se verifica que si $F(x)$ es una función primitiva de $f(x)$, cualquier otra función primitiva de $f(x)$ es de la forma $F(x)+C$, con $C \in \mathbb{R}$.

En efecto; consideramos la función $F(x)+C$, tal que $F'(x) = f(x)$ y $C \in \mathbb{R}$. Si derivamos:

$$(F(x)+C)' = F'(x)+C' = f(x)+0 = f(x)$$

Por tanto, $F(x)+C$ es primitiva de $f(x)$.

### 1.2. Definición de integral indefinida

La **integral indefinida** de una función $f(x)$ es el conjunto de todas sus primitivas, y se representa como $\int f(x)dx$. Se lee "integral de $f(x)$ diferencial de $x$".

Por tanto, si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$:

$$\int f(x)dx = F(x)+C$$

A $C$ se la denomina **constante de integración**, y el $dx$ nos indica que estamos integrando respecto de $x$.

Esto que ahora no parece tener demasiada importancia, sí la tendrá más adelante, ya que está relacionado con la regla de la cadena que vimos en el capítulo anterior y, en el futuro, aprenderás a realizar integrales en varias variables.

Por otro lado, si recordamos lo visto en la actividad inicial y lo explicado en el "Resumen" acerca del origen del símbolo de integral, la expresión de la integral indefinida es la estilización de la expresión:

Suma de $f(x)$ por $\Delta x$ cuando $\Delta x \to 0$,

es decir:

$\int f(x)dx =$ "la suma del área de todos los rectángulos de altura $f(x)$ y base infinitesimal ($dx$)"

***Ejemplos:***

- $\int 4x^3 dx = x^4 + C$ *porque* $(x^4 + C)' = 4x^3$.
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$ *porque* $(\ln x + C)' = \frac{1}{x}$


Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

## 1.3. Propiedades de la integral

Las propiedades de las derivadas justifican muchas de las propiedades de las integrales.

### Suma (y resta) de integrales

Sabiendo que si $h(x) = f(x) + g(x) \Rightarrow h'(x) = f'(x) + g'(x)$:

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

### Producto por un número real

Sabiendo que si $h(x) = k \cdot f(x) \Rightarrow h'(x) = k \cdot f'(x)$:

$$\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$$

***Ejemplos:***

- $\int (5x^4 + 2x)dx = \int 5x^4 dx + \int 2x\,dx = x^5 + x^2 + C$ *porque* $(x^5 + x^2 + C)' = 5x^4 + 2x$.
- $\int 7\cos x\,dx = 7\int \cos x\,dx = 7\,\mathrm{sen}\,x + C$ *porque* $(7\,\mathrm{sen}\,x + C)' = 7\cos x$

## Actividades resueltas

- *Determina los valores de a, b y c para los que* $F(x) = ax^3 + be^x + cx$ *es una primitiva de la función* $f(x) = 7x^2 - 5e^x + 3$.

  Como $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$:

  $$F'(x) = f(x) \Rightarrow 3ax^2 + be^x + c = 7x^2 - 5e^x + 3 \Rightarrow \{a = \tfrac{7}{3}, b = -5, c = 3\}$$

- *Determina a y b para que* $F(x) = a\ln x^3 + bx$ *sea una primitiva de* $f(x) = \ln x^2 - 5$.

  Como $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$:

  $$F'(x) = f(x) = a\frac{3x^2}{x^3} + b \neq \ln x^2 - 5 \Rightarrow \text{Es imposible}$$

- *Si x representa el volumen de producción de una fábrica, el coste marginal de la misma viene dado por la función* $f(x) = 3 + 8x + 15x^2$. *Encuentra la función del coste total,* $F(x)$*, si se sabe que dicha función viene dada por la primitiva F de f que verifica que* $F(0) = 100$.

  Como $F$ es una primitiva de $f(x) = 3 + 8x + 15x^2$:

  $$F(x) = \int f(x)dx = \int (3 + 8x + 15x^2)dx = 5x^3 + 4x^2 + 3x + C$$

  Nos dicen que $F(0) = 100$:

  $$F(0) = 100 \Rightarrow 5 \cdot 0^3 + 4 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 + C = 100 \Rightarrow C = 100$$

  Entonces:

  $$F(x) = 5x^3 + 4x^2 + 3x + 100$$


Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

## Actividades propuestas

1. Calcula las siguientes primitivas:

   a) $\int 4x^3 dx$  b) $\int 3x^2 dx$  c) $\int 5x^4 dx$  d) $\int \left(5x^4 - 4x^3 + 3x^2\right) dx$

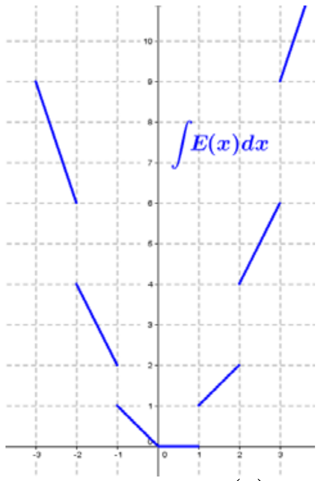
2. Dada $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$, calcula la primitiva $F(x)$ de $f(x)$ que verifica $F(0) = 4$.

3. Comprueba si $F(x) = 4x^3 + 2x^2 - x + 5$ es una primitiva de $f(x) = 12x^2 + 4x + 3$. En caso negativo, explica por qué.

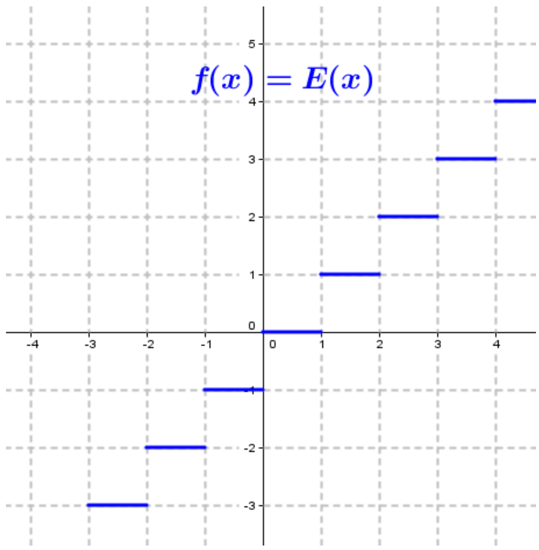
4. Determina los valores de $a$, $b$, $c$ y $d$ para los que $F(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ es una primitiva de la función $f(x) = 4x^2 - 5x + 3$.

5. Al resolver una primitiva, Javier y Ricardo han utilizado métodos diferentes y, como era de esperar, han obtenido expresiones distintas. Después de revisarlo muchas veces y no encontrar ningún error en los cálculos, le llevan el problema a la profesora para ver quién tiene bien el ejercicio.
   Para su sorpresa, la profesora les dice que ambos tienen bien el problema. ¿Cómo es posible?

6. Razona por qué la gráfica siguiente:




es una primitiva de la función "parte entera de $x$", $E(x)$, (salvo en los puntos de discontinuidad donde no es derivable):





Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

## 2. INTEGRALES DE FUNCIONES ELEMENTALES

### 2.1. Integral del diferencial de $x$. Integrales inmediatas

El término $dx$ está relacionado, como su propio nombre indica, con el concepto de diferencial visto en el capítulo anterior. Teniendo en cuenta que la derivada y la integral son operaciones inversas una de la otra, es inmediato deducir que:

$$\int dx = x + C \quad \text{con} \quad C \in \mathbb{R}.$$

Esta idea nos permite definir las integrales inmediatas:

**Integrales inmediatas** son las que se obtienen directamente por la propia definición de integral.

Si recordamos la regla de la cadena para la derivación:

$$F(x) = f(u) \Rightarrow F'(x) = f'(u) \cdot u'$$

podemos reescribirla en forma diferencial como:

$$F(x) = f(u) \Rightarrow dF = f'(u) \cdot du$$

y, calculando su integral:

$$\int f'(u) \cdot du = \int dF = F(x) + C$$

***Ejemplos:***

- $\int (5x^4 + 6x) \cdot e^{x^5 + 3x^2}\, dx = \int e^{x^5+3x^2}\, d(x^5 + 3x^2) = \int e^u\, du = e^u + C = e^{x^5+3x^2} + C$
- $\int \sqrt[3]{x+3}\, dx = \int (x+3)^{1/3}\, d(x+3) = \dfrac{(x+3)^{4/3}}{\frac{4}{3}} + C = \dfrac{3}{4}\sqrt[3]{(x+3)^4} + C$
- $\int \dfrac{\ln x}{x} dx = \int \ln x \cdot \dfrac{dx}{x} = \int \ln x\, d(\ln x) = \dfrac{(\ln x)^2}{2} + C = \frac{1}{2}\ln^2 x + C$

### 2.2. Integral de la función constante

La integral de una constante es igual a esa constante multiplicada por $x$.

$$\int k\, dx = k \cdot x + C \quad \text{con} \quad C \in \mathbb{R}.$$

En efecto; consideramos la función $F(x) = k\,x + C$, con $C \in \mathbb{R}$. Si derivamos:

$$F'(x) = (k\,x + C)' = k + 0 = k$$

También podríamos demostrarlo con lo visto en 1.3.2 y en 2.1:

$$\int k\, dx = k \cdot \int dx = k \cdot x + C$$

***Ejemplos:***

- $\int 3\, dx = 3x + C$
- $\int \frac{3}{5}\, dx = \frac{3}{5} x + C$
- $\int (-8)\, dx = -8x + C$
- $\int 2\sqrt{3}\, dx = 2\sqrt{3}\, x + C$


Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

## 2.3. Integrales de funciones potenciales

Ya conocemos la derivada de la función potencial:

$$f(x)=x^n \Rightarrow f'(x)=n\cdot x^{n-1} \quad \text{con } n\in\mathbb{R}$$

También conocemos que:

$$f(x)=\ln x \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}=x^{-1}$$

Es fácil razonar el proceso inverso:

$$\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C \text{ si } n\neq -1 \text{ y con } C\in\mathbb{R}.$$

***Ejemplos:***

- $\int x^5\,dx=\frac{x^{5+1}}{5+1}+C=\frac{x^6}{6}+C$
- $\int \sqrt[3]{x}\,dx=\int x^{1/3}\,dx=\frac{x^{1/3+1}}{\frac{1}{3}+1}+C=\frac{x^{4/3}}{\frac{4}{3}}+C=\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}+C$
- $\int \frac{1}{x^3}dx=\int x^{-3}\,dx=\frac{x^{-3+1}}{-3+1}+C=\frac{x^{-2}}{-2}+C=\frac{-1}{2x^2}+C$

El caso $n=-1$ corresponde al logaritmo neperiano:

$$\int \frac{1}{x}dx=\int x^{-1}dx=\ln|\,x\,|+C \quad \text{con} \quad C\in\mathbb{R}.$$

Donde el valor absoluto se debe a que tenemos que plantear todas las posibles funciones cuya derivada sea la función del integrando, y se cumple que:

$$f(x)=\ln|\,x\,|=\begin{cases}\ln(-x) & \text{si } x<0\\ \ln x & \text{si } x>0\end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases}\frac{-1}{-x} & \text{si } x<0\\ \frac{1}{x} & \text{si } x>0\end{cases} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x} \quad \forall x\neq 0$$

Estas dos fórmulas se pueden generalizar a partir de la regla de la cadena, como vimos antes:

$$\int [f(x)]^n\cdot f'(x)dx=\frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1}+C \text{ si } n\neq -1 \quad \text{y} \quad \int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|\,f(x)|+C \quad \text{con} \quad C\in\mathbb{R}.$$

***Ejemplos:***

- $\int \frac{-4}{9-4x}dx=\ln|\,9-4x\,|+C$
- $\int (x^2+2)^5\cdot x\,dx=\frac{1}{2}\int (x^2+2)^5\cdot 2x\,dx=\frac{1}{2}\int [f(x)]^5\cdot f'(x)dx=\frac{1}{2}\frac{[f(x)]^6}{6}+C=\frac{(x^2+2)^6}{12}+C$
- $\int \frac{\cos x-\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x+\cos x}dx=\ln|\operatorname{sen} x+\cos x\,|+C$


Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

## 2.4. Integrales de funciones exponenciales

Partiendo de la derivada de las funciones exponenciales:

$$f(x)=e^x \Rightarrow f'(x)=e^x \quad \text{y} \quad f(x)=a^x \Rightarrow f'(x)=\ln a\cdot a^x$$

deducimos:

$$\int e^x dx = e^x + C \quad \text{y} \quad \int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C \quad \text{con} \quad C\in\mathbb{R} \text{ y } a\neq 1.$$

Y su generalización con la regla de la cadena:

$$\int e^{f(x)}\cdot f'(x)dx = e^{f(x)} + C \quad \text{y} \quad \int a^{f(x)} f'(x)dx=\frac{a^{f(x)}}{\ln a}+C \quad \text{con} \quad C\in\mathbb{R} \text{ y } a\neq 1.$$

***Ejemplos:***

- $\int 5^x dx = \frac{5^x}{\ln 5}+C$
- $\int 7^{2x^2} 4x dx = \frac{7^{2x^2}}{\ln 7}+C$
- $\int 8e^{8x} dx = e^{8x} + C$
- $\int 9e^x dx = 9\int e^x dx = 9e^x + C$
- $\int e^{5x}dx=\int\frac{e^{5x}\cdot 5}{5}dx=\frac{1}{5}\int e^{5x}\cdot 5dx=\frac{1}{5}e^{5x}+C$

Necesitamos la derivada del exponente. Lo solucionamos multiplicando y dividiendo por 5

- $\int x^2\cdot e^{x^3}dx=\int\frac{x^2\cdot e^{x^3}\cdot 3}{3}dx=\frac{1}{3}\int e^{x^3}\cdot 3x^2 dx=\frac{1}{3}e^{x^3}+C$

Necesitamos la derivada del exponente, es decir, $3x^2$. Tenemos el $x^2$, pero nos falta el 3. Para solucionarlo, multiplicamos y dividimos por 3

- $\int 2^{-\frac{x}{3}}dx=\int\frac{2^{-\frac{x}{3}}\cdot(-3)}{-3}dx=-3\int -\frac{1}{3}\cdot 2^{-\frac{x}{3}}dx=-3\cdot\frac{2^{-\frac{x}{3}}}{\ln 2}+C$

Necesitamos la derivada del exponente, es decir, $-\frac{1}{3}$.
Para ello, dividimos y multiplicamos por –3.

## 2.5. Integrales de funciones trigonométricas

$$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C \quad \text{y} \quad \int \operatorname{sen} f(x)\cdot f'(x)dx = -\cos f(x) + C \quad \text{con } C\in\mathbb{R}.$$

$$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C \quad \text{y} \quad \int \cos f(x)\cdot f'(x)dx = \operatorname{sen} f(x) + C \quad \text{con } C\in\mathbb{R}.$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \operatorname{tg} x + C \quad \text{y} \quad \int \sec^2 f(x)\cdot f'(x)dx = \operatorname{tg} f(x) + C \quad \text{con } C\in\mathbb{R}.$$

***Ejemplos:***

- $\int \operatorname{sen}(x-7)dx = -\cos(x-7)+C$
- $\int 4x\cdot\operatorname{sen}(2x^2)dx = -\cos(2x^2)+C$
- $\int\frac{\cos(\ln 2x)}{x}dx=\int\cos(\ln 2x)\cdot\frac{1}{x}dx=\operatorname{sen}(\ln 2x)+C$

## 2.6. Integrales cuyo resultado son funciones trigonométricas inversas

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \text{arc sen } x + C \\ -\text{arc cos } x + C \end{cases} \quad \text{y} \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-f^2(x)}} \cdot f'(x)dx = \text{arc sen } f(x) + C \quad \text{con } C \in \mathbb{R}.$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \text{arc tg } x + C \\ -\text{arc cotg } x + C \end{cases} \quad \text{y} \quad \int \frac{1}{1+f^2(x)} \cdot f'(x)dx = \text{arc tg } f(x) + C \quad \text{con } C \in \mathbb{R}.$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \begin{cases} \text{arc sec } x + C \\ -\text{arc cosec } x + C \end{cases} \quad \text{y} \quad \int \frac{f'(x)dx}{f(x)\sqrt{f^2(x)-1}} = \text{arcsec}[f(x)] + C \quad \text{con } C \in \mathbb{R}.$$

***Ejemplos:***

- $\int \frac{4}{\sqrt{1-(4x)^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-(4x)^2}} \cdot 4dx = \text{arc sen}(4x) + C$
- $\int \frac{3}{\sqrt{1-4x^2}} dx = \int \frac{3}{\sqrt{1-(2x)^2}} dx = 3\int \frac{2}{2\sqrt{1-(2x)^2}} dx = \frac{3}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}} \cdot 2dx = \frac{3}{2}\text{arc sen}(2x) + C$
- $\int \frac{1}{1+\ln^2(x^2+1)} \cdot \frac{6x}{x^2+1} dx = 3\int \frac{1}{1+\ln^2(x^2+1)} \cdot \frac{2x}{x^2+1} dx = 3 \cdot \text{arc tg}[\ln(x^2+1)] + C$

## Actividades resueltas

- *Calcula las siguientes primitivas:*

  - $\int x\sqrt{2x^2+5}\,dx$. Observamos que la derivada del radicando es 4*x*, así que multiplicamos y dividimos entre 4:

    $$\int x\sqrt{2x^2+5}\,dx = \tfrac{1}{4}\int 4x \cdot \sqrt{2x^2+5}\,dx = \tfrac{1}{4}\int \sqrt{2x^2+5} \cdot 4x\,dx$$

    Entonces, esta primitiva es equivalente a $\int \sqrt{u}\,du = \int u^{\frac{1}{2}}\,du = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{3/2} + C = \frac{2\sqrt{u^3}}{3} + C$:

    $$\int x\sqrt{2x^2+5}\,dx = \frac{1}{4} \cdot \frac{2\sqrt{(2x^2+5)^3}}{3} + C = \frac{\sqrt{(2x^2+5)^3}}{6} + C$$

  - $\int \frac{1}{(1+e^{-2x}) \cdot e^x} dx$. La función *más importante* es la exponencial, y vemos que la expresión más compleja se encuentra en un denominador en una forma similar al arco tangente.

    La reescribimos como:

    $$\int \frac{1}{1+e^{-2x}} \cdot \frac{1}{e^x} dx = \int \frac{1}{1+e^{-2x}} \cdot e^{-x} dx = \int \frac{1}{1+(e^{-x})^2} \cdot e^{-x} dx$$

    Y se confirma la hipótesis. Multiplicando y dividiendo entre (–1), para completar la derivada de $e^{-x}$:

    $$\int \frac{1}{(1+e^{-2x})e^x} dx = -\int \frac{1}{1+(e^{-x})^2} \cdot (-e^{-x})dx = -\int \frac{1}{1+u^2} \cdot du = -\text{arc tg}(e^{-x}) + C$$


Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

# 3. MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

## 3.1. Integración por cambio de variable

La integración por cambio de variable busca transformar la primitiva dada en una más sencilla, y puede hacerse de dos formas diferentes:

**Caso 1.** Identificar una parte del integrando con una nueva variable *t*.

***Ejemplo:***

- $\int (3x+2)^4\,dx$ . No es necesario un cambio de variable, pero vamos a mostrar el mecanismo:

  Hacemos el binomio igual a *t* y diferenciamos ambos términos:

$$\left| \begin{array}{l} 3x+2=t \\ 3dx=dt \to dx=\dfrac{dt}{3} \end{array} \right\rangle \Rightarrow \int (3x+2)^4\,dx = \int t^4 \cdot \frac{dt}{3} = \frac{1}{3}\int t^4 dt$$

  Resolvemos la primitiva en la forma habitual:

$$\frac{1}{3}\int t^4 dt = \frac{1}{3}\cdot\frac{t^5}{5}+C = \frac{t^5}{15}+C$$

  Finalmente, deshacemos el cambio:

$$\int (3x+2)^4\,dx = \frac{(3x+2)^5}{15}+C$$

El caso más frecuente es aquél en el que observamos una función *complicada* y su derivada:

$$\int f[g(x)]\,g'(x)\,dx$$

Una vez identificada, el cambio de variable consiste en llamar a dicha función *t* y diferenciar:

$$\int f[g(x)]\,g'(x)\,dx \to \left| \begin{array}{c} g(x)=t \\ g'(x)dx=dt \end{array} \right\rangle$$

La integral se transforma en otra que integraremos:

$$\int f(t)\,dt = F(t)+C$$

Para, finalmente, deshacer el cambio:

$$\int f[g(x)]\,g'(x)\,dt = F[g(x)]+C$$

***Ejemplo:***

- $\int \left(3\,\mathrm{tg}^2 x + 2\,\mathrm{tg}\,x + 1\right)\dfrac{dx}{\cos^2 x}$. La derivada de la tangente es $(\mathrm{tg}\,x)' = \sec^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, y así:

  Hacemos la tangente igual a *t*, diferenciamos ambos términos e integramos:

$$\left| \begin{array}{l} \mathrm{tg}\,x = t \\ \dfrac{dx}{\cos^2 x} = dt \end{array} \right\rangle \Rightarrow \int \left(3\,\mathrm{tg}^2 x + 2\,\mathrm{tg}\,x + 1\right)\frac{dx}{\cos^2 x} = \int \left(3t^2+2t+1\right)dt = t^3+t^2+t+C$$

  Deshacemos el cambio y obtenemos:

$$\int \left(3\,\mathrm{tg}^2 x + 2\,\mathrm{tg}\,x + 1\right)\frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}^3 x + \mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg}\,x + C$$

Muchas veces se convertirá en una integral inmediata y, como en los ejemplos, no habría sido necesario dicho cambio.


Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

**Caso 2.** El cambio será de la forma $x = g(t)$, donde $g(t)$ se elegirá de forma adecuada para simplificar el integrando. Se diferencia la igualdad:

$$\int f(x)\,dx \to \left| \begin{array}{l} x = g(t) \\ dx = g'(t)\,dt \end{array} \right\rangle$$

Sustituimos en la integral, integramos y deshacemos el cambio hallando la función inversa de $g$:

$$\int f[g(t)]\,g'(t)\,dt = F(t) + C \to \left| \begin{array}{l} x = g(t) \\ \quad \Rightarrow t = g^{-1}(x) \end{array} \right\rangle \Rightarrow \int f(x)\,dx = F\left[g^{-1}(x)\right] + C$$

***Ejemplo:***

- $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}$. La expresión del radical es similar a la relación que existe entre las funciones trigonométricas, así que *intentamos* el cambio:

$$\left| \begin{array}{l} x = \operatorname{sen} t \\ dx = \cos t\,dt \end{array} \right\rangle \Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}} = \int \frac{\cos t\,dt}{\sqrt{\left[1-(\operatorname{sen} t)^2\right]^3}} = \int \frac{\cos t\,dt}{\sqrt{\left(\cos^2 t\right)^3}} = \int \frac{\cos t\,dt}{\cos^3 t} = \int \frac{dt}{\cos^2 t}$$

Esta primitiva es inmediata:

$$\int \frac{dt}{\cos^2 t} = \operatorname{tg} t + C$$

Finalmente, deshacemos el cambio:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}} = \left| \begin{array}{l} x = \operatorname{sen} t \\ t = \operatorname{arc\,sen} x \end{array} \right\rangle = \operatorname{tg}(\operatorname{arc\,sen} x) + C$$

En este caso, la expresión final es bastante *fea*, pero podemos mejorarla. Si en lugar de deshacer el cambio directamente buscamos la relación entre el seno y la tangente:

$$\operatorname{tg} t = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} = \frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}}$$

Obtenemos:

$$\int \frac{dt}{\cos^2 t} = \operatorname{tg} t + C = \frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}} + C \Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C$$

Hay muchos cambios ya estudiados, de uso frecuente para casos concretos. Será el método que explicaremos en los apartados 3.3 y siguientes.

## Actividades resueltas

- $\int \sqrt{5x+3}\,dx$. Como antes, es una integral inmediata, pero vamos a repetir el procedimiento:

Hacemos el binomio igual a $t$ y diferenciamos:

$$\left| \begin{array}{l} 5x+3 = t \\ 5dx = dt \to dx = \frac{1}{5}dt \end{array} \right\rangle \Rightarrow \int \sqrt{5x+3}\,dx = \int \sqrt{t} \cdot \tfrac{1}{5}\,dt = \tfrac{1}{5}\int \sqrt{t} \cdot dt$$

Resolvemos la primitiva: $\displaystyle\frac{1}{5}\int \sqrt{t} \cdot dt = \frac{1}{5}\int t^{1/2}\,dt = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot t^{3/2} + C = \frac{2}{15}\sqrt{t^3} + C$

Y deshacemos el cambio: $\displaystyle\int \sqrt{5x+3}\,dx = \frac{2}{15}\sqrt{(5x+3)^3} + C$


Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

- $\int \frac{1}{1+\ln^2(x^2+1)} \cdot \frac{6x}{x^2+1} dx$. La derivada del logaritmo es:

$$\left[\ln\left(x^2+1\right)\right]' = \frac{2x}{x^2+1}$$

que se encuentra en la fracción que precede al diferencial de $x$. Hacemos el cambio:

$$\left| \begin{array}{l} \ln\left(x^2+1\right) = t \\ \frac{2x\,dx}{x^2+1} = dt \end{array} \right\rangle = \int \frac{1}{1+t^2} \cdot 3dt = 3 \cdot \text{arc tg } t + C = 3 \cdot \text{arc tg}\left[\ln\left(x^2+1\right)\right] + C$$

- Resuelve $\int x^2 \cdot \sqrt{x+1} \cdot dx$ haciendo el cambio de variable $x+1=t^2$

Hacemos el cambio que nos indican:

$$\int x^2 \cdot \sqrt{x+1} \cdot dx = \left| \begin{array}{c} x+1=t^2 \Rightarrow x=t^2-1 \\ dx = 2t\,dt \end{array} \right\rangle = \int \left(t^2-1\right)^2 \cdot \sqrt{t^2} \cdot 2t\,dt$$

Desarrollamos el cuadrado, simplificamos e integramos:

$$\int \left(t^2-1\right)^2 \cdot \sqrt{t^2} \cdot 2t\,dt = \int \left(t^4-2t^2+1\right) \cdot t \cdot 2t\,dt = 2\int \left(t^6-2t^4+t^2\right)dt = 2 \cdot \left(\tfrac{1}{7}t^7 - \tfrac{2}{5}t^5 + \tfrac{1}{3}t^3\right) + C$$

Y, finalmente, deshacemos el cambio:

$$\int x^2 \cdot \sqrt{x+1} \cdot dx = \left| \begin{array}{l} x+1=t^2 \\ t=\sqrt{x+1} \end{array} \right\rangle = \frac{2}{7}\left(\sqrt{x+1}\right)^7 - \frac{4}{5}\left(\sqrt{x+1}\right)^5 + \frac{2}{3}\left(\sqrt{x+1}\right)^3 + C$$

## Actividades propuestas

**7.** Calcula las siguientes primitivas utilizando el cambio indicado:

a) $\int \frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}} dx$ haciendo $x = t^{12}$.

b) $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$ haciendo $e^x = t$.

c) $\int \frac{5x^4}{\sqrt{1+2x}} dx$ haciendo $1+2x=t^2$

d) $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-1}}$ haciendo $x+\sqrt{x^2-1}=t$

e) $\int \left(2\,\text{sen}^3 x + 3\,\text{sen}^2 x - \text{sen } x + 3\right)\cos x\,dx$ haciendo $\text{sen } x = t$

f) $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$ haciendo $x = \text{sen } t$

**8.** Elige el cambio de variable que simplifica las siguientes integrales:

a) $\int \frac{2x^3+1}{\left(x^4+2x\right)^3} dx$ b) $\int \frac{e^{\text{arctg}x}}{1+x^2} dx$ c) $\int \frac{\ln(\ln x)}{x \cdot \ln x} dx$

d) $\int 2x^3\sqrt{x^4-49} \cdot dx$ e) $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x+1}+2} dx$ f) $\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}} dx$


Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

## 3.2. Integración por partes

La **integración por partes** es un método que nos permite calcular la integral del producto de dos funciones de naturaleza diferente, una **fácilmente derivable** y otra **fácilmente integrable**. Los casos más frecuentes son arcos, logaritmos, polinomios, exponenciales y trigonométricas (senos y cosenos), que nos permiten crear la regla mnemotécnica A–L–P–E–S.

Con el método de integración por partes transformaremos integrales de la forma

$$\int u(x)\cdot v'(x)dx$$

donde $v'(x)$ es la función fácil de integrar, en otra expresión más sencilla en la que aparece una nueva integral más fácil de calcular que la de partida.

Se utiliza la siguiente fórmula:

$$\int u(x)\cdot v'(x)dx = u(x)\cdot v(x)-\int v(x)\cdot u'(x)dx$$

que se suele escribir de forma abreviada como:

$$\int u\cdot dv = u\cdot v-\int v\cdot du$$

Existen muchas reglas mnemotécnicas para recordar esta fórmula, recogemos tres de ellas:

- **S**alieron **U**nidos **D**e **V**iaje **Y** **U**n **V**iajero **M**enos **S**e **V**ino **D**e **U**jo. Ujo es un hermoso pueblo asturiano
- **S**usanita **U**n **D**ía **V**io **U**n **V**aliente **S**oldado **V**estido **D**e **U**niforme.
- **S**ergio **U**n **D**ía **V**io **U**na **V**aca **S**orda **V**estida **D**e **U**niforme.

***Demostración:***

Consideramos el producto de funciones $u(x)\cdot v(x)$ y calculamos su derivada:

$$[u(x)\cdot v(x)]' = u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$$

Integramos ambos miembros de la igualdad:

$$\int [u(x)\cdot v(x)]' dx = \int [u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)]dx \Rightarrow \int [u(x)\cdot v(x)]' dx = \int u'(x)\cdot v(x)dx + \int u(x)\cdot v'(x)dx$$

De donde:

$$u(x)\cdot v(x)=\int u'(x)\cdot v(x)dx+\int u(x)\cdot v'(x)dx$$

Despejando, resulta:

$$\int u(x)\cdot v'(x)dx = u(x)\cdot v(x)-\int v(x)\cdot u'(x)dx$$

También puede obtenerse a partir de la diferencial del producto:

$$d(u\cdot v)=du\cdot v+u\cdot dv \Rightarrow u\cdot dv = d(u\cdot v)-v\cdot du$$

Integramos ambos miembros de la igualdad:

$$\int d(u\cdot v)=\int (du\cdot v+u\cdot dv)=\int v\cdot du+\int u\cdot dv$$

Y obtenemos: $\int u\cdot dv = u\cdot v-\int v\cdot du$


Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

**Observaciones:**

1. Como norma general, se elige como "$u$" a la primera función de la palabra ALPES y como $dv$ al resto del integrando, pudiendo darse el caso de tener que plantear $dv = dx$.

   **Ejemplo:**

$$\int \text{arc tg}\, x\, dx = \left| \begin{array}{l} u = \text{arc tg}\, x \rightarrow du = \dfrac{1}{1+x^2}dx \\ dv = dx \rightarrow v = \int dx = x \end{array} \right\rangle = \text{arc tg}\, x \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2}dx =$$

$$= x \cdot \text{arc tg}\, x - \int \frac{x}{1+x^2}dx = x \cdot \text{arc tg}\, x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}dx = x \cdot \text{arc tg}\, x - \frac{1}{2} \cdot \ln\left|1+x^2\right| + C$$

2. Sabremos que estamos aplicando correctamente el método si obtenemos una integral más simple que la inicial.

   **Ejemplo:**

$$\int x \cdot \text{sen}\, x \cdot dx = \left| \begin{array}{l} u = x \rightarrow du = dx \\ dv = \text{sen}\, x\, dx \rightarrow v = \int \text{sen}\, x\, dx = -\cos x \end{array} \right\rangle = x \cdot (-\cos x) - \int (-\cos x) \cdot dx =$$

$$= -x \cdot \cos x + \int \cos x\, dx = -x \cdot \cos x + \text{sen}\, x + C$$

3. El proceso de integración por partes puede aplicarse varias veces. En ese caso se debe mantener la elección inicial de $u$ y $v$. Si se invierte, volveremos a la integral de partida.

   **Ejemplo:**

$$\int x^2 \cdot e^x dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2 \rightarrow du = 2x\, dx \\ dv = e^x dx \rightarrow v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right\rangle = x^2 \cdot e^x - \int e^x \cdot 2x\, dx = x^2 \cdot e^x - 2\int x \cdot e^x dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = x \rightarrow du = dx \\ dv = e^x dx \rightarrow v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right\rangle = x^2 \cdot e^x - 2 \cdot \left[x \cdot e^x - \int e^x dx\right] = x^2 \cdot e^x - 2x \cdot e^x + 2\int e^x dx =$$

$$= x^2 \cdot e^x - 2x \cdot e^x + 2 \cdot e^x + C = \left(x^2 - 2x + 2\right) \cdot e^x + C$$

4. Si la integral inicial es el producto de una exponencial por una trigonométrica, se obtiene lo que se denominan *integrales cíclicas*. Al aplicar por segunda vez el método de integración por partes, se obtiene la integral de partida, y se debe resolver como una ecuación:

   **Ejemplo:**

$$\int e^{2x} \cdot \cos 3x \cdot dx = \left| \begin{array}{l} u = e^{2x} \rightarrow du = 2e^{2x}dx \\ dv = \cos 3x\, dx \rightarrow v = \int \cos 3x\, dx = \frac{1}{3} \cdot \text{sen}\, 3x \end{array} \right\rangle =$$

$$= e^{2x} \cdot \tfrac{1}{3}\text{sen}\, 3x - \int \tfrac{1}{3}\text{sen}\, 3x \cdot 2e^{2x}dx = \tfrac{1}{3} \cdot e^{2x}\text{sen}\, 3x - \tfrac{2}{3} \cdot \int e^{2x}\text{sen}\, 3x \cdot dx =$$

Repetimos: $\left| \begin{array}{l} u = e^{2x} \rightarrow du = 2e^{2x}dx \\ dv = \text{sen}\, 3x\, dx \rightarrow v = \int \text{sen}\, 3x\, dx = -\frac{1}{3} \cdot \cos 3x \end{array} \right\rangle =$

$$\int e^{2x} \cdot \cos 3x \cdot dx = \tfrac{1}{3} \cdot e^{2x}\text{sen}\, 3x - \tfrac{2}{3} \cdot \left[e^{2x} \cdot \left(-\tfrac{1}{3}\cos 3x\right) - \int \left(-\tfrac{1}{3}\cos 3x\right) \cdot 2e^{2x} \cdot dx\right] \Rightarrow$$

$$\int e^{2x}\cdot\cos 3x\cdot dx=\tfrac{1}{3}\cdot e^{2x}\operatorname{sen} 3x+\tfrac{2}{9}\cdot e^{2x}\cos 3x-\tfrac{4}{9}\int e^{2x}\cos 3x\cdot dx$$

Observamos que obtenemos la integral de partida. Si denotamos $I=\int e^{2x}\cdot\cos 3x\cdot dx$ :

$$I=\tfrac{1}{3}\cdot e^{2x}\operatorname{sen}3x+\tfrac{2}{9}\cdot e^{2x}\cos 3x-\tfrac{4}{9}I\Rightarrow I+\tfrac{4}{9}I=\tfrac{1}{3}\cdot e^{2x}\operatorname{sen}3x+\tfrac{2}{9}\cdot e^{2x}\cos 3x$$
$$\tfrac{13}{9}I=\tfrac{1}{3}\cdot e^{2x}\operatorname{sen}3x+\tfrac{2}{9}\cdot e^{2x}\cos 3x\Rightarrow I=\tfrac{9}{13}\cdot\left(\tfrac{1}{3}\cdot e^{2x}\operatorname{sen}3x+\tfrac{2}{9}\cdot e^{2x}\cos 3x\right)$$

Entonces, sustituyendo $I$ por su expresión y desarrollando las fracciones:

$$\int e^{2x}\cdot\cos 3x\cdot dx=\frac{e^{2x}}{13}\cdot(3\cdot\operatorname{sen}3x+2\cdot\cos 3x)+C$$

5. El método de integración por partes no es excluyente. Podemos utilizarlo después de vernos *obligados* a realizar un cambio de variable, o tener que realizar un cambio de variable después de haber aplicado la integración por partes.

***Ejemplo:***

$$\int\frac{x\cdot e^{\operatorname{arcsen}x}}{\sqrt{1-x^2}}\cdot dx=\left|\begin{array}{l}\operatorname{arcsen}x=t\to x=\operatorname{sen}t\\ \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=dt\end{array}\right\rangle\Rightarrow\int x\cdot e^{\operatorname{arcsen}x}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int\operatorname{sen}t\cdot e^t dt$$

Que se resuelve como en el ejemplo anterior, y proporciona:

$$\int\operatorname{sen}t\cdot e^t dt=\tfrac{1}{2}e^t\cdot(\operatorname{sen}t-\cos t)+C$$

Antes de deshacer el cambio, expresamos el coseno como:

$$\int\operatorname{sen}t\cdot e^t dt=\tfrac{1}{2}e^t\cdot\left(\operatorname{sen}t-\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}\right)+C$$

Entonces:

$$\int\frac{x\cdot e^{\operatorname{arc\,sen}x}}{\sqrt{1-x^2}}\cdot dx=\tfrac{1}{2}e^{\operatorname{arc\,sen}x}\left(x-\sqrt{1-x^2}\right)+C$$

6. Existen otras integrales que se resuelven por partes y que no están recogidas en "la regla de los ALPES". La estrategia general es buscar una función "fácilmente integrable" y otra "fácilmente derivable" para simplificar la primitiva inicial.

***Ejemplo:***

$$\int\frac{x^2dx}{(1+x^2)^2}=\left|\begin{array}{l}u=x\to du=dx\\ \dfrac{x\,dx}{(1+x^2)^2}=dv\to v=\dfrac{-1}{2\cdot(1+x^2)}\end{array}\right\rangle\Rightarrow\int\frac{x^2dx}{(1+x^2)^2}=\frac{-x}{2\cdot(1+x^2)}-\int\frac{-dx}{2\cdot(1+x^2)}$$

Y la segunda integral es inmediata:

$$\int\frac{dx}{2\cdot(1+x^2)}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+x^2}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C$$

Por tanto:

$$\int\frac{x^2dx}{(1+x^2)^2}=\frac{-x}{2\cdot(1+x^2)}+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}x+C$$

## Actividad resuelta

- $\int x^3\sqrt{x^2-1}\,dx$.

Esta primitiva puede resolverse de varias formas diferentes:

**1. Por partes**:

La dificultad es encontrar la función *fácilmente integrable*. En este caso, la elección es:

$$\left| \begin{array}{l} dv = x\sqrt{x^2-1}\,dx \to v = \frac{1}{3}\left(x^2-1\right)^{3/2} \\ u = x^2 \to du = 2x\,dx \end{array} \right\rangle \Rightarrow \int x^3\sqrt{x^2-1}\,dx = \frac{1}{3}x^2\left(x^2-1\right)^{3/2} - \frac{2}{3}\int x\left(x^2-1\right)^{3/2}dx$$

La segunda primitiva es más simple que la primera, así que estamos en el buen camino:

$$\int x^3\sqrt{x^2-1}\,dx = \frac{1}{3}x^2\left(x^2-1\right)^{3/2} - \frac{2}{3}\int x\left(x^2-1\right)^{3/2}dx = \frac{1}{3}x^2\left(x^2-1\right)^{3/2} - \frac{2}{3}\frac{1}{5}\left(x^2-1\right)^{5/2} + C$$

Es decir: $\int x^3\sqrt{x^2-1}\,dx = \frac{1}{3}x^2\left(\sqrt{x^2-1}\right)^3 - \frac{2}{15}\left(\sqrt{x^2-1}\right)^5 + C$

**2. Por cambio de variable**:

El cambio de variable que buscamos es el que permite eliminar la raíz del integrando:

$$\left| \begin{array}{l} x^2-1 = t^2 \to x^2 = t^2+1 \\ 2x\,dx = 2t\,dt \to x\,dx = t\,dt \end{array} \right\rangle \Rightarrow \int x^3\sqrt{x^2-1}\,dx = \int x^2\sqrt{x^2-1}\,xdx = \int\left(t^2+1\right)\cdot t\cdot tdt = \int\left(t^4+t^2\right)dt$$

Resolvemos la primitiva: $\int\left(t^4+t^2\right)dt = \frac{1}{5}t^5 + \frac{1}{3}t^3 + C = \frac{1}{5}\left(\sqrt{x^2-1}\right)^5 + \frac{1}{3}\left(\sqrt{x^2-1}\right)^3 + C$

Las dos expresiones son diferentes, pero es sencillo manipularlas para hacerlas iguales.

## Actividades propuestas

**9.** Determina si las siguientes integrales son inmediatas o no:

a) $\int\left(4x^3+3x^3-\frac{1}{x^2}+\sqrt{x}\right)dx$ b) $\int\frac{\ln x}{x}dx$ c) $\int \operatorname{sen} x\cos x\,dx$

d) $\int\frac{e^{\operatorname{arcsen} x}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$ e) $\int\frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx$ f) $\int\frac{\ln(x+1)}{x}dx$ g) $\int \operatorname{tg} x\cos x\,dx$

h) $\int\frac{\left(x^2-1\right)dx}{\sqrt{1-x^2}}$ i) $\int e^{x^2}dx$ j) $\int x^2\cdot e^{x^2}dx$ k) $\int\frac{x^4-2x^2+1}{x^2-1}dx$

**10.** Resuelve las siguientes integrales:

a) $\int\left(e^{3x}+e^{2x}+e^x\right)e^x\,dx$ b) $\int(\ln x+2)\frac{dx}{x}$ c) $\int\ln(\cos x)\operatorname{tg} x\,dx$

d) $\int\frac{x\,dx}{1+x^4}$ i) $\int\frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$ j) $\int x\cdot\cos e^{x^2}\cdot e^{x^2}dx$

**11.** Resuelve las siguientes integrales:

a) $\int\left(x^2+x+1\right)e^x\,dx$ b) $\int\ln x\,dx$ c) $\int x\cos x dx$

d) $\int\operatorname{arc\,sen} x\,dx$ e) $\int\operatorname{sen} ax\cdot e^{bx}dx$ con $a, b \in\mathbb{R}$.

***f) Curiosidad – idea feliz:*** Resuelve la primitiva $\int\cos(\ln x)\,dx$.

Para ello, multiplica y divide el integrando por $x$: $\int\frac{\cos(\ln x)}{x}\cdot x\,dx = \left| \begin{array}{l} u = x \to du = \ldots \\ dv = \frac{\cos(\ln x)}{x}dx \to v = \ldots \end{array} \right\rangle$


Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

## 3.3. Integración de funciones racionales

Abordamos ahora las integrales de la forma $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios, con $Q(x)$ un polinomio mónico o normalizado (el coeficiente principal vale uno: $Q(x)=x^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\ldots$).

El primer paso es descartar que sea inmediata. Una vez descartado que es inmediata, el procedimiento para integrarlas se basa en determinar las raíces del denominador y descomponerla como suma de fracciones algebraicas cuyas integrales resulten más sencillas de calcular.

Se nos pueden plantear las siguientes situaciones:

$$\begin{cases} \text{Grado } P(x) < \text{Grado } Q(x) \begin{cases} Q(x) \text{ sólo tiene raíces reales simples} \\ Q(x) \text{ tiene una raíz real múltiple} \\ Q(x) \text{ tiene raíces reales simples y múltiples} \\ Q(x) \text{ tiene raíces complejas} \end{cases} \\ \text{Grado } P(x) \geq \text{Grado } Q(x) \end{cases}$$

## Si el grado del numerador es menor que el grado del denominador

Sea $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ con $\text{grado } P(x) < \text{grado } Q(x)$.

### 3.3.1. El denominador solo tiene raíces reales simples

Sean $a$, $b$,… $n$ las raíces de $Q(x)$, polinomio mónico como ya se dijo. Entonces, podemos factorizarlo en la forma $Q(x)=(x-a)\cdot(x-b)\cdot\ldots\cdot(x-n)$. El procedimiento consiste en descomponer el cociente como:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\ldots+\frac{N}{x-n}$$

con $A, B, \ldots, N \in \mathbb{R}$. Así, expresamos la integral de partida como suma de integrales inmediatas:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx=\int \frac{A}{x-a}dx+\int \frac{B}{x-b}dx+\ldots+\int \frac{N}{x-n}dx=A\cdot\ln|x-a|+B\cdot\ln|x-b|+\ldots+N\cdot\ln|x-n|+C$$

***Ejemplo:***

- $\int \frac{5}{x^2+3x-4}dx=$

  Calculamos las raíces del denominador y factorizamos el denominador:

  $$x^2+3x-4=0 \Rightarrow x=\cdots=\begin{cases}+1\\-4\end{cases} \Rightarrow x^2+3x-4=(x+4)\cdot(x-1)$$

  Por tanto, expresamos la fracción como suma de fracciones simples:

  $$\frac{5}{x^2+3x-4}=\frac{5}{(x-1)\cdot(x+4)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+4}$$

  Calculamos los coeficientes:

  $$\frac{5}{(x-1)\cdot(x+4)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+4} \Rightarrow 5=A\cdot(x+4)+B\cdot(x-1)$$


Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

Y calculamos $A$ y $B$ dando a $x$ los valores de las raíces encontradas:

- Si $x=-4 \Rightarrow 5=0\cdot A-5\cdot B \Rightarrow B=-1$
- Si $x=1 \Rightarrow 5=5\cdot A+0\cdot B \Rightarrow A=1$

De aquí ya obtenemos las dos integrales logarítmicas:

$$\int \frac{5}{x^2+3x-4}dx=\int \frac{5}{(x-1)\cdot(x+4)}dx=\int \frac{A}{x-1}dx+\int \frac{B}{x+4}dx=\int \frac{1}{x-1}dx+\int \frac{-1}{x+4}dx=$$

$$=\int \frac{1}{x-1}dx-\int \frac{1}{x+4}dx=\ln|x-1|-\ln|x+4|+C=\ln\left|\frac{x-1}{x+4}\right|+C$$

## 3.3.2. El denominador tiene una única raíz real múltiple

Si $a$ es la raíz múltiple de $Q(x)$, se puede escribir $Q(x)=(x-a)^n$. En este caso, la descomposición es:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{N}{(x-a)^n} \quad \text{con } A, B, \ldots, N \in \mathbb{R}.$$

Así, expresamos la integral de partida como suma de integrales inmediatas de la forma:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx=\int \frac{A}{x-a}dx+\int \frac{B}{(x-a)^2}dx+\ldots+\int \frac{N}{(x-a)^n}dx$$

Que son potencias de exponente negativo, es decir:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx=\int \frac{A}{x-a}dx+\int \frac{B}{(x-a)^2}dx+\ldots+\int \frac{N}{(x-a)^n}dx=A\cdot\ln|x-a|-\frac{B}{x-a}+\ldots-\frac{1}{n-1}\cdot\frac{N}{(x-a)^{n-1}}+C$$

***Ejemplo:***

- $$\int \frac{x+2}{x^3-6x^2+12x-8}dx=$$

Factorizamos el denominador usando el método de *Ruffini* o el teorema del resto:

$$x^3-6x^2+12x-8=(x-2)^3$$

Por tanto, expresamos:

$$\frac{x+2}{x^3-6x^2+12x-8}=\frac{x+2}{(x-2)^3}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{C}{(x-2)^3} \Rightarrow x+2=A\cdot(x-2)^2+B\cdot(x-2)+C$$

Ahora calculamos $A$, $B$ y $C$ dando valores a $x$:

- Si $x=2 \Rightarrow 4=0\cdot A+0\cdot B+C \Rightarrow C=4$

Para hallar $A$ y $B$ podemos dar cualesquiera otros dos valores:

- Si $x=3 \Rightarrow 5=A+B+C \Rightarrow 5=A+B+4 \Rightarrow A+B=+1$
- Si $x=1 \Rightarrow 3=A-B+C \Rightarrow 3=A-B+4 \Rightarrow A-B=-1$

Resolvemos el sistema: $\left.\begin{matrix} A+B=+1 \\ A-B=-1 \end{matrix}\right\} \underset{Sumando}{\Rightarrow} \left.\begin{matrix} A+B=+1 \\ 2A=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} A=0 \\ B=1 \end{matrix}\right\}$

Entonces, tenemos:

$$\int \frac{x+2}{(x-2)^3}dx=\int \frac{1}{(x-2)^2}dx+\int \frac{4}{(x-2)^3}dx=\int (x-2)^{-2}dx+4\int (x-2)^{-3}dx=$$

$$=\frac{(x-2)^{-1}}{-1}+4\cdot\frac{(x-2)^{-2}}{-2}+C=-\frac{1}{x-2}-\frac{2}{(x-2)^2}+C$$

***¡Ojo!*** No confundir la $C$ del sistema con la constante de integración.


Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

### 3.3.3. El denominador tiene raíces reales simples y múltiples

Este caso es una combinación de los dos anteriores. La fracción se descompone en sumandos cuyo numerador es una constante, y los denominadores son los factores de $Q(x)$ en el caso de las raíces simples y las potencias sucesivas de la factorización en el caso de las raíces múltiples. Es decir, si

$$Q(x)=(x-a)\cdot(x-b)\cdot\ldots\cdot(x-c)^n\cdot(x-d)^m$$

La descomposición es:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\ldots+\frac{C}{(x-c)^n}+\frac{D}{(x-c)^{n-1}}+\ldots+\frac{E}{x-c}+\frac{F}{(x-d)^m}+\frac{G}{(x-d)^{m-1}}+\ldots+\frac{H}{x-d}$$

con $A, B, \ldots, H \in \mathbb{R}$ los parámetros a obtener. La integral quedará descompuesta en una suma de logaritmos y fracciones algebraicas simples:

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\int\left(\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\ldots+\frac{C}{(x-c)^n}+\frac{D}{(x-c)^{n-1}}+\ldots+\frac{E}{x-c}+\frac{F}{(x-d)^m}+\frac{G}{(x-d)^{m-1}}+\ldots+\frac{H}{x-d}\right)dx$$

$$=A\cdot\ln|x-a|+B\cdot\ln|x-b|+\ldots-\frac{1}{n-1}\cdot\frac{C}{(x-c)^{n-1}}-\ldots+E\cdot\ln|x-c|-\frac{1}{m-1}\cdot\frac{F}{(x-d)^{m-1}}-\ldots+H\cdot\ln|x-d|+K$$

Donde $K$ representa la constante de integración, para no confundirla con la $C$ de la factorización.

***Ejemplo:***

- $$\int\frac{x^2+3}{x^3-3x+2}dx=$$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 0 | -3 | 2 |
| 1 | | 1 | 1 | -2 |
| | 1 | 1 | -2 | 0 |
| 1 | | 1 | 2 | |
| | 1 | 2 | 0 | |
| -2 | | -2 | | |
| | 1 | 0 | | |

Calculamos las raíces del denominador usando el método de *Ruffini* o el teorema del resto y factorizamos el denominador:

$$x^3-3x+2=(x-1)^2\cdot(x+2)$$

Por tanto, expresamos:

$$\frac{x^2+3}{x^3-3x+2}=\frac{x^2+3}{(x-1)^2\cdot(x+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+2}$$

$$\Rightarrow x^2+3=A(x-1)(x+2)+B(x+2)+C(x-1)^2$$

Ahora calculamos $A$, $B$ y $C$ dando valores a $x$:

- Si $x=1\Rightarrow 4=0\cdot A+3\cdot B+0\cdot C\Rightarrow B=\frac{4}{3}$
- Si $x=-2\Rightarrow 7=0\cdot A+0\cdot B+9\cdot C\Rightarrow C=\frac{7}{9}$

Para hallar $A$ damos un valor cualquiera:

- Si $x=0\Rightarrow 3=(-2)\cdot A+2\cdot B+C\Rightarrow 3=-2\cdot A+2\cdot\frac{4}{3}+\frac{7}{9}\Rightarrow A=\frac{2}{9}$

Por tanto, tenemos:

$$\int\frac{x^2+3}{(x-1)^2\cdot(x+2)}dx=\int\frac{A}{x-1}dx+\int\frac{B}{(x-1)^2}dx+\int\frac{C}{x+2}dx=\frac{2}{9}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{4}{3}\int\frac{dx}{(x-1)^2}+\frac{7}{9}\int\frac{dx}{x+2}=$$

$$\frac{2}{9}\int\frac{1}{x-1}dx+\frac{4}{3}\int(x-1)^{-2}dx+\frac{7}{9}\int\frac{1}{x+2}dx==\frac{2}{9}\ln|x-1|-\frac{4}{3(x-1)}+\frac{7}{9}\ln|x+2|+C$$


Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

### 3.3.4. El denominador tiene alguna raíz compleja simple

Si el denominador $Q(x)$ contiene algún factor irreducible de la forma $ax^2+bx+c$, al descomponer la fracción en suma de fracciones algebraicas, a dichos factores les corresponderán sumandos de la forma:

$$\frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}$$

Antes de analizar la descomposición completa, vamos a resolver este tipo de primitivas:

Las integrales de la forma $\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}dx$, cuando el denominador no tiene raíces reales, se transformarán en una integral **logarítmica** y otra de **arco tangente**.

Para ello, se puede proceder de dos formas distintas:

**Forma 1.** Manipulación algebraica de la fracción.

El mecanismo consta de dos pasos: primero se transforma el numerador en la derivada del denominador y, a continuación, se convierte la expresión de segundo grado para llegar al arco tangente.

***Ejemplo:***

- $\int \frac{x+1}{x^2+4x+13}dx$. Es automático comprobar que el denominador no tiene raíces reales.

**En primer lugar**, intentamos que el numerador sea la derivada del denominador.

$$\left(x^2+4x+13\right)' = 2x+4$$

Multiplicamos la $x$ del numerador por el factor necesario, en este caso por 2:

$$\int \frac{x+1}{x^2+4x+13}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2(x+1)}{x^2+4x+13}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+4x+13}dx =$$

A continuación, sumamos y restamos para obtener el 4:

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+4x+13}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2+2-2}{x^2+4x+13}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+4-2}{x^2+4x+13}dx =$$

Y separamos la integral como suma de dos, una con el término buscado y "el resto":

$$\int \frac{x+1}{x^2+4x+13}dx = \frac{1}{2}\left[\int \frac{2x+4}{x^2+4x+13}dx - \int \frac{2}{x^2+4x+13}dx\right] = \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+13}dx - \int \frac{dx}{x^2+4x+13}$$

**En segundo lugar**, trabajamos con la segunda integral:

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+13}$$

Se trata de identificar un cuadrado perfecto en el denominador. Vemos los términos $x^2+4x$, que nos recuerda al cuadrado perfecto: $(x+2)^2 = x^2+4x+4$, por tanto:

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+13} = \int \frac{dx}{x^2+4x+4+9} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+9} =$$

Ya que buscamos una integral de la forma $\int \frac{u'}{u^2+1}du$, extraemos factor común al 9:

$$\int \frac{dx}{(x+2)^2+9} = \int \frac{dx}{9\left[\frac{(x+2)^2}{9}+1\right]} = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{\left(\frac{x+2}{3}\right)^2+1}$$


Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

Ya casi hemos terminado, hemos conseguido la forma de la derivada del arco tangente. Solo nos queda conseguir la derivada de la fracción obtenida:

$$\frac{1}{9}\int\frac{dx}{\left(\frac{x+2}{3}\right)^2+1}=\frac{1}{9}\cdot 3\int\frac{\frac{1}{3}dx}{\left(\frac{x+2}{3}\right)^2+1}=\frac{1}{3}\int\frac{\frac{1}{3}dx}{\left(\frac{x+2}{3}\right)^2+1}$$

Entonces:

$$\int\frac{x+1}{x^2+4x+13}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+4}{x^2+4x+13}dx-\frac{1}{3}\int\frac{\frac{1}{3}dx}{\left(\frac{x+2}{3}\right)^2+1}$$

Que son dos integrales inmediatas:

$$\int\frac{x+1}{x^2+4x+13}dx=\frac{1}{2}\cdot\ln\left(x^2+4x+13\right)-\frac{1}{3}\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{x+2}{3}\right)+C$$

**Forma 2.** Cambio de variable.

Ahora nos basta con hacer un cambio de variable basado en la solución compleja que se obtiene al intentar resolver la ecuación de segundo grado del denominador.

$$ax^2+bx+c=0\Rightarrow x=\alpha\pm\beta i\longrightarrow x=\alpha+\beta\cdot t\Rightarrow dx=\beta\cdot dt$$

***Ejemplo:***

- $\displaystyle\int\frac{x+1}{x^2+4x+13}dx$.

Anulamos el denominador:

$$x^2+4x+13=0\Rightarrow x=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot1\cdot13}}{2\cdot1}=\frac{-4\pm\sqrt{-36}}{2}=\frac{-4\pm6i}{2}\Rightarrow x=-2\pm3i$$

El cambio de variable es, por tanto:

$$x=-2+3t\Rightarrow dx=3\,dt$$

Entonces:

$$\int\frac{x+1}{x^2+4x+13}dx=\int\frac{(-2+3t)+1}{(-2+3t)^2+4\cdot(-2+3t)+13}\cdot 3dt$$

Desarrollamos las expresiones y obtenemos:

$$\int\frac{x+1}{x^2+4x+13}dx=3\cdot\int\frac{3t-1}{9t^2+9}dt=\frac{3}{9}\int\frac{3t-1}{t^2+1}dt=\frac{1}{3}\cdot\left[\int\frac{3t\,dt}{t^2+1}-\int\frac{dt}{t^2+1}\right]=$$

Que son, directamente, las integrales de un logaritmo y un arco tangente:

$$\frac{1}{3}\cdot\left[\int\frac{3t\,dt}{t^2+1}-\int\frac{dt}{t^2+1}\right]=\frac{1}{3}\cdot\left[\frac{3}{2}\ln\left(t^2+1\right)-\operatorname{arctg}t\right]+C=\frac{1}{2}\ln\left(t^2+1\right)-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}t+C$$

Deshacemos el cambio:

$$\int\frac{x+1}{x^2+4x+13}dx=\frac{1}{2}\ln\left[\left(\frac{x+2}{3}\right)^2+1\right]-\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+2}{3}+C$$

Desarrollando el argumento del logaritmo obtenemos la integral del mecanismo anterior:

$$\int\frac{x+1}{x^2+4x+13}dx=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+4x+13\right)-\frac{1}{2}\ln 9-\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+2}{3}+C$$


Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

Una vez que sabemos cómo resolver esta primitiva, abordamos el caso general. Si el denominador $Q(x)$ contiene algún factor irreducible de la forma $ax^2+bx+c$, al descomponer la fracción en suma de fracciones algebraicas, a dichos factores les corresponderán sumandos de la forma:

$$\frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}$$

y los factores correspondientes a las raíces reales se descompondrán como en los apartados anteriores:

$$\text{Si } Q(x)=\left(ax^2+bx+c\right)\cdot(x-d)\cdot\ldots\cdot(x-e)^n\cdot\ldots$$

La descomposición es:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}+\frac{A}{x-d}+\ldots+\frac{B}{(x-e)^n}+\frac{C}{(x-e)^{n-1}}+\ldots+\frac{D}{x-e} \text{ con } A, B, \ldots, M, N \in \mathbb{R}.$$

***Ejemplo:***

- $\int\frac{x-5}{x^3-3x^2+x-3}dx=$

Calculamos las raíces del denominador usando el método de Ruffini o el teorema del resto y factorizamos el denominador:

| | 1 | -3 | 1 | -3 |
|---|---|---|---|---|
| 3 | | 3 | 0 | 3 |
| | 1 | 0 | 1 | 0 |

$$x^3-3x^2+x-3=0 \Rightarrow \text{Tenemos: } x^3-3x^2+x-3=(x-3)\cdot\left(x^2+1\right)$$

Por tanto, expresamos:

$$\frac{x-5}{x^3-3x^2+x-3}=\frac{x-5}{(x-3)\cdot\left(x^2+1\right)}=\frac{A}{x-3}+\frac{Mx+N}{x^2+1}\Rightarrow x-5=A\left(x^2+1\right)+(Mx+N)\cdot(x-3)$$

Ahora calculamos $A$, $M$ y $N$ dando valores a $x$; tenemos:

- Si $x=3\Rightarrow 3-5=10\cdot A+0\cdot(B)+C\Rightarrow A=-\frac{2}{10}=-\frac{1}{5}$
- Si $x=0\Rightarrow 0-5=1\cdot A+(0\cdot M+N)\cdot(-3)\Rightarrow -5=A-3N\Rightarrow N=\frac{8}{5}$
- Si $x=2\Rightarrow 2-5=5\cdot A+(2\cdot M+N)\cdot(-1)\Rightarrow -3=5A-2M-N\Rightarrow M=\frac{1}{5}$

Tenemos, por tanto:

$$\int\frac{x-5}{(x-3)\cdot\left(x^2+1\right)}dx=\int\frac{A}{x-3}dx+\int\frac{Mx+N}{x^2+1}dx=\int\frac{-\frac{1}{5}dx}{x-3}+\int\frac{\frac{1}{5}x+\frac{8}{5}}{x^2+1}dx=$$

$$=-\frac{1}{5}\int\frac{1}{x-3}dx+\frac{1}{5}\int\frac{x}{x^2+1}dx+\frac{8}{5}\int\frac{1}{x^2+1}dx=-\frac{1}{5}\int\frac{1}{x-3}dx+\frac{1}{10}\int\frac{2x}{x^2+1}dx+\frac{8}{5}\int\frac{1}{x^2+1}dx=$$

$$=-\frac{1}{5}\ln|x-3|+\frac{1}{10}\ln\left|x^2+1\right|+\frac{8}{5}\operatorname{arc\,tg} x+C$$

Si hubiera más de un polinomio de grado dos con raíces complejas, la descomposición implica una fracción para cada término:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{Hx+K}{ax^2+bx+c}+\frac{Mx+N}{a'x^2+b'x+c'}+\ldots \text{ con } H, K, M, N, \ldots \in \mathbb{R}.$$


Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

### 3.3.5. El grado del numerador es mayor o igual que el grado del denominador

Sea $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ con $\text{grado } P(x) \geq \text{grado } Q(x)$.

En este caso, en primer lugar dividiremos el numerador entre el denominador. De esta forma, la fracción se descompone en la suma de un polinomio y una fracción algebraica con el grado del numerador menor que el grado del denominador:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int C(x) dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)} dx$$

***Ejemplo:***

$$\int \frac{x^2 - x + 5}{x+3} dx =$$

Dividiendo el numerador entre el denominador, tenemos:

$$\begin{array}{rrr|l} x^2 & -x & +5 & x+3 \\ \cline{4-4} -x^2 & -3x & & x-4 \\ \hline & -4x & +5 & \\ & 4x & +12 & \\ \hline & & 17 & \end{array}$$

$$\frac{x^2 - x + 5}{x+3} = x - 4 + \frac{17}{x+3}$$

Así:

$$\int \frac{x^2 - x + 5}{x+3} dx = \int (x-4) dx + \int \frac{17}{x+3} dx = \int (x-4) dx + 17 \int \frac{1}{x+3} dx = \frac{x^2}{2} - 4x + 17 \ln|x+3| + C$$

## El denominador $Q(x)$ no es un polinomio mónico

Si en la integral racional $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ el polinomio del denominador no es mónico (su coeficiente principal no es 1), la factorización se realiza del modo habitual en el que se factorizan los polinomios.

***Ejemplo:***

$$Q(x) = 2x^2 + x - 3 \mapsto Q(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow Q(x) = (x-1) \cdot \left(x + \tfrac{3}{2}\right) \cdot 2 = (x-1) \cdot (2x+3)$$

Para el cálculo de integrales se utiliza la factorización obtenida y se procede de la forma ya explicada:

***Ejemplo:***

$$\int \frac{dx}{2x^2 + x - 3}.$$

La descomposición resulta ser:

$$\frac{1}{2x^2 + x - 3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{2x+3} \Rightarrow 1 = A \cdot (x-1) + B \cdot (2x+3)$$

Resolvemos la ecuación como hicimos varias veces antes, y obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} A = \frac{1}{5} \\ B = \frac{-2}{5} \end{array}\right\} \Rightarrow \int \frac{dx}{2x^2 + x - 3} = \frac{1}{5} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{2}{5} \int \frac{dx}{2x+3} = \frac{1}{5} \ln|x-1| - \frac{1}{5} \ln|2x+3| + C$$


Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

## Actividades propuestas

**12.** Halla las siguientes primitivas:

a) $\int \frac{dx}{x^2-4}$ b) $\int \frac{dx}{(x+1)^2}$ c) $\int \frac{x\,dx}{(x+1)^2}$ d) $\int \frac{x^3 dx}{(x+1)^2}$

e) $\int \frac{x^2+x+1}{x^3-4x^2+4x}dx$ f) $\int \frac{3x^2+1}{(2x-1)\cdot(3x^2+2)}dx$ g) $\int \frac{x^2-2}{x^3(x^2+1)}dx$

h) $\int \frac{x^3+2x^2+5x+3}{x^2+1}dx$ i) $\int \frac{(x+1)\cdot dx}{(x-1)(x+1)^2(x^2+1)}$ j) $\int \frac{dx}{x^4-1}$

## 3.4. Integración de funciones trigonométricas.

Para integrar una función trigonométrica no inmediata, tenemos que clasificarla en una de las categorías que veremos a continuación. Es importante seguir el orden planteado; si no lo hacemos, obtendremos integrales mucho más complicadas de lo necesario.

## Cuadrados de funciones trigonométricas

Si la función es el cuadrado de una función trigonométrica, podemos ahorrar mucho trabajo si las estudiamos antes que las demás:

1. **Cuadrados de seno y coseno**: Para resolver estas primitivas nos basamos en las expresiones:

$$\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x=1 \quad \text{y} \quad \cos 2x=\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x$$

Sumando y restando miembro a miembro:

$$1+\cos 2x=2\cos^2 x \quad \text{y} \quad 1-\cos 2x=2\operatorname{sen}^2 x$$

Obtenemos las siguientes simplificaciones:

$$\int \cos^2 x\,dx = \tfrac{1}{2}\int (1+\cos 2x)dx = \tfrac{1}{2}\left(x+\tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right)+C \quad \text{y}$$

$$\int \operatorname{sen}^2 x\,dx = \tfrac{1}{2}\int (1-\cos 2x)dx = \tfrac{1}{2}\left(x-\tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right)+C$$

2. **Cuadrados de secante y cosecante**: Ya sabemos que son integrales inmediatas:

$$\int \sec^2 x\,dx = \operatorname{tg} x + C \quad \text{y} \quad \int \operatorname{cosec}^2 x\,dx = -\operatorname{cotg} x + C$$

3. **Cuadrados de tangente y cotangente**: Se convierten en integrales inmediatas fácilmente:

$$\int \operatorname{tg}^2 x\,dx = \int (\sec^2 x-1)dx = \operatorname{tg} x - x + C \quad \text{y} \quad \int \operatorname{cotg}^2 x\,dx = \int (\operatorname{cosec}^2 x-1)dx = -\operatorname{cotg} x - x + C$$

## Actividad resuelta

- $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x\cdot\cos^2 x}$

Esta primitiva puede resolverse de varias formas diferentes. En este apartado usaremos las transformaciones *recién aprendidas*:

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x\cdot\cos^2 x} = \int \frac{4\,dx}{4\operatorname{sen}^2 x\cdot\cos^2 x} = \int \frac{4\,dx}{(2\operatorname{sen} x\cdot\cos x)^2} = \int \frac{4\,dx}{\operatorname{sen}^2 2x} = -2\operatorname{cotg} 2x + C$$

### 3.4.1. Funciones impares en seno de $x$

Si la integral es de la forma $\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)$, (es decir, una función racional en *senx* y *cosx*) y verifica que $R(-\operatorname{sen} x, \cos x) = -R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ debemos aplicar el cambio $\cos x = t$.

Tras transformar las funciones trigonométricas con el cambio, obtendremos una función racional que resolveremos con los métodos anteriores.

***Ejemplo:***

- $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{1+\cos^2 x}\,dx =$

El exponente del seno es impar, por tanto es impar en seno:

$$R(\operatorname{sen} x, \cos x) = \frac{\operatorname{sen}^3 x}{1+\cos^2 x}$$

Por tanto:

$$R(-\operatorname{sen} x, \cos x) = \frac{(-\operatorname{sen} x)^3}{1+\cos^2 x} = -\frac{\operatorname{sen}^3 x}{1+\cos^2 x} = -R(\operatorname{sen} x, \cos x)$$

Aplicamos el cambio indicado, manipulando ligeramente la integral:

$$\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{1+\cos^2 x}\,dx = \left| \begin{array}{c} \cos x = t \\ -\operatorname{sen} x\,dx = dt \end{array} \right\rangle = \int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1+\cos^2 x}\operatorname{sen} x\,dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{1+\cos^2 x}\operatorname{sen} x\,dx$$

Entonces:

$$\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{1+\cos^2 x}\,dx = \int \frac{1-t^2}{1+t^2}(-dt) = \int \frac{t^2-1}{t^2+1}\,dt$$

Que podemos resolver como integral de una función racional:

$$\int \frac{t^2-1}{t^2+1}\,dt = \int \frac{t^2+1-2}{t^2+1}\,dt = \int \left(1-\frac{2}{t^2+1}\right)dt = t - 2\operatorname{arctg} t + C$$

Y deshacemos el cambio:

$$\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{1+\cos^2 x}\,dx = \cos x - 2\operatorname{arctg}(\cos x) + C$$

Cuando no es tan simple manipular el integrando, podemos utilizar las siguientes igualdades:

| | | |
|---|---|---|
| $\cos x = t$ | $x = \arccos t \Rightarrow dx = \dfrac{-dt}{\sqrt{1-t^2}}$ | $\operatorname{sen} x = \sqrt{1-\cos^2 x} = \sqrt{1-t^2}$ |

***Ejemplo:***

- $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{1+\cos^2 x}\,dx =$ Ahora vamos a utilizar las expresiones tabuladas para obtener la primitiva:

$$\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{1+\cos^2 x}\,dx = \int \frac{\left(\sqrt{1-t^2}\right)^3}{1+t^2}\cdot\frac{-dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\int \frac{\left(\sqrt{1-t^2}\right)^2}{1+t^2}\cdot dt = -\int \frac{1-t^2}{1+t^2}\cdot dt = \int \frac{t^2-1}{1+t^2}\cdot dt$$

Que es la misma integral que resolvimos antes (como no podía ser de otro modo)


Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

### 3.4.2. Funciones impares en coseno de *x*

Si la integral es de la forma $\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)$, y verifica que $R(\operatorname{sen} x, -\cos x) = -R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ debemos aplicar el cambio $\operatorname{sen} x = t$. Como antes, tenemos las siguientes igualdades:

| | | |
|---|---|---|
| $\operatorname{sen} x = t$ | $x = \operatorname{arcsen} t \Rightarrow dx = \dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ | $\cos x = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x} = \sqrt{1-t^2}$ |

***Ejemplos:***

- $\int \cos^3 x \cdot \operatorname{sen}^2 x \, dx =$

  Comprobamos que el radicando es impar en coseno:

$$R(\operatorname{sen} x, \cos x) = \cos^3 x \cdot \operatorname{sen}^2 x \Rightarrow R(\operatorname{sen} x, -\cos x) = (-\cos x)^3 \cdot \operatorname{sen}^2 x = -R(\operatorname{sen} x, \cos x)$$

  Aplicamos el cambio indicado:

$$I = \int \cos^3 x \cdot \operatorname{sen}^2 x \, dx = \left| \begin{array}{l} \operatorname{sen} x = t \\ \cos x \, dx = dt \end{array} \right\rangle = \int \cos^2 x \cdot \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos x \, dx = \int t^2 \cdot (1-t^2)(dt)$$

  Desarrollado el producto,

$$I = \int \left(-t^4 + t^2\right) dt = -\tfrac{1}{5} t^5 + \tfrac{1}{3} t^3 + C$$

  Y deshacemos el cambio:

$$I = \int \cos^3 x \cdot \operatorname{sen}^2 x \, dx = -\tfrac{1}{5} \operatorname{sen}^5 x + \tfrac{1}{3} \operatorname{sen}^3 x + C$$

- $\int \sec x \, dx = \int \dfrac{dx}{\cos x} =$

  Es evidente que el radicando es impar en coseno, aplicamos el cambio:

$$\int \frac{dx}{\cos x} dx = \left| \begin{array}{l} \operatorname{sen} x = t \Rightarrow dx = \dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \\ \cos x = \sqrt{1-t^2} \end{array} \right\rangle = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2} \cdot \sqrt{1-t^2}} = \int \frac{dt}{1-t^2}$$

  La resolvemos como integral de una función racional:

$$\frac{1}{1-t^2} = \frac{A}{1-t} + \frac{B}{1+t} \Rightarrow \dots \frac{1}{1-t^2} = \frac{\frac{1}{2}}{1-t} + \frac{\frac{1}{2}}{1+t}$$

  Entonces:

$$\int \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1-t} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+t} = -\frac{1}{2}\ln|1-t| + \frac{1}{2}\ln|1+t| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C$$

  Y deshacemos el cambio:

$$\int \sec x \, dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}\right| + C$$

***Curiosidad – idea feliz:***

A veces, existen estrategias específicas para resolver primitivas más rápidamente.

Para esta primitiva, $\int \sec x \, dx$, si multiplico y divido entre $(\sec x + \operatorname{tg} x)$:

$$\int \sec x \, dx = \int \sec x \cdot \frac{\sec x + \operatorname{tg} x}{\sec x + \operatorname{tg} x} dx = \int \frac{\sec^2 x + \sec x \operatorname{tg} x}{\sec x + \operatorname{tg} x} dx = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C$$


Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

### 3.4.3. Funciones pares en seno de *x* y coseno de *x*

Si la integral es de la forma $\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)$, y verifica que $R(-\operatorname{sen} x, -\cos x) = R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ debemos aplicar el cambio $\operatorname{tg} x = t$. En este caso, podemos hallar la expresión para el seno y el coseno como:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x + 1} \Rightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$$

y

$$\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x + 1} = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x + 1} \Rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$$

Que resumimos en la tabla siguiente:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\operatorname{tg} x = t$ | $x = \operatorname{arc\,tg} t \Rightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2}$ | $\operatorname{sen} x = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$ | $\cos x = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$ |

***Ejemplo:***

- $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^2 x}$

  Es evidente que el radicando es par en seno y coseno:

$$R(\operatorname{sen} x, \cos x) = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^2 x} \Rightarrow R(-\operatorname{sen} x, -\cos x) = R(\operatorname{sen} x, \cos x)$$

  Aplicamos el cambio indicado:

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^2 x} = \left| \begin{array}{c} \operatorname{tg} x = t \rightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2} \\ \operatorname{sen}^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \end{array} \right\rangle = \int \frac{dt}{(1+t^2) \cdot \frac{t^2}{1+t^2} \cdot \frac{1}{1+t^2}} = \int \frac{1+t^2}{t^2} dt$$

  Que es inmediata si la separamos en sumandos:

$$\int \frac{t^2+1}{t^2} dt = t - \frac{1}{t} + C \Rightarrow \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^2 x} = \operatorname{tg} x - \frac{1}{\operatorname{tg} x} + C = \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x + C$$

***Curiosidad – idea feliz:***

Como antes, podemos seguir buscando *felices ideas* que simplifiquen integrales. Usando la relación fundamental de la trigonometría, $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$:

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^2 x} = \int \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x + C$$

O bien, como vimos anteriormente, acudir a las expresiones del ángulo doble como hicimos antes:

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^2 x} = \ldots = \int \frac{4\,dx}{\operatorname{sen}^2 2x} = 2\int \operatorname{cosec}^2 2x \cdot 2\,dx = -\operatorname{cotg} 2x + C$$


Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

### 3.4.4. Cambio general

Si no pudimos resolver la integral con los cambios anteriores, deberemos aplicar el cambio universal:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$$

De aquí tenemos:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t\Rightarrow\frac{x}{2}=\operatorname{arc\,tg}t\Rightarrow x=2\cdot\operatorname{arc\,tg}t\Rightarrow dx=2\cdot\frac{1}{1+t^2}dt\Rightarrow dx=\frac{2}{1+t^2}dt$$

Aplicando ahora las propiedades de las razones trigonométricas del ángulo doble, tenemos:

$$\operatorname{sen}x=2\cdot\operatorname{sen}\tfrac{x}{2}\cdot\cos\tfrac{x}{2}=2\cdot\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\cdot\cos^2\tfrac{x}{2}=2\cdot\operatorname{tg}\tfrac{x}{2}\cdot\cos^2\tfrac{x}{2}=2\cdot\operatorname{tg}\tfrac{x}{2}\cdot\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}\Rightarrow\operatorname{sen}x=\frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x=\cos^2\tfrac{x}{2}-\operatorname{sen}^2\tfrac{x}{2}=2\cdot\cos^2\tfrac{x}{2}-1=2\cdot\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}-1\Rightarrow\cos x=\frac{2}{1+t^2}-1=\frac{2-(1+t^2)}{1+t^2}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Tenemos, por tanto:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$ | $dx=\frac{2}{1+t^2}dt$ | $\operatorname{sen}x=\frac{2t}{1+t^2}$ | $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ |

***Ejemplo:***

- $\int\frac{dx}{1-\cos x}=$ Es fácil ver que no cumple ninguna de las tres condiciones anteriores, por tanto:

$$\left|\begin{matrix}\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t\Rightarrow dx=\frac{2}{1+t^2}dt\\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\end{matrix}\right\rangle=\int\frac{1}{1-\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt=\int\frac{2}{\frac{(1+t^2)-(1-t^2)}{1+t^2}\cdot(1+t^2)}dt=$$

$$=\int\frac{2}{1+t^2-1+t^2}dt=\int\frac{2}{2t^2}dt=\int\frac{1}{t^2}dt=\int t^{-2}dt=\frac{t^{-1}}{-1}+C=-\frac{1}{t}+C=-\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}+C=-\operatorname{cotg}\frac{x}{2}+C$$

***Curiosidad – idea feliz:***

Para esta primitiva, si multiplico y divido por el conjugado del denominador, $(1+\cos x)$:

$$\int\frac{dx}{1-\cos x}=\int\frac{(1+\cos x)dx}{(1-\cos x)\cdot(1+\cos x)}=\int\frac{(1+\cos x)dx}{1-\cos^2 x}=\int\frac{(1+\cos x)dx}{\operatorname{sen}^2 x}=$$

Ahora separamos en dos sumandos, obtenemos sendas integrales inmediatas:

$$\int\frac{(1+\cos x)dx}{\operatorname{sen}^2 x}=\int\frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x}+\int\frac{\cos x\,dx}{\operatorname{sen}^2 x}=-\operatorname{cotg}x-\frac{1}{\operatorname{sen}x}+C=-\operatorname{cotg}x-\operatorname{cosec}x+C$$

En general, en las integrales de la forma:

$$\int\frac{dx}{a\operatorname{sen}x+b\cos x}$$

Haciendo $a=k\cdot\cos\alpha$ y $b=k\cdot\operatorname{sen}\alpha$, con $k$ y $\alpha$ valores a obtener, la primitiva se transforma en:

$$\int\frac{dx}{a\operatorname{sen}x+b\cos x}=\int\frac{dx}{k\operatorname{sen}x\cos\alpha+k\cos x\operatorname{sen}\alpha}=\int\frac{dx}{k\operatorname{sen}(x+\alpha)}=\frac{1}{k}\int\operatorname{cosec}(x+\alpha)dx$$

que ya vimos cómo resolver en apartados anteriores.


Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

## Actividades propuestas

**13.** Halla las siguientes primitivas:

a) $\int \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}x+1\right)dx$

b) $\int \frac{\operatorname{sen}3x\,dx}{\sqrt[3]{\cos 3x}}$

c) $\int \frac{\operatorname{cotg} x\,dx}{\operatorname{sen}^2 x}$

d) $\int \frac{\operatorname{sen}2x\,dx}{(\cos 2x+1)^2}$

e) $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx$

f) $\int \left(\operatorname{tg}^2 x + x + x + 1\right)dx$

g) $\int \frac{tg(x)}{cos^2(x)}dx$

h) $\int \frac{dx}{1-\operatorname{sen} x}$

i) $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x}$

j) $\int \operatorname{sen}^2 x \cos x\,dx$

k) $\int \operatorname{sen}^2 x\,dx$

l) $\int \operatorname{sen}^4 x\,dx$

m) $\int \cos^4 x\,dx$

n) $\int \cos(\ln x)dx$ *truco:* multiplica y divide por $x$: $\int \frac{\cos(\ln x)}{x} x\,dx$

ñ) $\int \frac{(1+\operatorname{sen}^2 x)dx}{\operatorname{sen} x \cos x}$

o) $\int \frac{dx}{1+\operatorname{sen}^2 x}$

p) $\int \operatorname{sen} 5x \cos 4x\,dx$

q) $\int \frac{dx}{13+12\cos x}$

## Actividad resuelta – *Idea feliz*

- $\int \frac{\operatorname{sen}2x\,dx}{\operatorname{sen}^4 x+\cos^4 x}$

En este ejemplo podríamos acudir a que el integrando es par en seno y coseno y aplicar el cambio $\operatorname{tg} x = t$. Entonces:

$$\int \frac{\operatorname{sen}2x\,dx}{\operatorname{sen}^4 x+\cos^4 x} = \int \frac{2\operatorname{sen} x\cos x\,dx}{\operatorname{sen}^4 x+\cos^4 x} = \int \frac{2\cdot\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\cdot\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}}{\left(\frac{t^2}{t^2+1}\right)^2+\left(\frac{1}{t^2+1}\right)^2}\frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{2t(t^2+1)}{t^4+1}dt = \ldots$$

Pero también podemos jugar un poco con el denominador, completando un cuadrado perfecto:

$$\int \frac{\operatorname{sen}2x\,dx}{\operatorname{sen}^4 x+\cos^4 x+2\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x-2\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x} = \int \frac{\operatorname{sen}2x\,dx}{(\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x)^2-2\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x}$$

$$= \int \frac{\operatorname{sen}2x\,dx}{1-2\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x} = \int \frac{\operatorname{sen}2x\,dx}{1-\frac{1}{2}4\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x} = \int \frac{\operatorname{sen}2x\,dx}{1-\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 2x} = 2\int \frac{\operatorname{sen}2x\,dx}{2-\operatorname{sen}^2 2x}$$

La última idea feliz consiste en obtener el $\cos 2x$ en el denominador:

$$2\int \frac{\cos 2x\,dx}{2-\operatorname{sen}^2 2x} = 2\int \frac{\cos 2x\,dx}{1+1-\operatorname{sen}^2 2x} = 2\int \frac{\operatorname{sen}2x\,dx}{1+\cos^2 2x}$$

Y hemos obtenido una integral inmediata:

$$\int \frac{\operatorname{sen}2x\,dx}{\operatorname{sen}^4 x+\cos^4 x} = 2\int \frac{sen 2x\,dx}{1+cos^2 2x} = -2\,arc\,tg(cos\,2x)+C$$



Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

## 3.5. Otras integrales

Los apartados anteriores dejan claro que el proceso de resolución de integrales no es tan fácil como el de derivación. Todas las simplificaciones que se pueden realizar después de derivar una función es lo que complica el cálculo de primitivas. Por tanto, en muchas ocasiones nos tendremos que limitar a *obedecer* los cambios aconsejados.

Además, existen funciones que no tienen primitiva o no puede expresarse en términos de funciones elementales. Incluso algunas de ellas sirven para definir otro tipo de funciones. Algunos ejemplos son:

$$\int e^{x^2}dx \quad , \quad \int \frac{\operatorname{sen} x}{x}dx \quad , \quad \int \cos e^x dx \quad , \quad \int \cos x^2 dx \quad \ldots$$

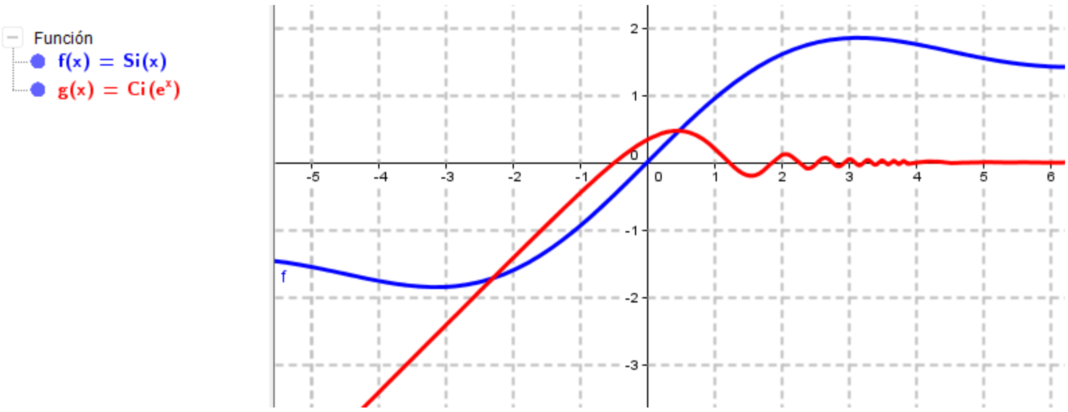
Podemos intentar *calcularlas* con GeoGebra, por ejemplo. Tecleamos en la barra de entrada:

1. `Integral[sen(x)/x]`
2. `Integral[cos(e^x)]`

Y observamos que aparecen expresiones como:

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{x}dx = \operatorname{Si}(x) \quad , \quad \int \cos e^x dx = \operatorname{Ci}(e^x)$$

Donde $\operatorname{Ci}$ y $\operatorname{Si}$ son las siglas de *Cosine Integral* y *Sine Integral*, cuyas gráficas son:




Listamos a continuación los cambios de variable y mecanismos aconsejados para otras primitivas.

## Integrales de funciones exponenciales

$$\int \mathrm{R}(a^x)dx \Rightarrow a^x = g(t) = t;\ dx = \frac{1}{\ln a}\cdot\frac{dt}{t}, \text{ con } a \neq 1.$$

## Integrales de funciones irracionales

$$\int \mathrm{R}\left(\sqrt[n]{x^m}, \sqrt[p]{x^q}, \sqrt[r]{x^s}, \ldots\right)dx \Rightarrow x = g(t) = t^{\mathrm{m.c.m.(n,p,r,\ldots)}}$$

$$\int \mathrm{R}\left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)dx \Rightarrow x = g(t) = a\cdot \operatorname{sen} t$$

$$\int \mathrm{R}\left(\sqrt{a^2 + x^2}\right)dx \Rightarrow x = g(t) = a\cdot \operatorname{tg} t$$

$$\int \mathrm{R}\left(\sqrt{x^2 - a^2}\right)dx \Rightarrow x = g(t) = a\cdot \sec t$$


Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

## Actividad resuelta

- $\int \sqrt{4-x^2}\,dx$

El cambio aconsejado es $x = 2\,\text{sen}\,t$, entonces:

$$\int \sqrt{4-x^2}\,dx = \left| \begin{matrix} x = 2\,\text{sen}\,t \\ dx = 2\cos t\,dt \end{matrix} \right\rangle = \int \sqrt{4-(2\,\text{sen}\,t)^2}\cdot 2\cos t\,dt = \int \sqrt{4-4\,\text{sen}^2 t}\cdot 2\cos t\,dt =$$

Utilizando la relación fundamental de la trigonometría:

$$\int \sqrt{4-4\,\text{sen}^2 t}\cdot 2\cos t\,dt = \int 2\sqrt{1-\text{sen}^2 t}\cdot 2\cos t\,dt = \int 2\cos t\cdot 2\cos t\,dt = 4\int \cos^2 t\,dt$$

Que ya resolvimos antes:

$$4\int \cos^2 t\,dt = 2\int (1+\cos 2t)\,dt = 2\left(t+\tfrac{1}{2}\,\text{sen}\,2t\right)+C$$

Para deshacer el cambio, jugamos de nuevo con las expresiones trigonométricas,

$$\left| \begin{matrix} x = 2\,\text{sen}\,t \\ t = \arcsen\,\frac{x}{2} \end{matrix} \right\rangle \Rightarrow t+\tfrac{1}{2}\,\text{sen}\,2t = t+\tfrac{1}{2}\cdot 2\cdot\cos t\cdot\text{sen}\,t = t+\text{sen}\,t\cdot\sqrt{1-\text{sen}^2 t}$$

y obtenemos:

$$\int \sqrt{4-x^2}\,dx = 2\cdot\left(\text{arcsen}\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\cdot\sqrt{4-x^2}\right)+C$$

## Otras integrales trigonométricas

- $\int \text{R}(\text{sen}\,mx, \cos nx)\,dx$ : Se utilizan las expresiones:

$$\text{sen}\,a\cdot\text{sen}\,b = \tfrac{1}{2}\cdot[\cos(a-b)-\cos(a+b)]$$

$$\cos a\cdot\cos b = \tfrac{1}{2}\cdot[\cos(a+b)+\cos(a-b)]$$

$$\text{sen}\,a\cdot\cos b = \tfrac{1}{2}\cdot[\text{sen}(a+b)+\text{sen}(a-b)]$$

- $\int \text{sen}^n x\,dx = \left\{ \begin{matrix} u = \text{sen}^{n-1} x \\ dv = \text{sen}\,x\,dx \end{matrix} \right\} = \ldots = -\dfrac{\text{sen}^{n-1} x\cdot\cos x}{n}+\dfrac{n-1}{n}\int \text{sen}^{n-2} x\,dx$
- $\int \cos^n x\,dx = \left\{ \begin{matrix} u = \cos^{n-1} x \\ dv = \cos x\,dx \end{matrix} \right\} = \ldots = \dfrac{\cos^{n-1} x\cdot\text{sen}\,x}{n}+\dfrac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx$
- $\int \text{tg}^n x\,dx = \int \text{tg}^{n-2} x\cdot(\sec^2 x - 1)\,dx = \dfrac{\text{tg}^{n-1} x}{n-1} - \int \text{tg}^{n-2} x\,dx$ (análogamente con la cotangente)
- $\int \sec^n x\,dx = \int \sec^{n-2} x\cdot\sec^2 x\,dx$ (análogamente con la cosecante)

Si $n$ par: $\int \sec^{n-2} x\cdot\sec^2 x\,dx = \int (1+\text{tg}^2 x)^{(n-2)/2}\cdot\sec^2 x\,dx$

Cambio de variable: $\text{tg}\,x = t \Rightarrow \int \sec^n x\,dx = \int (1+t^2)^{(n-2)/2}\,dt$

Si $n$ impar: Por partes, elegimos: $u = \sec^{n-2} x$ y $dv = \sec^2 x\,dx$

$$\Rightarrow \int \sec^n x\,dx = \frac{1}{n-1}\left[\sec^{n-2} x\cdot\text{tg}\,x+(n-2)\cdot\int \sec^{n-2} x\,dx\right]$$


Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP