SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas

$$\left.\begin{array}{l} 8x + 4y + 3z = -3 \\ 2x + 3y + z = 2 \\ x + y - 3z = -10 \end{array}\right\} \text{ Sistema} \qquad \begin{pmatrix} 8 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix} \text{ Expresión matricial}$$

$\begin{pmatrix} 8 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix}$	$\left(\begin{array}{ccc\|c} 8 & 4 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 & -10 \end{array}\right)$
Matriz de los coeficientes	Matriz de las incógnitas	Matriz de los términos independientes	Matriz ampliada

Sistemas equivalentes

Dos sistemas de ecuaciones lineales son equivalentes si tienen las mismas soluciones

Para obtener sistemas equivalentes a uno dado, se pueden efectuar las siguientes transformaciones:

SISTEMA	MATRIZ AMPLIADA
Cambiar el orden de las ecuaciones $E_i \leftrightarrow E_j$ Permutar el orden de colocación de las ecuaciones i y j.	Cambiar el orden de las filas $F_i \leftrightarrow F_j$ Permutar el orden de colocación de las filas i y j.
Multiplicar una ecuación del sistema por un número no nulo $k \cdot E_i \quad (k \neq 0)$ Multiplicar la ecuación i por un número k	Multiplicar todos los elementos de una fila por un número no nulo $k \cdot F_i \quad (k \neq 0)$ Multiplicar la fila i por un número k
Sumar a una ecuación del sistema otra multiplicada por un número distinto de cero. $E_i + k \cdot E_j \quad (k \neq 0)$ Sumar a la ecuación i la ecuación j multiplicada por un número k	Sumar a una fila otra multiplicada por un número distinto de cero. $F_i + k \cdot F_j \quad (k \neq 0)$ Sumar a la fila i la fila j multiplicada por un número k.
Multiplicar una ecuación por un número y sumarle otra ecuación multiplicada por otro número, siendo ambos números distintos de cero. $p \cdot E_i + q \cdot E_j \quad (p \neq 0 \text{ y } q \neq 0)$ Multiplicar la ecuación i por p y sumarle la ecuación j multiplicada por q.	Multiplicar una fila por un número y sumarle otra fila multiplicada por otro número, siendo ambos números distintos de cero. $p \cdot F_i + q \cdot F_j \quad (p \neq 0 \text{ y } q \neq 0)$ Multiplicar la fila i por p y sumarle la fila j multiplicada por q.
Cambiar, en todo el sistema, el orden de colocación de los términos de algunas de las incógnitas.	Cambiar el orden de las columnas $C_i \leftrightarrow C_j$ Permutar el orden de colocación de las columnas i y j. (Usar con precaución. Tenerlo en cuenta a la hora de volver a escribir las incógnitas)
Suprimir (o añadir) una ecuación que sea combinación lineal de las restantes ecuaciones.	Suprimir (o añadir) una fila que sea combinación lineal de las restantes filas.
Despejar una de las incógnitas de una de las ecuaciones y sustituirla en las demás.	

Sistema escalonado

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 3y - 4z = 0 \\ \quad\; - y + 7z = 4 \\ \qquad\quad 5z = -15 \end{array}\right\}$$

Para resolver un sistema escalonado, si es compatible, se trabaja a partir de la última ecuación del sistema. Se resuelve ésta y se sustituye el resultado obtenido en la penúltima ecuación, lo que permite encontrar el valor de la incógnita anterior. Se repite este proceso de forma sucesiva hasta llegar a la primera ecuación y obtener el valor de la primera incógnita.

$$5z = -15 \quad \Rightarrow \quad z = -3$$

$$-y + 7z = 4 \quad \Rightarrow \quad -y + 7 \cdot (-3) = 4 \quad \Rightarrow \quad -y - 21 = 4 \quad \Rightarrow \quad -y = 25 \quad \Rightarrow \quad y = -25$$

$$2x + 3y - 4z = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x + 3 \cdot (-25) - 4 \cdot (-3) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x - 75 + 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{63}{2}$$

Solución: $\boxed{x = \frac{63}{2}\,;\; y = -25\,;\; z = -3}$ o bien, $S = \left\{ \left(\frac{63}{2}, -25, -3 \right) \right\}$

Método de Gauss

El método de Gauss consiste en transformar un sistema en otro equivalente y escalonado.
Se basa en el método de reducción. Eliminar incógnitas en el sistema o hacer ceros en la matriz ampliada.

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 8x & + & 4y & + & 3z & = & -3 \\ 2x & + & 3y & + & z & = & 2 \\ x & + & y & - & 3z & = & -10 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 8 & 4 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 & -10 \end{array}\right) \begin{array}{l} F_1 \leftrightarrow F_3 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -3 & -10 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 8 & 4 & 3 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 8F_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -3 & -10 \\ 0 & 1 & 7 & 22 \\ 0 & -4 & 27 & 77 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ F_3 + 4F_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -3 & -10 \\ 0 & 1 & 7 & 22 \\ 0 & 0 & 55 & 165 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & 3z & = & -10 \\ & & y & + & 7z & = & 22 \\ & & & & 55z & = & 165 \end{array}\right\}$$

$55z = 165 \quad \Rightarrow \quad z = 3$

$y + 7 \cdot 3 = 22 \quad \Rightarrow \quad y + 21 = 22 \quad \Rightarrow \quad y = 1$

$x + 1 - 3 \cdot 3 = -10 \quad \Rightarrow \quad x + 1 - 9 = -10 \quad \Rightarrow \quad x = -2$

Solución

$\boxed{x = -2\,;\;\; y = 1\,;\;\; z = 3}$

o bien,

$S = \{(-2\,,1\,,3)\}$

Si una vez realizado el escalonamiento de la matriz ampliada, en la última fila no nula, se obtiene:

- Un único coeficiente distinto de cero, el sistema es ***compatible determinado***.
- Al menos dos coeficientes distintos de cero, el sistema es ***compatible indeterminado***.
- Todos los coeficientes nulos y el término independiente distinto de cero, el sistema es ***incompatible***.

SISTEMAS LINEALES	COMPATIBLES (Tiene solución)	DETERMINADO (Solución única)
		INDETERMINADO (Infinitas soluciones)
	INCOMPATIBLES (No tiene solución)	

Ejercicios

Sistemas escalonados

1) $\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & - & z & = & 3 \\ & & y & - & 2z & = & -1 \\ & & & & 3z & = & 6 \end{array}\right\}$

2) $\left.\begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & y & + & 5z & = & 2 \\ & - & 7y & + & z & = & 7 \\ & & & & 2z & = & 0 \end{array}\right\}$

Método de Gauss

1) $\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & z & = & 8 \\ 3x & + & 2y & - & z & = & -1 \\ -x & + & y & - & z & = & -6 \end{array}\right\}$

2) $\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 4 \\ -x & + & 3y & - & z & = & -2 \\ 2x & - & y & + & 4z & = & 6 \end{array}\right\}$

3) $\left.\begin{array}{rcrcrcr} -3x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ x & & & - & 2z & = & -1 \\ & & 2y & - & 7z & = & 3 \end{array}\right\}$

4) $\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 4y & + & 2z & = & 8 \\ -2x & + & 3y & - & z & = & -5 \\ 4x & + & y & + & z & = & 7 \end{array}\right\}$

5) $\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & 2z & = & 6 \\ 3x & + & y & - & z & = & 2 \\ -x & + & 2y & - & z & = & 0 \end{array}\right\}$

6) $\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & z & = & 2 \\ x & - & 2y & + & 3z & = & 1 \\ 3x & - & y & + & 4z & = & 3 \end{array}\right\}$

7) $\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 6y & + & 2z & = & 10 \\ -x & + & y & - & 2z & = & -3 \\ 2x & - & 2y & + & 4z & = & 5 \end{array}\right\}$

8) $\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & z & = & 3 \\ 3x & + & 2y & - & z & = & 4 \\ -x & + & y & - & z & = & -2 \end{array}\right\}$

9) $\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & + & z & = & 6 \\ 4x & - & y & + & z & = & 5 \\ & & 7y & + & z & = & 7 \end{array}\right\}$

Ejercicios (Soluciones)

Sistemas escalonados

1) S.C.D.

$(1, 3, 2)$

2) S.C.D.

$\left(\frac{1}{3}, -1, 0\right)$

Método de Gauss

1) S.C.D.

$(2, -3, 1)$

2) S.C.I.

$\left(\frac{16-11\lambda}{5}, \frac{2-2\lambda}{5}, \lambda\right) \quad \lambda \in \mathbb{R}$

3) S.I.

4) S.C.D.

$(1, 0, 3)$

5) S.C.D.

$(1, 2, 3)$

6) S.C.I.

$(1-\lambda, \lambda, \lambda) \quad \lambda \in \mathbb{R}$

7) S.I.

8) S.C.D.

$(1, 2, 3)$

9) S.C.I.

$\left(\frac{21-4\lambda}{14}, \frac{7-\lambda}{7}, \lambda\right) \quad \lambda \in \mathbb{R}$