EJERCICIOS RESUELTOS DE DISTRIBUCIÓN NORMAL

1) Los salarios mensuales de los recién graduados que acceden a su primer empleo se distribuyen según una ley normal de media 1300 € y desviación típica 600 €. Calcular el porcentaje de graduados que cobran:

a) Menos de 600 € al mes   b) Entre 1000 y 1500 € al mes   c) Más de 2200 € al mes

Solución:

- x: variable aleatoria "salarios mensuales, en euros, de los recién graduados en su primer empleo".
- La distribución de la variable x es N(1300, 600); $\mu = 1300$; $\sigma = 600$
- Hay que tipificar la variable para obtener las probabilidades a partir de la tabla N(0, 1).

a) $P(x<600) = P(z<\frac{600-1300}{600}) = P(z<-1{,}17) = 1-P(z\leqslant 1{,}17) = 1-0{,}8790 = 0{,}1210$

Por tanto, el 12,1% de los recién graduados cobra menos de 600 € al mes en su primer trabajo.

b) $P(1000<x\leqslant 1500) = P(\frac{1000-1300}{600}<z<\frac{1500-1300}{600}) = P(-0{,}5<z\leqslant 0{,}33) =$

$= P(z<0{,}33)-[1-P(z<0{,}5)] = 0{,}6293-(1-0{,}6915) = 0{,}3208$

Por tanto, el 32,08% de los recién graduados cobra entre 1000 y 1500 € al mes en su primer trabajo.

c) $P(x>2200) = P(z>\frac{2200-1300}{600}) = P(z>1{,}5) = 1-P(z\leqslant 1{,}5) = 1-0{,}9332 = 0{,}0668$

Por tanto, el 6,68% de los recién graduados cobra más de 2200 € al mes en su primer trabajo.

2) Se estima que el tiempo en horas que se necesita para memorizar un tema de Historia de la Filosofía es una variable aleatoria normal, cuya media y varianza se desconocen.
Calcular la media y la desviación típica de esta distribución si se sabe que las tres cuartas partes de las estudiantes necesitan más de 3 horas y que el 5% necesita más de 6 horas para memorizarlo.

Solución:

- x: variable aleatoria "tiempo, en horas, necesario para memorizar un tema de Historia de la Filosofía".
- La distribución de la variable x es N(μ, σ), siendo ambos parámetros desconocidos.
- Las tres cuartas partes de las estudiantes necesitan más de 3 horas → $P(x > 3) = 0{,}75$
- El 5% necesita más de 6 horas → $P(x > 6) = 0{,}05$

- Tipificando ambas expresiones:
  - $P(x > 3) = 0{,}75 \rightarrow \quad P(z>\frac{3-\mu}{\sigma}) = 0{,}75 \Rightarrow P(z\leqslant\frac{3-\mu}{\sigma}) = 1-0{,}75 = 0{,}25$
  - $P(x > 6) = 0{,}05 \rightarrow \quad P(z>\frac{6-\mu}{\sigma}) = 0{,}05 \Rightarrow P(z\leqslant\frac{6-\mu}{\sigma}) = 1-0{,}05 = 0{,}95$
- Buscamos en la tabla N(0, 1) los valores hallados:
  - 0,25 no está en la tabla equivale a 0,75 → 0,75 está entre 0,7486 y 0,7517 → le corresponde **-0,675** (hay que cambiar el signo)
  - 0,95 está entre 0,9495 y 0,905 → le corresponde 1,645

z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852

z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633

- Resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} P\left(z\leqslant\dfrac{3-\mu}{\sigma}\right)=0{,}25 \;\Rightarrow\; \dfrac{3-\mu}{\sigma}=-0{,}675 \\ P\left(z\leqslant\dfrac{3-\mu}{\sigma}\right)=0{,}95 \;\Rightarrow\; \dfrac{6-\mu}{\sigma}=1{,}645 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} \mu-0{,}675\sigma=3 \\ \mu+1{,}645\sigma=6 \end{array} \rightarrow \boxed{\mu=3{,}8728 \;\text{ y }\; \sigma=1{,}2931}$$

3) El tiempo de espera para ser atendida en un cierto establecimiento se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica igual a 3 minutos.
Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 121.
Determinar un intervalo de confianza con un nivel del 95% para μ, sabiendo que la media de la muestra es igual a 7 minutos.

Solución:
- x: variable aleatoria "tiempo de espera en minutos"
- La distribución de la variable x es $N(\mu, 3)$

MUESTRA de tamaño 121		POBLACIÓN
Media muestral: $\bar{x}$ = 7 minutos Desviación típica de la muestra	$\Rightarrow$	Se desconoce la media poblacional μ Desviación típica de la población: σ =3

- La muestra es $N\left(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=N\left(7, \dfrac{3}{\sqrt{121}}\right)$
- $1-\alpha=0{,}95 \Rightarrow \dfrac{\alpha}{2}=0{,}025 \Rightarrow z_{0{,}025}=1{,}96$
- Intervalo de confianza para la media:

$$\left(\bar{x}-z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\; \bar{x}+z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=\left(7-1{,}96\cdot\frac{3}{\sqrt{121}};\; 7+1{,}96\cdot\frac{3}{\sqrt{121}}\right)=(6{,}5;7{,}5)$$

Intervalo de confianza para la media: (6,5; 7,5)

4) El tiempo diario que las adultas de una determinada ciudad dedican a actividades deportivas, expresado en minutos, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica σ = 20 minutos.

a) Para una muestra aleatoria simple de 250 habitantes de esa ciudad se ha obtenido un tiempo medio de dedicación a actividades deportivas de 90 minutos diarios. Calcular un **intervalo de confianza al 90%** para μ.

b) ¿Qué tamaño mínimo debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral sea menor que un minuto con el mismo nivel de confianza del 90%?

Solución:
a) Se deducen datos sobre la distribución de las medias de las muestras.

- La población es $N(\mu, 20)$
- $n=250>30$

$\Rightarrow$ La muestra es $N\left(90, \dfrac{20}{\sqrt{250}}\right)$

Nivel de confianza del 90% $\rightarrow$ $1-\alpha=0{,}90 \Rightarrow \alpha=0{,}1 \Rightarrow \dfrac{\alpha}{2}=0{,}05 \Rightarrow 1-\dfrac{\alpha}{2}=0{,}95$

Buscamos en la tabla el valor de z que deja a la izquierda una probabilidad de 0,90 $\rightarrow$ $z_{\alpha/2}=1'645$

Intervalo de confianza para la media:

$$\left(\bar{x}-z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\; \bar{x}+z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=\left(90-1{,}645\cdot\frac{20}{\sqrt{250}};\; 90+1{,}645\cdot\frac{20}{\sqrt{250}}\right)=(87{,}92;92{,}08)$$

Intervalo de confianza para la media: (87,92; 92,08)

b) Error máximo admisible: $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$; Datos: $z_{\alpha/2} = 1'645$; $\sigma = 20$

Se pide n para que el error máximo cometido sea < 1 → $E = 1{,}645 \cdot \frac{20}{\sqrt{n}} < 1 \Rightarrow 32{,}9 < \sqrt{n} \Rightarrow n > 1082{,}41$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser de 1083

5) Sabiendo que el peso de los estudiantes varones de 2º de Bachillerato se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal, de media 74 kg y desviación típica 6 kg, se pide:
a) Determinar el porcentaje de estudiantes varones cuyo peso está comprendido entre los 68 y 80 kg.
b) Estimar cuántos de los 1500 estudiantes varones que se han presentado a la EvAU en una cierta universidad, pesan más de 80 kg.
c) Si se sabe que uno de estos estudiantes pesa más de 76 kg, ¿cuál es la probabilidad de que pese más de 86 kg?

Solución:
- x: variable aleatoria "peso de los estudiantes"
- La distribución de la variable x es N(74, 6); $\mu = 74$; $\sigma = 6$

- Hay que tipificar la variable para obtener las probabilidades a partir de la tabla N(0, 1).

$$P(68 < x \leqslant 80) = P\left(\frac{68-74}{6} < z < \frac{80-74}{6}\right) = P(-1 < z \leqslant 1) = 2P(z < 1) - 1 = 2 \cdot 0{,}8413 - 1 = 0{,}6826$$

Por tanto el 68, 26% de los estudiantes varones tendrán un peso entre 68 y 80 kg.

b) $P(x > 80) = 1 - P(x \leqslant 80) = 1 - P(z \leqslant 1) = 1 - 0{,}8413 \approx 0{,}1587$

Por tanto el 15,87% de los estudiantes varones pesarán más de 80 kg
15,87% de 1500 = 238,05

Por tanto unos 238 estudiantes varones pesarán más de 80 kg.

c) Hay que calcular la probabilidad condicionada

$$P(x > 86 \,/\, x > 76) = \frac{P(x > 86) \cap P(x > 76)}{P(x > 76)} = \frac{P(x > 86)}{P(x > 76)} = \frac{P(z > 2)}{P(z > 1/3)} = \frac{1 - P(z \leq 2)}{1 - P(z \leq 1/3)} \approx \frac{0{,}0228}{0{,}3707} \approx 0{,}0615$$

6) Las tensiones de ruptura de los cables fabricados por una empresa siguen una distribución normal con media desconocida y $\sigma = 120$. A partir de una muestra de 70 cables se ha obtenido una tensión media de ruptura de 2100 kilos.
a) Hallar un IC del 95% para la tensión media de ruptura.
b) ¿Qué tamaño debe tener la muestra para obtener un IC al 99% con una amplitud igual a la anterior?

Solución:
a) Muestra → $\bar{x} = 2100$

$$1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0{,}025 \Rightarrow z_{0,025} = 1{,}96$$

IC para al 95% para la tensión de ruptura media μ de los cables [$IC_{0,95}$ (μ)]:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(2100 - 1{,}96 \cdot \frac{120}{\sqrt{70}};\ 2100 + 1{,}96 \cdot \frac{120}{\sqrt{70}}\right) = (2071{,}888;\ 2128{,}112)$$

b) Si para seleccionar una muestra de tamaño n, el nivel de confianza se exige que sea del 99%:

$$1 - \alpha = 0{,}99 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0{,}005 \Rightarrow z_{0,025} = 2{,}575$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \frac{120}{\sqrt{70}} = 28{,}112$$

Por tanto n debe cumplir:

$$2{,}575 \cdot \frac{120}{\sqrt{n}} \leqslant 28{,}112 \;\Rightarrow\; n \geqslant \left(\frac{2{,}575 \cdot 120}{28{,}112}\right)^2 = 120{,}82$$

Es decir, debe tomarse una muestra de al menos 121 cables para estimar la resistencia media μ a la ruptura con las condiciones propuestas.